

delle soluzioni delle equazioni dell'equilibrio o del moto di un corpo elastico mediante sistemi di soluzioni particolari, quelle relative alla forma del potenziale elastico per corpi anisotropi, in particolare dei cristalli, e la soluzione di una classe di problemi per questi materiali, le ricerche sulla propagazione delle onde sismiche e le onde di Rayleigh in un suolo elastico, che contribuirono allo sviluppo della Sismologia ed all'indagine sulla costituzione interna della Terra.

Si deve al Somigliana una cospicua estensione della teoria delle distorsioni di Volterra, che, a differenza di questi, lo portarono, fra l'altro, a considerare anche corpi a connessione lineare semplice.

Il nome di Somigliana rimane soprattutto legato alle oggi famose « formole di Somigliana », che esprimono ogni soluzione delle equazioni elastostatiche come somma di tre potenziali: uno di volume e due di superficie, analoghi, questi ultimi, al semplice strato ed al doppio strato della teoria del potenziale. Estese poi queste sue rappresentazioni integrali anche alle soluzioni dei problemi elastodinamici.

Alle sue formole, il Somigliana giunse determinando preventivamente la matrice soluzione fondamentale della elastostatica dei corpi isotropi ed omogenei, oggi nota come « matrice di Somigliana » che, tuttavia, era già stata scoperta da Lord Kelvin fin dal 1848.

Occorre anche dire che risultati analoghi alle formole di Somigliana ottennero, nello stesso lasso di tempo, il grande analista svedese Ivar Fredholm ed il palermitano Michele Gebbia (1854-1929) con la sua teoria delle « deformazioni tipiche ».

Il Gebbia fu fisico-matematico di indubbio talento, cui forse nocque l'eccessivo isolamento scientifico nel quale volle sempre lavorare, per quella insularità d'animo che è stata spesso una caratteristica anche di altri ingegni, nati e operanti nella nostra Sicilia.

Accanto ai nomi di Volterra e Somigliana, voglio ricordare quello di un altro gigante della Scienza italiana: Tullio Levi-Civita (1873-1941), il più grande Meccanico che l'Italia abbia avuto dopo Galileo e Lagrange.

Ancorché i suoi interessi e le sue principali scoperte appartengano a campi lontani dall'Elasticità, quali la Geometria differenziale, la Teoria di relatività, la Meccanica celeste, l'Idrodinamica, non sono mancati suoi contributi ai problemi dell'Elasticità. Fra essi è da ascrivere una ricerca sulla penetrazione dei proiettili nei mezzi solidi, che spiega, con l'effetto dovuto alla deformazione dell'ogiva del proietto, l'apparente paradosso secondo cui, aumentando la velocità, può diminuire la penetrazione.

Un'altra ricerca che ritengo di dover ricordare riguarda il calcolo del cemento dinamico di un corpo elastico, eseguita, con un metodo già proposto da Beltrami per il caso statico, mediante il calcolo di un confine superiore dell'energia elastica del sistema in moto, da cui segue un criterio di « sicurezza » per il corpo durante il movimento.

Gli studi di Fisica matematica ed, in particolare, di teoria dell'elasticità, ormai fiorenti in Italia, annoverano, nel trentennio che va, approssimativamente, dal 1890 al 1920, i contributi di una nutrita schiera di valenti studiosi. Le ricerche della teoria dell'elasticità si intrecciano con quelle sulle equazioni alle derivate parziali, specie dopo che Fredholm, nel 1903, era riuscito nella straordinaria impresa di risolvere l'equazione integrale lineare di seconda specie a limiti fissi, problema, questo, che aveva resistito ai reiterati attacchi portatigli dal grande Volterra.

La scoperta di Fredholm aveva permesso di attaccare per la prima volta i problemi di esistenza delle soluzioni, che assieme ai congiunti teoremi di unicità, costituiscono la parte più elevata e difficile di ogni teoria analitica. Non ritengo, se non altro per ragioni di tempo, di poter qui parlare delle affascinanti vicende connesse ai teoremi di esistenza nella teoria dell'elasticità. Rimando per questo, gli interessati, ad una conferenza riassuntiva che io tenni prima a Monaco e poi a Stoccolma qualche anno fa (*).

Diversi matematici italiani che operarono nel predetto trentennio si occuparono, con minore o maggiore fortuna, anche delle questioni di esistenza.

Roberto Marcolongo (1862-1943) romano e professore di Meccanica razionale a Messina prima (1895) ed a Napoli poi (1908), fu studioso di ampia cultura e forbito scrittore di questioni storiche. Applicò all'Elasticità la teoria di Fredholm. Ottenne anche formole risolutive per problemi particolari di Elastostatica (deformazione di un semispazio, di una sfera, di un angolo diedro).

Di lui va specialmente ricordato l'esemplare volumetto sulla teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici, mirabile per chiarezza ed eleganza di esposizione.

Analista di notevole livello fu Giuseppe Lauricella, nato ad Agrigento nel 1867. Compì i suoi studi a Pisa, ove fu allievo di Bianchi, Dini e, specialmente, di Volterra. Insegnò Calcolo infinitesimale a Catania dal 1898 al 1910. Passò quindi a Roma per l'Analisi superiore, ma dopo un solo anno fece ritorno a Catania, dove prematuramente morì, nel 1913, contagiato di morbillo da un suo figlioletto.

I suoi contributi riguardano studi approfonditi sulle equazioni dell'equilibrio elastico relative ai corpi tri-dimensionali ed alle piastre. In questi studi egli applicò, spesso assai abilmente, la teoria delle equazioni integrali di Fredholm. È ben noto, in Analisi matematica, un suo criterio di « chiusura » per i sistemi di funzioni ortogonali.

Pietro Burgatti (1869-1938) divenne professore di Meccanica razionale a Messina nel 1908 e passò l'anno successivo a Bologna. Noto per avere, assieme

(*) G. FICHERA, *Existence Theorems in Linear and Semi-Linear Elasticity* (GAMM-Tagung München 1973), ZAMM Bd. 54, 1974, pp. 24-36 e *Proceed. of the Symp. in Mathem. at the Royal Inst. of Technology, June 1973*, Stokholm, pp. 33-56.

al Burali-Forti ed al Marcolongo, patrocinato il metodo vettoriale, portò anche contributi all'Elasticità dove ritrovò, con altri metodi, risultati precedenti di Somigliana, Clebsch e Saint-Venant. Introdusse le funzioni analitiche di ordine n , così chiamando le soluzioni dell'equazione ottenuta iterando n volte l'operatore di Cauchy-Riemann, e ne fece applicazione a taluni problemi di Elasticità piana.

Fisico matematico di notevole originalità fu Emilio Almansi (1869-1948), fiorentino. Fu professore di Fisica matematica a Padova dal 1903 al 1910 e, successivamente, di Meccanica razionale a Roma, dove, nel 1922, lasciò volontariamente l'insegnamento e, dotato di larghi mezzi di fortuna, si ritirò a Firenze, dedicandosi alla ricerca fuori dell'ambiente universitario.

A lui si devono importanti risultati sulle funzioni poliarmoniche. In Elasticità dette una elegante formula per la deformazione di una sfera isotropa e studiò l'influenza delle deformazioni elastiche sul moto dei pendoli destinati a misure di gravità.

Notevoli i suoi studi sui cosiddetti « sistemi disgregati » e, soprattutto, le ricerche pionieristiche che egli — primo in Italia — intraprese sui problemi della Elasticità non linearizzata.

Orazio Tedone (1870-1922), pugliese, insegnò Analisi superiore a Genova dal 1898 al 1902, anno nel quale successe al Morera a Torino per la Meccanica razionale, passando poi nel 1906 alla Fisica matematica. Fu un forte matematico che studiò i problemi sia statici che dinamici dell'Elasticità classica, dando prova di non comune abilità algoritmica. Se pure è giusto il rilievo che il Somigliana muove all'opera del Tedone, a causa del suo eccessivo formalismo, è anche vero che essa meritava forse maggiore apprezzamento dal mondo scientifico, come lo stesso Somigliana osserva. Morì a causa di un banale incidente ferroviario: era sceso dal lato sbagliato del treno e fu travolto da un altro convoglio che sopravveniva nell'opposto binario.

Analista altrettanto abile, ma dotato di minor rigore, anche se compensato da maggior senso fisico, fu Tommaso Boggio, piemontese, nato nel 1877 e morto, in età avanzata, nel 1963. Iniziò la carriera universitaria di professore insegnando Matematica finanziaria a Genova nel 1905. Passò poi a Messina nel 1908 per la Meccanica razionale e nel 1909, per la Meccanica superiore, a Torino, dove rimase fino alla fine del suo insegnamento che, negli ultimi anni, tenne dalla cattedra di Matematiche complementari. Si devono al Boggio molti importanti contributi alle equazioni alle derivate parziali della Fisica matematica, anche se qualcuno dei suoi risultati è stato, da una critica posteriore, dimostrato illusorio, come ad esempio la presunta soluzione con il metodo di Fredholm del 1° problema al contorno della Statica elastica. I suoi risultati di maggior pregio riguardano il cosiddetto problema biarmonico relativo ad una piastra elastica incastrata al bordo. Per i suoi risultati in questo campo fu premiato nel 1907 dall'Accademia delle

Scienze di Parigi (la massima Accademia francese) che sull'argomento aveva bandito un concorso internazionale, giudicato da una Commissione presieduta da Henri Poincaré.

Occorre dire che assieme al Boggio furono anche premiati Hadamard, Korn ed il nostro Lauricella.

Il fatto che ben due italiani ricevessero tale alto riconoscimento, è indice dell'elevato livello al quale erano giunti gli studi di Teoria dell'elasticità in Italia.

Ed ai contributi cui ho finora accennato, occorrerebbe aggiungere, se il tempo non me lo impedisse, quelli, in gran parte più recenti, di Ernesto Laura (1879-1949), Rocco Serini (1886-1964), Luciano Orlando (1887-1915), caduto in guerra, Francesco Sbrana (1891-1958).

Ma non posso non soffermarmi sulla figura di Guido Fubini (1879-1943), il grande analista italiano che insegnò, prima a Catania, e poi a Genova ed a Torino, dove, per trent'anni, dal 1908 al 1938, onorò la cattedra di Analisi matematica del Politecnico.

Le leggi razziali fasciste lo allontanarono nel 1938 dall'insegnamento. Morì esule negli Stati Uniti d'America.

Fubini fu eminente in molti campi della Matematica ed i suoi contributi all'Elasticità, originati, si dice, dall'intento di assistere il figlio che studiava Ingegneria, sono solo una assai piccola parte della sua vasta produzione. Essi, però, meritano di essere menzionati e forse di essere ripresi, per il suggestivo tentativo compiuto dal Fubini, poi seguito da Francesco Tricomi, di estendere a cilindri ad asse curvo la teoria di Saint-Venant. Occorre però dire che in questi studi sia Fubini che Tricomi erano stati, in parte, preceduti da un lavoro di Michell, apparso nel 1899.

Due figure particolarmente significative nella teoria matematica dell'elasticità in Italia furono Gustavo Colonnetti e Giulio Krall. Rappresentò, ciascuno di essi, una sintesi quasi perfetta fra la figura dell'ingegnere e quella del matematico.

Colonnetti nacque a Torino nel 1886, dove si laureò in Ingegneria, nel 1908 ed, in Matematica, nel 1911. Divenne professore nel 1914 ed insegnò a Pisa nella Facoltà di Ingegneria e, successivamente, dal 1920, nel Politecnico di Torino.

Fu esule in Svizzera durante l'occupazione nazista dell'Alta Italia, nell'ultima guerra. Dopo la liberazione fu Presidente del C.N.R. e si adoperò utilmente per la ricostruzione del nostro Paese, devastato dalla guerra, e per la ripresa delle attività scientifiche. Morì a Torino nel 1968.

Il contributo di Colonnetti alla Teoria dell'elasticità ed alla Scienza delle costruzioni è profondo ed originale. Mi limiterò qui solo a parlare degli aspetti di natura più matematica.

Era già nota da tempo l'inadeguatezza della teoria classica dell'elasticità a prevedere l'effettivo comportamento statico di talune strutture. In pratica esistevano ed esistono numerose costruzioni che, condannate dalla teoria classica, pur

rimangono saldamente in piedi. Colonnetti ed altri si erano resi conto che nel comportamento di queste strutture intervengono in modo determinante le deformazioni che permangono anche quando è cessata l'azione delle forze che originarono la deformazione. Questo portò Colonnetti a ricercare un principio di minimo che, generalizzando quello di Menabrea, tenesse conto di questi effetti più complessi. Egli riuscì in questa impresa, fornendo un principio di minimo che prende in considerazione non solo le deformazioni elastiche e quelle plastiche, ma anche deformazioni, più generali, indipendenti da forze esterne, che Colonnetti chiamò « stati di coazione » e che comprendono come casi particolari le distorsioni di Volterra e di Somigliana, nonché le deformazioni causate da « effetti termici ».

Dal suo principio Colonnetti dedusse che gli stati di coazione possono riuscire utili ai fini della resistenza del materiale, ciò che lo portò ad essere uno dei pionieri delle tecniche costruttive fondate sull'impiego del cemento armato pre-compresso.

Altro contributo del Colonnetti è un'estensione del teorema di reciprocità di Betti, atta ad includere stati di deformazione assai più generali di quelli considerati nella teoria classica.

Splendida figura di ingegnere matematico è quella di Giulio Krall, nato a Trieste nel 1901, morto a Roma nel 1971. Come Colonnetti, egli ebbe la doppia laurea in Ingegneria ed in Matematica, conseguita la prima nel 1923 a Milano, la seconda nel 1924 a Roma. Arturo Danusso e Tullio Levi-Civita furono i Maestri che ebbero su di lui maggiore influenza. Vincitore di due concorsi universitari nel 1931: Scienza delle costruzioni e Meccanica razionale, optò per la prima ed insegnò nella Facoltà di Architettura di Napoli fino al 1939, anno in cui passò all'Istituto di Alta Matematica a Roma, per occuparvi la cattedra di Applicazioni di Alta Analisi. Nel 1963 passò alla cattedra di Istituzioni di Fisica matematica presso l'Università di Roma, che tenne fino alla sua scomparsa.

Krall fu uomo di vastissima cultura e la sua produzione abbraccia moltissimi campi della Meccanica e della Fisica matematica. E, se i suoi risultati sono improntati più dalla sua sapienza di Scienziato che dalla sua originalità di ricercatore, lo si deve alla ritrosa modestia del suo carattere, che gli faceva maggiormente apprezzare il pensiero degli altri che il frutto delle sue proprie meditazioni.

Di lui rimane il poderoso trattato « Meccanica tecnica delle vibrazioni », vera enciclopedia sulle applicazioni della Meccanica vibratoria ai problemi dell'Ingegneria.

Giulio Krall, più di ogni altro autore citato in questa mia trattazione, ebbe sensibilità nel sapere applicare i più elevati risultati teorici ai problemi concreti dell'Ingegneria. E fu, perciò, grande costruttore, oltre che eminente Scienziato. Ardite, bellissime costruzioni, in Italia ed all'Estero, testimoniano della sua genialità come ingegnere.

Anche se, come Colonnetti e Krall, Bruno Finzi (1899-1974) ebbe una parazione sia da ingegnere che da matematico, avendo conseguito nel 1920 e nel 1921, rispettivamente, le lauree in queste discipline, e pur avendo svolto la massima parte della sua attività come professore nel Politecnico di Milano, egli fu essenzialmente un fisico matematico. Dotato di amplissima cultura, fu, dopo Ricci-Curbastro e Levi-Civita il maggiore esperto italiano di Calcolo tensoriale, al quale dedicò un magistrale trattato scritto in collaborazione con la sua allieva Maria Pastori.

Le sue ricerche interessano la Fluidodinamica, la Teoria delle onde di discontinuità, la Teoria di relatività, tutti argomenti che egli trattò con grande abilità algoritmica e facendo, spesso, suggestivo impiego dei principi variazionali.

Alla Meccanica dei sistemi continui egli recò notevoli contributi, con ricerche sui sistemi perfettamente o imperfettamente estensibili, sui « veli solidi », sui corpi plastici.

Notevole una sua estensione del principio di Menabrea ai corpi imperfettamente elastici ed ai fluidi viscosi.

Ma il suo più noto contributo in questo campo è la determinazione dell'integrale generale delle equazioni dei sistemi continui in coordinate curvilinee, soluzione oggi conosciuta come tensore di Finzi, che contiene, come casi particolari, i risultati precedenti di Airy, Beltrami e Morera.

All'opera di Finzi è ispirata quella di Maria Pastori (1895-1975), allieva di questi, anche se di lui più anziana di qualche anno. Ed è con vivo piacere che, nel lungo elenco di nomi che hanno onorato la teoria matematica dell'elasticità in Italia, io posso anche includere il nome di una donna, che con la sua importante produzione scientifica raggiunse, giustamente, un'alta posizione fra gli Scienziati italiani.

E la Pastori non è stata l'unica rappresentante femminile italiana in questo campo della Scienza chè, oltre a lei, bisogna anche ricordare Maria Josepha De Schwarz (1909-1957), triestina, ricercatrice presso l'Istituto di Calcolo del C.N.R., autrice di interessanti lavori, specie sulla torsione dei prismi cavi, morta, prematuramente, in modo tragico.

Alla fine di questa mia lunga esposizione ho lasciato, *the last but not the least*, due nomi a me particolarmente cari: Antonio Signorini e Mauro Picone, miei grandi Maestri nell'Ateneo romano ed ai quali — specie al secondo — tanto io debbo della mia formazione scientifica.

Antonio Signorini, dello spirito di Arezzo, dove nacque nel 1888, conservò per tutta la vita il sottile senso ironico e indipendente. Fu allievo del Maggi a Pisa e del Levi-Civita a Padova. Volontario in guerra, ebbe al fronte, nel 1916, la notizia di essere riuscito vincitore nel concorso per la cattedra di Meccanica razionale a Palermo. Mentre era professore in questa città, volle anche laurearsi in Ingegneria, per meglio comprendere le esigenze dei suoi allievi ingegneri. Passò

nel 1923 a Napoli e nel 1939 a Roma, dove definitivamente rimase. Morì nel 1963.

Signorini volle rimanere fedele allo spirito della vecchia Fisica matematica di Betti, Volterra e Somigliana, ma, in quest'ambito classico, egli operò una rivoluzione perché con autentico coraggio attaccò sistematicamente, fra i primissimi nel mondo, i tremendi problemi della Elasticità non lineare. Ciò gli fu consentito, oltre che dal suo intuito fisico, anche dalla sua forza di analista, della quale aveva già dato prova risolvendo difficili problemi di Analisi.

Occorre ricordare che egli anche ottenne eleganti ed utili proprietà di media per gli sforzi dei sistemi continui in equilibrio, e recò numerosi contributi a problemi di Scienza delle costruzioni.

Ma a partire dal 1930 egli sistematicamente affrontò i problemi della Termoeasticità non lineare. In tale ambito non possono più considerarsi trascurabili i termini quadratici che intervengono nelle espressioni delle componenti di deformazione. Si ha il grave inconveniente della non linearità della legge di Hooke e, cosa ancora più grave, la impossibilità di confondere, come avviene nella classica teoria lineare, la configurazione iniziale del solido con quella, a priori incognita, assunta dopo la deformazione. È d'uopo allora introdurre il cosiddetto « spostamento inverso », ma le equazioni che reggono la statica delle deformazioni termoeastiche finite risultano non lineari ed assai complesse.

Per poter giungere a tali equazioni egli propone di ricercare le equazioni costitutive, attraverso la determinazione di un potenziale, che suggerisce di cercare impiegando anche i principi generali della Termodinamica.

Al fine di far luce sulle equazioni non lineari dell'equilibrio egli fa l'ipotesi (ipotesi di Signorini) che, supposte le forze esterne agenti sul corpo dipendenti da un fattore ϵ , le soluzioni delle equazioni siano funzioni olomorfe di ϵ nell'intorno del punto $\epsilon = 0$. I vari coefficienti dello sviluppo vengono allora ad essere soluzioni di problemi lineari, ottenuti con procedimento induttivo, il primo dei quali è quello dell'Elasticità lineare classica.

A parte taluni casi di incompatibilità cui questo procedimento dà luogo, scoperti dallo stesso Signorini, è da chiedersi fino a che punto l'ipotesi di Signorini sia accettabile.

Questo interrogativo, posto dal Truesdell, apre interessanti problemi di Analisi, visto che l'ipotesi di Signorini sarebbe soddisfatta se le soluzioni delle equazioni non lineari della Elastostatica fossero funzionali analitici, nel senso di Fantappiè, delle forze esterne. Chi vi parla ha motivo di ritenere che l'ipotesi di Signorini non sia verificata se il contorno del solido presenta qualche singolarità del tipo di un vertice o di uno spigolo rientrante.

Ma sono, questi, problemi la cui soluzione appartiene al futuro.

Il nome di Signorini non rimarrà solo legato all'Elasticità non lineare, ma anche allo studio dei problemi unilaterali che egli pose per primo, nel 1933, ed,

in modo più penetrante e completo, in una serie di magistrali lezioni tenute nel 1959 all'Istituto di Alta Matematica a Roma.

Il problema di Signorini consiste nello studiare l'equilibrio di un corpo elastico assoggettato al vincolo unilaterale di non potere andare al disotto di una superficie liscia sulla quale può, al più, appoggiarsi.

Lo studio di questo problema ha aperto tutto un nuovo suggestivo capitolo dell'Analisi e della Fisica matematica. Ed è indubbio titolo di merito della Matematica italiana che questa teoria abbia avuto inizio nel nostro Paese.

Si può senza dubbio affermare che Signorini si pone accanto a Betti, Volterra e Somigliana come uno dei massimi Scienziati italiani nella teoria dell'elasticità.

Mauro Picone non fu elasticista di professione, ma è indubbio che la sua opera ha indirettamente recato contributi essenziali alla risoluzione effettiva dei problemi di quella teoria.

Nato a Palermo nel 1885, origine della quale fu sempre orgoglioso, insegnò Analisi matematica a Catania, Pisa, Napoli ed infine a Roma. È mancato l'11 aprile di quest'anno.

La fondazione dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, primo del genere nel mondo, a lui dovuta, rappresenta una svolta importante in tutto il pensiero scientifico perchè ha portato sui binari della concretezza la matematica applicata, dando un significato preciso alla frase « risolvere un problema ».

Ho poco fa parlato delle critiche che possono muoversi al punto di vista di Green e di Betti nella soluzione dei problemi della Fisica matematica classica. Voglio ora riportare le parole con le quali Carlo Somigliana commemorò l'opera di Orazio Tedone:

« Considerando la grande fatica che ha speso il nostro matematico (cioè il Tedone) intorno a queste soluzioni generali dei problemi elastici..., vien fatto di domandarci quali siano state le applicazioni ai problemi della tecnica costruttiva, che possano giustificare tanto lavoro di analisi e di calcolo. Purtroppo la risposta è quasi negativa; ma ciò forse non proviene da una ragione intrinseca, quanto da quella separazione e reciproca incomprensione che regnano ancora in questo campo fra teorici e tecnici ».

Questo scriveva Somigliana nel 1923.

L'opera di Picone è valsa a disperdere quella « incomprensione » di cui parla il Somigliana ed a fare dell'Analisi matematica e, specialmente, dell'Analisi numerica strumenti veramente utilizzabili da parte dei tecnici.

Non mancarono diretti contributi di Picone alla teoria dell'elasticità, quale, ad esempio, la sua impostazione del problema d'equilibrio di un solido incastrato in un altro, che dette avvio allo studio di quei problemi detti oggi « di trasmissione ».

Ma ciò poco aggiunge alla grandezza di questo insigne Scienziato, che fu anche, e direi soprattutto, un incomparabile Maestro, forse il più grande che la Matematica italiana abbia avuto dopo Galileo.

La sintesi da me fatta, necessariamente in modo sommario, sul contributo italiano alla teoria matematica dell'elasticità, spero lasci intravedere come, anche in questo settore della Scienza, l'Italia abbia svolto una funzione di assoluto primo piano. Il possesso di un tale enorme patrimonio di conoscenze fornisce complessità al nostro spirito ed impone a chiunque sinceramente voglia mantenere alto il prestigio culturale del nostro Paese, di custodire gelosamente i valori di questo, come di tutti quegli altri inestimabili patrimoni intellettuali, dei quali le generazioni precedenti ci lasciarono eredi.

Che se è vero che l'uomo di scienza deve avere gli occhi fissi al futuro, bisogna pur sempre ricordare l'avvertimento di Newton: « È salendo sulle spalle dei giganti che si può vedere lontano ».

Pervenuto il 23 gennaio 1978

*Istituto di Matematica « Guido Castelnuovo »
Città Universitaria - Roma*