

IL CONTRIBUTO ITALIANO ALLA TEORIA MATEMATICA DELL'ELASTICITÀ

GAETANO FICHERA (*)

La Meccanica, com'è a tutti noto, è quella parte della Scienza che studia il movimento e l'equilibrio dei corpi. Newton, nei suoi « *Philosophiae naturalis principia mathematica* », con il suo dotto latino che, assai poveramente, cercherò di tradurre, così distingue la Meccanica, quale dottrina scientifica, dalla meccanica volgarmente intesa: « Gli antichi, in verità, fondarono una duplice Meccanica: la *razionale*, che procede mediante accuratissime dimostrazioni, e la *pratica*. Tutte le arti manuali appartengono alla parte pratica, dalle quali, peraltro, la meccanica prese il nome ». Continua Newton: « Poiché, d'altronde, gli artigiani sogliono operare con poca cura, ciò fece sì che tutta la meccanica sia stata distinta dalla geometria, per modo che tutto ciò che è rigoroso sia riferito alla geometria e quello che lo è meno alla meccanica. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum*. Colui che lavora con minor cura è un meccanico imperfetto e se qualcuno potesse lavorare in modo accuratissimo, questo sarebbe un meccanico perfettissimo fra tutti ».

Rivalutata la Meccanica come disciplina teoretica, Newton aggiunge: « La geometria si fonda sulla prassi della meccanica (razionale) e non è nient'altro che quella parte della meccanica universale che propone e dimostra l'arte di misurare accuratissimamente ».

Il senso di queste affermazioni, se formulate con concetti più moderni, vuole esprimere che la Meccanica razionale va distinta dalla Meccanica puramente sperimentale per il modo con il quale nella prima si procede per ottenerne i risultati.

Ed invero la Meccanica razionale, essendo una teoria matematica, cioè un sistema ipotetico-deduttivo, ha, bensì, come suo fondamento un complesso di concetti primitivi, cioè accettati senza definizione, ed un sistema di assiomi o postulati, accettati senza dimostrazione, ma le sue « verità » sono i teoremi dedotti

(*) Conferenza tenuta nell'Aula Magna dell'Università di Palermo il 16-XII-1977, in occasione del conferimento della laurea h.c. in Ingegneria Civile-Edile.

dai postulati con rigoroso ragionamento, con « accuratissime dimostrazioni », come dice Newton.

Inoltre i concetti ed i postulati primitivi della Geometria, i cui scopi sono solo una parte di quelli che si prefigge la Meccanica, sono inclusi nell'assiomatica più vasta su cui si fonda l'edificio della Meccanica razionale.

La Meccanica, inizialmente, studia l'equilibrio (cioè la *statica*) ed il movimento (cioè la *dinamica*) dei corpi rigidi per effetto di forze che agiscono su di essi.

È rigido un corpo tale che, *quali si siano* le forze che ne producano il moto, o che ne assicurino l'equilibrio, la distanza fra due qualsivogliano suoi punti rimane invariata.

Ma non esistono in Natura corpi scrupolosamente rigidi e la Meccanica, spinta dalle esigenze delle applicazioni, ha dovuto considerare i problemi statici e dinamici per corpi « elastici », cioè tali che, sottoposti a sistemi di forze, si « deformano ».

Il concetto di elasticità è assai complesso ed esso va dalla formulazione classica, relativamente semplice, a definizioni più sofisticate, intese a dare una assiomaticizzazione matematica ad una realtà fisica spesso straordinariamente complicata.

Mi limito qui a dire che, nella sua accezione più semplice, l'elasticità di un dato corpo materiale è espressa dalle relazioni quantitative dette *equazioni costitutive*, che stabiliscono l'entità delle deformazioni che subiscono le varie parti del corpo in conseguenza degli sforzi cui esse sono sottoposte a causa delle sollecitazioni che agiscono sul corpo stesso.

Tali equazioni costitutive, unitamente agli altri postulati della Meccanica ed, in particolare, a quelli della Meccanica dei sistemi continui (cioè quei sistemi materiali schematizzabili con figure geometriche bi- o tri-dimensionali continue) permettono di edificare una teoria matematica che è, appunto, la teoria matematica dell'elasticità. Questa teoria interviene in modo essenziale in molti rami della Ingegneria.

Anche chi ha una formazione culturale lontana dalla tecnica sa bene che l'ingegnere, nel progettare una qualsiasi struttura, deve prevedere se essa reggerà ai cimenti cui durante il suo esercizio o funzionamento verrà sottoposta. Se, ad esempio, si tratta di un ponte, l'ingegnere dovrà prevedere se il materiale sopporterà gli sforzi originati dai carichi cui il ponte verrà sottoposto, e se esso reggerà alle sollecitazioni dinamiche dovute al passaggio dei veicoli che lo percorreranno; se, trattandosi di un ponte a grande luce, resisterà alle folate di vento che lo investiranno. Il progettista dell'albero motore di una nave dovrà preoccuparsi che fra le velocità alle quali l'albero dovrà girare non ve ne siano di quelle, cosiddette « critiche », che potrebbero provocarne lo spezzamento. Il progettista di una capsula spaziale dovrà essere sicuro che le strutture elastiche che la compongono si manterranno « stabili » nel moto vibratorio cui saranno sottoposte durante il volo.

Orbene, tutte queste previsioni si fanno attraverso i calcoli che vengono suggeriti da teoremi matematici della teoria dell'elasticità o da teorie da questa originate. Naturalmente non è soltanto ad essi che l'ingegnere farà ricorso, ma anche all'esperienza, alla particolare sensibilità che avrà acquisito studiando la fisica del problema, al suo buon senso di costruttore ed alla sua intuizione di progettista, con quella sintesi di tutti questi mezzi che fanno dell'alta Ingegneria, ancor più che una tecnologia ed una scienza, una vera arte.

Comunque il ruolo della matematica rimane predominante e se la tecnica trae ampio partito dalla sicurezza dei suoi metodi, la matematica, a sua volta, assai spesso, trova motivi di autentico progresso nel cercare di soddisfare le esigenze di quella.

L'iniziatore della teoria matematica dell'elasticità viene considerato, diciamo pure con una certa generosità, Robert Hooke, che nel 1676 intuì la proporzionalità fra le deformazioni elastiche dei corpi e gli sforzi cui questi sono sottoposti, proporzionalità che espresse, in verità un po' vagamente, con la frase *ut tensio sic vis*. Pubblicò anagrammata tale frase, temendo che qualcuno potesse portargli via la priorità di una siffatta scoperta.

È tuttavia a partire dagli anni venti del XIX secolo che gli studiosi hanno sistematicamente concepito la Meccanica dei sistemi continui ed, in particolare, la teoria dell'elasticità, quali rigorose teorie matematiche. Ciò è opera, soprattutto, dei grandi scienziati francesi, fra i quali giganteggia la figura di Agostino Luigi Cauchy, che il 30 settembre del 1822 comunicava alla Société Philomatique francese, mediante una Nota, il suo fondamentale « *principio degli sforzi* », sul quale è oggi fondata la Meccanica del continuo. Nella stessa Nota egli formulava le equazioni costitutive dell'Elasticità lineare per un corpo isotropo ed omogeneo che, oggi, a mio avviso ingiustamente, vengono chiamate *legge di Hooke*.

Occorre anche ricordare l'opera di Navier e di Fresnel, che avevano preceduto Cauchy, di un anno, nella scoperta di casi particolari della cosiddetta legge di Hooke, nonché l'opera di Poisson, di Lamé, di Clapeyron e, più tardi, quella altrettanto basilare di de Saint-Venant.

Ai contributi francesi sono da affiancare quelli di Lord Kelvin e di Maxwell in Gran Bretagna e di Kirchhoff, Clebsch e Neumann in Germania.

Sono tutti quelli ora ricordati gli Scienziati che, nei primi sessanta anni del secolo scorso, concorsero a gettare le fondamenta di una delle più belle e suggestive teorie di tutta la matematica, cioè quella che oggi viene chiamata *teoria matematica classica dell'Elasticità*.

Poco gli italiani dovevano contribuire al sorgere di questa teoria e gli unici nomi italiani che meritano di essere ricordati per aver lasciato contributi alla teoria dell'elasticità nel periodo predetto, sono quelli di Gabrio Piola (1791-1850) e del conte Luigi Federigo Menabrea, marchese di Val Dora (1809-1896).

Era solo dopo l'unificazione dell'Italia che si manifestava quel fenomeno altamente singolare, costituito dallo straordinario rigoglio degli studi matematici nel nostro Paese, che doveva portare, in breve tempo, l'Italia ad occupare uno dei primissimi posti nel campo delle scienze matematiche.

È questo un fenomeno che, a mio avviso, dovrebbe essere argomento di approfonditi studi critici, atti a chiarire i motivi storici e sociali del suo sorprendente e meraviglioso verificarsi.

È spesso ricordato che l'Italia, dopo il 1870, nello spazio di un trentennio, raggiunse il primato fra le varie Nazioni nel campo della Geometria differenziale e della Geometria algebrica, primati che poi mantenne per lungo tempo. Viene, però, sovente dimenticato che, nello stesso intervallo di tempo, gli Scienziati del nostro Paese raggiunsero un altro primato, non meno importante, cioè quello nel campo della teoria matematica dell'elasticità, dando, in conseguenza, un formidabile impulso anche all'Analisi matematica ed, in particolare, alla teoria delle equazioni alle derivate parziali.

Ma procediamo con ordine.

Gabrio Piola, nato da famiglia patrizia milanese, si occupò, dapprima, di studi di Astronomia, dedicandosi poscia all'insegnamento privato ed avendo fra i suoi allievi anche quel Francesco Brioschi, che tanto poi doveva contribuire al risorgere degli studi matematici in Italia. È merito del Piola, studioso profondo della Meccanica analitica di Lagrange, l'aver per primo introdotte le componenti lagrangiane dello sforzo in un sistema continuo. Concetto poi ripreso, in modo più sistematico, dal Kirchhoff, tanto che, oggi, in tutte le trattazioni moderne di Meccanica del continuo e, specialmente (cosa strana) all'Estero, il tensore lagrangiano dello sforzo viene indicato come tensore di Piola-Kirchhoff.

Il Piola è sostanzialmente rimasto poco noto nel nostro Paese anche agli stessi matematici. Di lui così parlava, con lo stile del tempo, un tal Giovanni Veraladini che il 13 gennaio 1853 lo commemorò al Reale Istituto Lombardo, del quale il Piola era stato eletto membro e del quale fu anche Presidente: « Il Piola fu di gentili maniere, di facile discorso, inchinevole a compattare gli altrui difetti, schietto nel dire il suo parere, non mai inurbano nel sostenerlo: sebbene d'aspetto sano e rubicondo, pure non fu robusto e frequenti malattie lo travagliarono... Egli moriva, col nome del Signore sul labbro, il giorno 9 novembre del 1850... ».

Fra gli allievi del Piola, oltre al già menzionato Brioschi, bisogna ricordare Paolo Bassi (1798-1855), che non ha lasciato contributi scientifici apprezzabili, ma che fu fervente patriota e partecipò alle cinque giornate di Milano. Successe a Gabrio Casati quale podestà di Milano ed attese, con compostezza e dignità, all'ingrato compito di riconsegnare la città al vincitore Radetzky nell'agosto del 1848.

Se poco nota è la figura del Piola, un posto di primo piano, nella storia d'Italia del secolo scorso, occupa invece Luigi Federigo Menabrea. Ingegnere

ed ufficiale del genio dell'esercito sardo, insegnò all'Accademia militare di Torino (dove egli stesso era stato allievo di Giovanni Plana) e vi tenne corsi di Geometria descrittiva, Meccanica e Scienza delle Costruzioni. Svolse in seguito importanti incarichi militari anche in tempo di guerra, segnalandosi a Palestro e a Solferino ed organizzando gli assedi di Ancona, Capua e Gaeta, tanto da ottenere la medaglia d'oro e la promozione a tenente generale. Nel 1859 aveva diretto i lavori per l'allargamento della pianura fra la Dora e la Sesia, onde ritardare l'avanzata austriaca. In riconoscimento di ciò venne insignito del titolo di marchese di Val Dora.

Il Menabrea ebbe anche altissimi incarichi politici in Italia ed all'Estero e fu Presidente del Consiglio nel 1867. È singolare che, pur fra una così intensa attività militare e politica, non abbia trascurato gli studi. Il suo nome rimane legato al principio di minimo secondo cui il sistema di sforzi relativo alla configurazione di equilibrio di un solido elastico vincolato su parte del contorno ed assoggettato ad assegnate forze (di massa e superficiali) è quello che rende minima la differenza fra il lavoro di deformazione elastica ed il lavoro delle reazioni vincolari, quando come classe di sforzi ammissibili si consideri quella costituita dagli sforzi che equilibrano le forze di massa e le forze assegnate sulla parte del contorno non vincolata. Tale risultato, annunciato nel 1858, veniva definitivamente formulato in una Memoria dell'Accademia delle Scienze di Torino del 1871.

Ed è opportuno qui subito parlare di Carlo Alberto Castigliano (1847-1884) che, da provetto ingegnere qual'era, si rese conto, prima di ogni altro, della importanza del principio di Menabrea.

Il Castigliano ebbe vita breve (morì a 37 anni!) e non facile. Di modesta famiglia, dovè sottostare a gravi sacrifici per portare a termine gli studi, di Matematica prima e di Ingegneria poi. Lavorò come ingegnere alle ferrovie dell'alta Italia, ma coltivò sempre la ricerca scientifica. I suoi studi lo portarono a riformulare il principio di minimo di Menabrea, che oggi, a torto, alcuni autori chiamano « principio di Castigliano », ma, cosa più importante, seppe abilmente adoperarlo, mediante le equazioni variazionali che da esso si deducano, per la risoluzione di importanti problemi pratici di Ingegneria.

È significativo che i risultati di Castigliano vennero applicati per la costruzione di diversi ponti non solo ferroviari, ma anche stradali. Ricordiamo fra tutti il ponte in ferro costruito sul torrente Cellina a Montereale del Friuli, di ben 83 metri di luce; opera che per la tecnologia del tempo era di vera avanguardia.

All'opera di Menabrea e di Castigliano si ricollega, in tempi posteriori, quella di Luigi Donati (1846-1932) che fu professore alle Scuole di Ingegneria di Milano e Bologna e qui insegnò anche Fisica matematica nella Università.

Spetta a lui il merito di avere enunciato il teorema di minimo, considerato da Menabrea e da Castigliano solo per particolari sistemi elastici interessanti la tecnica, per un generale solido elastico.

Recentemente il Gurtin, nella sua Monografia sull'Elasticità, apparsa sullo *Handbuch der Physik*, ha osservato che le equazioni di compatibilità degli sforzi (costituenti le analoghe per questi delle equazioni di compatibilità di Saint-Venant per le deformazioni), equazioni che vengono universalmente attribuite a Beltrami nel caso di forze di massa nulle (1892) ed al Michell nel caso generale (1900) erano, per quanto riguarda questo caso, già note al Donati fin dal 1894.

Tornando ai principi di minimo, occorre fare qualche breve considerazione. Essi hanno avuto ed hanno un'importanza capitale in tutta la filosofia naturale. Da un punto di vista strettamente filosofico esprimono la « tendenza all'economia » che ha la natura nell'amministrare i suoi fenomeni. Questo appare evidente dall'enunciato, dianzi riportato, del principio di Menabrea, ma appare anche, e in modo forse più suggestivo, dall'altro importante principio di minimo che regge i fenomeni della statica elastica: il principio secondo cui fra tutte le possibili deformazioni di un corpo elastico, compatibili con i vincoli, cui questo è sottoposto, quella che porta il corpo nella sua configurazione di equilibrio è quella che fa spendere il minimo dell'energia potenziale posseduta dal corpo stesso.

Dal punto di vista matematico l'indagine dei principi di minimo ha aperto uno dei capitoli più importanti e rigogliosi di tutta l'Analisi matematica, cioè il Calcolo delle Variazioni, dove vengono soprattutto studiate le sottilissime questioni relative ai problemi cosiddetti di esistenza, i quali, dominio esclusivo dei matematici puri fino a ieri, cominciano oggi ad interessare anche gli Scienziati applicati.

Infine, dal punto di vista pratico, i principi di minimo forniscono, come l'esempio luminoso di Castigliano dimostra, efficaci metodi per la risoluzione pratica dei problemi in istudio.

Se Piola, Menabrea e Castigliano avevano svolto la loro attività fuori dall'ambiente universitario, è l'Università, dopo l'unificazione d'Italia, che diviene il centro propulsore della ricerca scientifica.

In particolare la Matematica, sotto la spinta di Francesco Brioschi, Enrico Betti, Eugenio Beltrami, Felice Casorati e Luigi Cremona ricevè, come già dissi, un impulso formidabile che, nel volgere di pochi anni, allineò l'Italia in uno dei primissimi posti, fra i Paesi di tutto il mondo, in questo campo.

Ed occorre aggiungere che l'opera dei predetti per il rilancio della Matematica italiana non fu da essi svolta soltanto quale cattedratici, ma anche come uomini politici. Infatti, lo statuto costituzionale dell'Italia di allora concepiva il Senato come una Camera Alta della quale, per designazione sovrana, entravano a far parte quei cittadini che nel Paese si erano resi illustri con le loro opere.

Due, fra i matematici testè citati, dovevano recare fondamentali contributi alla teoria matematica dell'elasticità: Eugenio Beltrami e, specialmente, Enrico Betti.

Il Betti, nato a Padova nel 1823, partecipò da giovane alla guerra d'indipendenza italiana e combatté a Curtatone e Montanara nel battaglione universitario toscano, comandato dal matematico Ottaviano Fabrizio Mossotti. E proprio al Mossotti Enrico Betti succedette, nel 1857, nella cattedra di Fisica matematica a Pisa, cattedra che egli poi tenne fino alla morte, avvenuta nel 1892.

Fu eletto deputato al Parlamento italiano e successivamente venne, nel 1884, nominato Senatore del Regno. Sarebbe qui impossibile riferire su tutta la produzione scientifica del Betti, multiforme e complessa, che abbraccia l'Algebra, la Topologia, la Teoria dell'elasticità, quella del potenziale e diversi altri argomenti. Mi limiterò qui solo a parlare, come il tema che sto trattando richiede, dei suoi contributi all'Elasticità.

Il nome di Betti è soprattutto legato al celebre *teorema di reciprocità*, il quale afferma che, se un solido elastico è assoggettato a due diversi sistemi di forze (ciascuno di essi costituito da forze di massa e forze superficiali), il lavoro eseguito dal primo sistema, rispetto agli spostamenti relativi al secondo, eguaglia il lavoro del secondo rispetto agli spostamenti relativi al primo.

Questo teorema, che oggi è incluso nei generali teoremi cosiddetti di Green, per i sistemi lineari alle derivate parziali, contiene in sé tutta la teoria lineare della statica elastica, come la moderna teoria delle equazioni alle derivate parziali ha posto in luce.

Infatti, da questo teorema possono trarsi, non solo i teoremi di esistenza e unicità per i vari problemi che interessano l'Elasticità lineare, ma altresì, come ha mostrato Mauro Picone, metodi per il calcolo effettivo delle soluzioni. Lo stesso Betti impiegò il suo teorema di reciprocità per estendere all'Elasticità il metodo di integrazione, cosiddetto di Green, già impiegato nel classico problema di Dirichlet della teoria del potenziale. Senza nulla togliere alla grandezza dell'opera di Betti, dobbiamo dire che tale metodo, e nella teoria del potenziale ed in quella della elasticità, oggi, da una critica più approfondita, viene riconosciuto puramente formale.

Infatti, i cosiddetti « problemi ausiliari », che i metodi di integrazione di Green e di Betti richiedono, ai fini della loro applicazione, di considerare come risolti, sono, come è stato in seguito dimostrato, perfettamente equivalenti ai problemi iniziali. Né il fatto che i problemi ausiliari siano risolvibili in taluni casi particolari può far ritenere veri metodi risolutivi quelli di Green e di Betti, dato che, in questi stessi casi particolari, il problema inizialmente posto si può risolvere direttamente, senza passare attraverso la costruzione di soluzioni ausiliarie.

Ma si sa che il pensiero scientifico non esce come Minerva dal cervello di Giove, già armata di tutto punto: esso segue spesso strade tortuose, le quali, a volte, conducono bensì in vicoli ciechi, ma servono a far acquistare agli studiosi quella esperienza che, in seguito, permetterà di riconoscere la giusta via verso la verità.

Ed è indubbio che l'opera di Betti e dei molti che lo seguirono nell'applicare i suoi procedimenti è così ricca di risorse analitiche, ingegnosi artifici, abili algoritmi, che, pur sempre, rimane un imprescindibile bagaglio di esperienze e cognizioni nella teoria dell'elasticità e nell'Analisi.

Anche se non connesso al nostro tema d'oggi, non posso cessare di parlare di Enrico Betti senza accennare alla scoperta, a lui dovuta, di quei famosi numeri, oggi universalmente noti in Topologia come *numeri di Betti*, quei numeri cioè che, per ogni complesso pluridimensionale, indicano gli ordini di connessione delle varie dimensioni.

Il nome di Betti, e per il suo teorema di reciprocità e per la scoperta dei numeri di Betti (due argomenti fra loro estremamente distanti) rimarrà per sempre fra quelli dei grandi matematici.

Matematico non meno grande del Betti fu Eugenio Beltrami, cremonese, nato nel 1835. Beltrami ebbe giovinezza difficile. Per motivi politici fu espulso dal Collegio Ghislieri, a Pavia, nella cui Università frequentava i corsi di Matematica. Successivamente, nel 1859, per ragioni analoghe, perdette un posto, in verità modesto, che aveva ottenuto presso le ferrovie del Lombardo-Veneto.

Ma, come disse Luigi Cremona nella commemorazione linecea di Beltrami: «...la fortuna sua si trovò d'accordo con quella d'Italia: pochi mesi dopo il cannone di Magenta rese libera la Lombardia ».

Con l'acquistata libertà, il Beltrami poté, dietro l'incitamento del Brioschi, che era stato suo professore a Pavia, dedicarsi agli studi di Matematica e nel 1862 divenne professore di Algebra complementare a Bologna.

Passò ordinario di Geodesia a Pisa l'anno successivo. Ritornò a Bologna nel 1866 alla cattedra di Meccanica razionale. Dopo aver insegnato a Roma ed a Pavia, ritornò definitivamente a Roma nel 1891 per occuparvi la cattedra di Fisica matematica.

Nel 1898, ormai Scienziato di riconosciuta fama, succedette a Francesco Brioschi nella presidenza dell'Accademia dei Lincei e fu, durante l'ultimo anno della sua vita, nominato Senatore del Regno. Morì nel 1900.

L'opera di Beltrami abbraccia moltissimi campi della Matematica allora nota: la Geometria analitica, l'Analisi matematica, la Meccanica dei fluidi, la Meccanica generale, l'Elasticità, la Teoria del potenziale, la Teoria del calore, l'Acustica.

Ma il suo nome rimarrà, soprattutto, immortale per essere egli stato il fondatore di quella grande Scuola di Geometria differenziale, vanto della Matematica italiana che, in seguito, doveva avere in Luigi Bianchi, Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita i suoi massimi esponenti. Ad essa degnamente appartennero, mi piace qui ricordarlo, i palermitani Pietro Tortorici, Pasquale e Renato Calapso e, per certi suoi lavori giovanili, anche Mauro Picone.

Il contributo di Beltrami alla teoria dell'elasticità è fortemente influenzato dalla sua potente visione di geometra differenzialista. Egli scoprì che le equazioni generali dell'Elasticità in coordinate curvilinee, date dal Lamé, sono vincolate alla struttura euclidea dello spazio. Si adoperò, allora, con successo, per estendere le stesse equazioni a spazi a curvatura costante, fornendo, contemporaneamente al Clifford, anche se non con la stessa incisività, uno dei primissimi saggi di impiego di spazi non euclidei in problemi fisici e percorrendo in ciò quegli sviluppi che, in seguito, con l'opera di Alberto Einstein, dovevano assumere aspetti tanto sbalorditivi.

Fra i contributi di Beltrami all'Elasticità non può non essere ricordata la prima rigorosa dimostrazione, a lui dovuta, della sufficienza delle condizioni di compatibilità di Saint-Venant per le deformazioni, nonché la soluzione generale delle equazioni dell'equilibrio di un sistema continuo, avente per incognite gli sforzi, soluzione che, per lungo tempo, fu in seguito erroneamente attribuita ad altri.

Fra gli allievi della Scuola di Pisa, dove Beltrami e, assai più a lungo, Betti avevano insegnato, occorre ricordare, per quanto concerne lo studio delle condizioni di compatibilità di Saint-Venant, Ernesto Padova (1845-1896) che fu professore di Meccanica razionale a Padova, dove ebbe come allievo Tullio Levi-Civita.

Malgrado la morte prematura, ha lasciato qualche risultato nel campo della Fisica matematica, ove fu tra i primi a trattare il problema della stabilità del movimento.

All'opera di Betti è fortemente ispirata la produzione scientifica del piemontese Valentino Cerruti, nato nel biellese nel 1850. Compiuti gli studi a Torino, dove fu condiscipolo ed amico di Alberto Castigliano, venne a Roma come istitutore dei figli di Quintino Sella, con il quale il Cerruti rimase poi in rapporto di devota amicizia per tutta la vita.

A Roma si fece ben volere e stimare da Luigi Cremona, che aveva appena creato, nella capitale, la Scuola d'applicazione per gli Ingegneri. Divenuto professore nel 1877, il Cerruti succedette a Cremona, dopo la sua morte, nella direzione della Scuola. Ebbe molti ed elevati uffici pubblici, fu più volte Rettore della Università di Roma e, nominato Senatore nel 1901, si fece promotore di importanti leggi, fra cui quella relativa al Politecnico di Torino.

La sua attività scientifica si svolse principalmente nell'ambito della teoria dell'elasticità, dove studiò ed estese in varie direzioni il metodo d'integrazione di Betti (detto poi da alcuni autori di Betti-Cerruti).

Purtroppo, il suo tentativo di studiare con tale metodo anche i problemi dinamici doveva fallire a causa di una grave menda che gli impedì di pervenire alla soluzione corretta, trovata in seguito da Kirchhoff.

Se la produzione del Cerruti era stata essenzialmente dedicata alla teoria dell'elasticità, questa solo marginalmente interviene in quella di Giacinto Morera, novarese, nato nel 1865 e morto prematuramente a Torino nel 1909. Egli insegnò Meccanica razionale a Genova, dove fu anche Rettore e, successivamente, a Torino. Morera ebbe vasta cultura ed è ricordato in Elasticità per avere studiato, prima del Beltrami, il problema consistente nel fornire la più generale soluzione delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un sistema continuo con incognite gli sforzi.

Ma la figura di Morera è specialmente interessante per le sue caratteristiche di Scienziato. Non dotato di un'eccezionale forza inventiva, fu però uno straordinario lavoratore. Si teneva costantemente informato dei progressi che si andavano compiendo nei campi da lui coltivati ed interpretava la ricerca scientifica come una vera professione.

Egli è un luminoso esempio di come una dote morale, cioè la serietà professionale, possa coesistere ed anzi a volte surrogare le doti naturali costituite dalla fantasia e dalla genialità.

È significativo il fatto che Morera, pur con le sue limitazioni, abbia lasciato per sempre il suo nome accanto a quello del sommo Cauchy nella teoria delle funzioni di variabile complessa, con il celebre teorema (noto oggi come il teorema di Morera) che inverte quello del grande analista francese.

Matematico che appartenne alla generazione immediatamente successiva a quella di Betti e Beltrami e Scienziato di statura paragonabile a quella di questi due grandi, fu Ernesto Cesàro.

Nato a Napoli nel 1859, ebbe una giovinezza difficile. Dopo i disastri finanziari della famiglia, peregrinò in Belgio ed in Francia. Fece studi irregolari e, tuttavia, pur senza mai esser riuscito a conseguire una laurea, ottenne nel 1886 la cattedra di Analisi algebrica a Palermo. Nel 1891 passò a quella di Calcolo infinitesimale a Napoli. Era stato chiamato a Bologna quale professore di Meccanica razionale, allorché, nel 1906, moriva tragicamente a Torre Annunziata nel vano tentativo di strappare alla morte un figlio, che annegava mentre si bagnava nel mare in tempesta.

La produzione di Cesàro, vastissima malgrado la prematura morte (oltre 250 lavori e diversi trattati) abbraccia uno spettro amplissimo del campo delle matematiche: la Teoria dei numeri, l'Algebra, l'Analisi infinitesimale (ove è celebre il suo metodo di sommazione delle serie), la Geometria intrinseca, la Geometria non euclidea, l'Aritmetica asintotica, la Teoria dell'elasticità, l'Idrodinamica. Anche la sua figura morale fu altamente apprezzabile. Scrive di lui il Del Pezzo: « A tutte le straordinarie doti dell'ingegno univa quella rarissima di un carattere adamantino. Refrattario alle piccole transazioni, che si impongono nella vita pratica, stava diritto, fermo come torre, portando con sé le sue convinzioni, la sua indole indomabile, che pur gli procurò molti dispiaceri ».

Il suo contributo all'Elasticità, ancorchè costituisca solo una piccola parte della sua produzione, porta il sigillo del suo grande talento matematico.

In questo campo va specialmente ricordata la splendida Monografia che egli scrisse nel 1893. Opera che manifesta appieno la profondità di pensiero dell'Autore. Al Cesàro non era certo sfuggita l'importanza degli studi che il Beltrami ed il Clifford avevano compiuto sull'impiego nella Fisica di spazi più generali di quelli euclidei. Egli, dando prova della sua eccezionale percezione scientifica, così conclude la sua Monografia:

« L'ulteriore svolgimento della teoria dei mezzi elastici negli spazi curvi permetterà forse di rispondere alla domanda di Clifford: *se non potrebbe darsi che noi considerassimo come variazioni fisiche certi effetti realmente dovuti a cambiamenti della curvatura nel nostro spazio; in altre parole, se alcune delle cause che noi chiamiamo fisiche, e forse tutte, non fossero per avventura dovute alla costituzione geometrica dello spazio nel quale viviamo* ».

Clifford aveva formulato questa congettura nel 1875; esattamente trenta anni prima che Einstein pubblicasse i principi della sua teoria della relatività ristretta e 41 anni prima che apparisse la celebre Memoria del sommo Scienziato tedesco sui fondamenti della teoria di relatività generale, che, sostanzialmente, dava risposta affermativa alla domanda di Clifford.

Il Cesàro aveva capito quale grande presagio fosse in quella domanda racchiuso!

La Fisica matematica, intesa nel suo significato più classico ed, in particolare, la Teoria dell'elasticità, raggiungono il massimo splendore in Italia con Vito Volterra e Carlo Somigliana, nati entrambi nel 1860, ad Ancona il primo, a Como il secondo.

Volterra è considerato uno dei maggiori Scienziati italiani di tutti i tempi. Allievo della Scuola Normale Superiore di Pisa, fu poi assistente del Betti. Divenne professore di Meccanica razionale in quella Università nel 1883, a soli 23 anni. Passò a Torino nel 1893 e nel 1900 fu chiamato a Roma come successore del Beltrami. Nominato Senatore, svolse un'intensa attività parlamentare per favorire il progresso degli studi scientifici in Italia. Fu Presidente dell'Accademia dei Lincei e membro delle maggiori Accademie di tutto il mondo. Volontario, a 55 anni, nella guerra del 15-18, fu, quale ufficiale del Genio, addetto all'impiego bellico dei dirigibili e recò in questa attività il contributo del suo incomparabile talento scientifico. Fra l'altro, fu egli il primo a suggerire l'impiego del gas elio per quegli aeromobili.

Meritò la Croce al merito di guerra per il freddo coraggio dimostrato in rischiosissime operazioni. Ma non minore coraggio Volterra dimostrò in seguito, nell'opporvi alla dittatura fascista.

Assieme a Benedetto Croce ed a Francesco Ruffini, guidò quel piccolo gruppo di Senatori che, irriducibilmente, in prima persona, si opposero al fascismo.

Fu uno dei 12 professori universitari che nel 1931 vennero allontanati dalla cattedra, non avendo voluto giurare fedeltà al fascismo.

Nel 1935 veniva radiato anche dall'Accademia dei Lincei, che egli aveva presieduto ed il cui prestigio egli aveva rilanciato in tutto il mondo scientifico: si era rifiutato, assieme ad altri 9 accademici, di prestare il giuramento fascista che era stato imposto ai Soci dell'Accademia.

Volterra morì l'11 ottobre del 1940, nell'isolamento della sua casa di Roma, isolamento ancora più completo dopo le leggi razziali fasciste emanate nel 1938.

Di lui così disse Carlo Somigliana il 30 novembre 1941, nell'unica commemorazione che, allora, si tenne in Italia, presso l'Accademia pontificia:

« Vito Volterra è una delle grandi figure della Scienza che onorano il Paese dove sorgono, che onorano la generazione alla quale appartengono. Le sue ricerche, i risultati raggiunti, le grandi teorie da lui create restano come pietre miliari sulla strada maestra della Scienza mondiale ».

Parlare dell'opera di Volterra in breve tempo è impresa impossibile ed è anche difficile riassumere i suoi contributi all'Elasticità, campo nel quale egli ha, a mio avviso, lasciato l'orma più profonda.

Mi limiterò qui solo a ricordare la teoria delle « distorsioni » nei corpi elastici e la teoria dei « fenomeni ereditari ».

La prima, originata da un'osservazione del Weingarten, riguarda quelle deformazioni dei corpi elastici non prodotte da forze esterne, ma dovute a discontinuità degli spostamenti elastici su certe superficie e che, dal punto di vista fisico, corrispondono a infiltrazioni o sottrazioni di materia in strati sottilissimi lungo quelle superficie.

Si consideri, ad esempio, un solido elastico avente la forma di un anello circolare, cioè del solido generato da un disco che ruota di un giro completo attorno ad una retta del suo piano ad esso esterna; si immagini di tagliare il solido lungo un disco generatore, di togliere o di aggiungere lungo tutto il disco un sottile strato di materia e di rinsaldare quindi il solido là dove si era operato il taglio. Il solido così ricomposto sarà assoggettato a tensioni interne, pur senza che su di esso agisca alcuna forza esterna. È questo un tipico esempio di distorsione.

Questi fenomeni vennero da Volterra studiati nei corpi a connessione lineare multipla (quale appunto l'anello circolare), per i quali egli interpretò il significato fisico delle soluzioni polidrome delle equazioni dell'Elasticità e stabilì suggestive analogie con i problemi idrodinamici, e precisamente con il fenomeno secondo cui l'esistenza di moti irrotazionali, cioè senza vortici di un fluido è possibile solo se il campo del moto è a connessione lineare multipla.

La teoria delle distorsioni di Volterra, che in seguito il Love tradusse in inglese con la parola « dislocations », è stata confermata da numerose esperienze

di laboratorio, le prime delle quali sollecitate dallo stesso Volterra. Essa è oggi una delle teorie più studiate, specie all'Estero. Notevoli sono le sue connessioni con le applicazioni ai problemi tecnici.

Il Boltzmann, in alcune Note apparse fra il 1874 ed il 1878, aveva considerato corpi elastici « dotati di memoria », cioè tali che le deformazioni che essi subiscono non dipendono solo dalle forze che, nel momento, sollecitano il corpo, ma anche dalla « storia precedente del corpo », cioè dagli sforzi cui il corpo ha dovuto sottostare durante tutto il suo passato.

Tale assunzione, che per certi materiali è proprio dettata dalle esigenze applicative, corrisponde ai cosiddetti fenomeni di « isteresi elastica » e conduce ad un'impostazione matematica più complessa, rispetto a quella classica, dato che le equazioni che bisogna risolvere non sono più soltanto differenziali, ma bensì integro-differenziali.

Volterra, con una Nota lineare del 1909 e con una serie di pubblicazioni successive, poneva i fondamenti analitici di una teoria ereditaria dell'Elasticità cioè per corpi elastici le cui deformazioni risentono di tutto il passato.

Naturalmente, esistono corpi con lunga memoria e corpi con corta memoria. Volterra, umoristicamente, soleva dire che ha una memoria di acciaio lo stucco, che ricorda tutto; mentre l'acciaio, specie se di buona qualità, è molto smemorato.

I suoi risultati analitici, bisogna dirlo, si appoggiano su un'ipotesi la quale permette di trattare esaurientemente solo quei materiali che tutto hanno dimenticato prima di un certo istante, a partire dal quale, invece, ricordano tutto.

Recentemente, la teoria dell'elasticità ereditaria, ribattezzata con il nome di Visco-elasticità, ha avuto un grande rilancio e si è cercato di dare forma analitica al fenomeno del « fading memory », cioè dello svanire della memoria al trascorrere del tempo. Tuttavia, i problemi relativi ai corpi con memoria lunga sono, ancora oggi, insoluti, a causa delle enormi difficoltà analitiche che essi presentano.

Carlo Somigliana, nato da nobile famiglia, coetaneo e condiscipolo a Pisa di Vito Volterra, discendeva per parte della madre, Teresa Volta, dal grande fisico comasco Alessandro.

Fu allievo a Pisa di Betti e Beltrami e l'influenza di questi Maestri, nonché la vicinanza del Volterra, lo spinsero verso la Fisica matematica, che insegnò prima a Pavia, dal 1892 al 1904 e successivamente a Torino, dove fu professore fino al 1935, data del suo collocamento a riposo. Morì nel 1955, all'età di novantacinque anni.

L'opera di Carlo Somigliana abbraccia quasi tutta la Fisica matematica classica e si estende alla Geodesia, alla Geofisica, alla Glaciologia, ma è il campo dell'Elasticità quello nel quale egli ha portato i suoi contributi preponderanti.

Sarebbe qui impossibile parlare di tutti i risultati dovuti a Somigliana nella teoria dell'elasticità. Mi limiterò a ricordare le sue ricerche sulla rappresentazione