

Alexander Zivex

OPERE MATEMATICHE

DI

EUGENIO BELTRAMI

PUBBLICATE PER CURA

DELLA

FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA R. UNIVERSITÀ DI ROMA.

TOMO QUARTO

ED ULTIMO.



ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

—
1920

LXXXII.

SULL'INTERPRETAZIONE MECCANICA DELLE FORMOLE DI MAXWELL.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VII (1886), pp. 1-38.

La ricerca che forma l'oggetto della presente Memoria si riferisce essenzialmente a quelle stesse formole che sono state da me studiate, sotto un altro punto di vista, nella Memoria che ebbi l'onore di presentare lo scorso anno a cotesta Illustre Accademia *). Alludo alle formole colle quali MAXWELL definisce il sistema delle pressioni che sono atte a generare, in un mezzo elastico, lo stesso campo di forza che ordinariamente si considera come rappresentato da una funzione potenziale newtoniana.

Queste formole, che riproduco cogli stessi simboli già usati nella precedente Memoria, sono le seguenti:

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \Delta_1 V, \quad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z}, \\ Y_y = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \Delta_1 V, \quad Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ Z_z = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} \Delta_1 V, \quad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}; \\ \Delta_1 V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2; \end{array} \right.$$

*) *Sull'uso delle coordinate curvilinee nelle teorie del potenziale e dell'elasticità* [Memorie della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, serie IV, tomo VI (1885), pp. 401-448; oppure queste OPERE, vol. IV, pp. 136-179].

dove V è la funzione potenziale newtoniana che si considera, e dove le componenti di pressione X_x , X_y , etc. sono simboleggiate giusta la segnatura di KIRCHHOFF, convenendo, cioè, di rappresentare con X_n , Y_n , Z_n le componenti, secondo i tre assi ortogonali x , y , z , della pressione unitaria esercitata sopra un elemento piano di normale n .

Ecco ora la questione che mi propongo di trattare e che parmi debba presentarsi naturalmente a chiunque rifletta al significato che si attribuisce, nella teoria dell'elasticità, alle pressioni o tensioni che si verificano in un mezzo elastico. Si prescinda da ogni preconconcetto intorno ad una possibile correlazione fisica fra le cosiddette azioni a distanza e le pressioni o tensioni definite dalle formole di MAXWELL, e si considerino queste pressioni o tensioni come semplicemente generate, nel seno di un mezzo elastico, da una leggiera deformazione di questo, cioè da un leggiero spostamento di ognuno dei suoi punti (relativamente ad uno stato di iniziale equilibrio). Guardando la cosa sotto questo aspetto, è naturale il domandare: esiste veramente una deformazione capace di generare quelle pressioni, e, se esiste, quali sono le componenti dello spostamento d'ogni punto del mezzo?

Per rispondere a queste domande, bisogna innanzi tutto stabilire alcunchè circa la natura del mezzo elastico nel quale si suppongono generate le pressioni e tensioni definite dalle formole di MAXWELL. Dal punto di vista puramente matematico si potrebbe esigere che la costituzione del mezzo non fosse vincolata da altra condizione che da quella della continuità: ma per evitare le prolissità di una ricerca tanto generale ed astratta, io supporrò che si tratti semplicemente di un mezzo omogeneo ed isotropo, ammettendo tuttavia che le costanti d'isotropia possano essere diverse nelle regioni dello spazio che si trovano in condizioni differenti rispetto alla distribuzione delle masse potenzianti, cioè delle masse che concorrono alla formazione della funzione potenziale. Se non che, per evitare di nuovo una generalità teoricamente giustificabile, ma praticamente oziosa, conviene in corrispondenza ammettere che, se alla formazione di questa funzione potenziale concorrono masse estese in tre dimensioni, queste sieno di densità costante, come costante è la densità di un mezzo isotropo ordinario. Del resto questa restrizione ha poca importanza rispetto alla teoria fisica nella quale si sono presentate le formole di MAXWELL, poichè in essa non figurano, di regola, che funzioni potenziali di superficie.

Così circoscritto il problema, è possibile intraprenderne la trattazione matematica ed è appunto tale trattazione che forma l'argomento del presente lavoro. Le conclusioni del quale sono quasi interamente negative, poichè esse stabiliscono che, in un vero mezzo isotropo, non si possono attuare deformazioni capaci di riprodurre il sistema delle pressioni definite dalle formole di MAXWELL se non quando la funzione potenziale è lineare rispetto alle coordinate; il qual caso particolarissimo, non solo è destituito di qualsivoglia interesse, ma non può neppure verificarsi quando lo spazio che si considera

è infinito. Volendo sfuggire alla necessità di attribuire alla funzione potenziale questa forma così particolare e non sempre ammissibile, bisogna concedere l'esistenza di un mezzo isotropo *sui generis*, le proprietà del quale non rispondono a veruna realtà fin qui conosciuta. Per concepire la natura di un tal mezzo, conviene rammentare che il potenziale elementare d'elasticità di un mezzo isotropo propriamente detto, assunto sotto la forma opportunamente adottata da GREEN, consta di due parti ben distinte, le quali si possono in tal qual modo riguardare come i distinti potenziali d'elasticità di due mezzi essenzialmente diversi ed irreducibili, dalla cui combinazione in vario rapporto risulta ogni mezzo isotropo ordinariamente considerato *). Al primo di questi mezzi corrisponde un'entità reale ben nota, giacchè le sue proprietà collimano appunto con quelle degli ordinari fluidi elastici, nei quali non si trasmettono che ondulazioni longitudinali. Al secondo invece, nel quale non si trasmetterebbero che ondulazioni trasversali, non corrisponde, nè probabilmente può corrispondere, veruna entità conosciuta, giacchè, a tacer d'altro, non si verificano generalmente in esso le condizioni della stabilità dell'equilibrio. Ora egli è appunto ammettendo l'esistenza di questo secondo mezzo che, giusta l'analisi qui appresso esposta, sembra a prima giunta possibile di spingere più oltre l'indagine delle deformazioni, negli spazi vuoti di masse potenzianti. Senonchè l'ulteriore svolgimento di tale analisi mostra che, almeno nello spazio infinito che circonda le masse, le deformazioni non sono di nuovo possibili che quando la funzione potenziale abbia quella forma semplicissima che essa prenderebbe se tutte le masse fossero raccolte in un punto fisso, del resto arbitrario. È dunque lecito affermare che, data ad arbitrio una funzione potenziale, non è generalmente possibile riprodurre il sistema delle pressioni definite dalle formole di MAXWELL mediante le deformazioni di un mezzo isotropo.

Mi sono indotto, non senza qualche esitazione, a fare di pubblica ragione questi risultati, non già per sollevare obiezioni contro la dottrina di MAXWELL, ma per mostrare la necessità di indagarne per altre vie l'interpretazione meccanica.

§ 1.

Denotiamo, come di consueto, con u , v , w le componenti dello spostamento d'un punto qualunque (x, y, z) del mezzo elastico e poniamo

*) Secondo la teoria molecolare questo rapporto sarebbe sempre di 3 ad 1 e secondo WERTHEIM di 4 ad 1.

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, & \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \beta = \frac{\partial v}{\partial y}, & \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, & \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma, \\ \gamma = \frac{\partial w}{\partial z}; & \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \end{cases}$$

cioè designamo con $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ le note componenti di deformazione del mezzo nel punto (x, y, z) e con ε la dilatazione cubica. Assumiamo poscia, nell'ammessa ipotesi dell'isotropia, il potenziale d'elasticità sotto la forma

$$(2_a) \quad \Phi = \frac{1}{2} [A\varepsilon^2 + B(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 4\beta\gamma - 4\gamma\alpha - 4\alpha\beta)],$$

dove A e B sono le costanti d'isotropia, introdotte nella maniera usata da GREEN e proporzionali rispettivamente ai quadrati delle velocità di propagazione delle onde longitudinali e delle onde trasversali. Affinchè lo stato iniziale del mezzo, cioè quello nel quale le tre funzioni u, v, w sono nulle in ogni punto, sia un vero stato d'equilibrio stabile, bisogna e basta che queste due costanti A e B sieno soggetto alle limitazioni

$$(2_b) \quad B > 0, \quad 3A - 4B > 0,$$

soddisfatte le quali la funzione Φ non solo si mantiene costantemente *positiva*, per qualunque deformazione propriamente detta, ma si annulla solamente quando *tutte* le componenti di deformazione sieno separatamente nulle.

Le componenti di pressione

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z, \quad Z_x, \quad X_y,$$

dovute alla deformazione di componenti

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda, \quad \mu, \quad \nu,$$

sono, come è noto, le derivate negative del potenziale Φ rispetto a queste ultime componenti, epperò son date da

$$X_x = 2B(\beta + \gamma) - A\varepsilon, \quad Y_z = -B\lambda,$$

$$Y_y = 2B(\gamma + \alpha) - A\varepsilon, \quad Z_x = -B\mu,$$

$$Z_z = 2B(\alpha + \beta) - A\varepsilon; \quad X_y = -B\nu.$$

Di qui, ponendo per un momento

$$P = X_x + Y_y + Z_z,$$

si ricava

$$P = -(3A - 4B)\varpi,$$

epperò si hanno facilmente le formole reciproche

$$\alpha = \frac{1}{2B} \left(\frac{A-2B}{3A-4B} P - X_x \right), \quad \lambda = -\frac{1}{B} Y_z,$$

$$\beta = \frac{1}{2B} \left(\frac{A-2B}{3A-4B} P - Y_y \right), \quad \mu = -\frac{1}{B} Z_x,$$

$$\gamma = \frac{1}{2B} \left(\frac{A-2B}{3A-4B} P - Z_z \right); \quad \nu = -\frac{1}{B} X_y.$$

Sostituendo in queste formole i valori (1), dopo avere osservato che da questi risulta

$$P = \frac{\Delta_1 V}{8\pi},$$

si ottengono le espressioni seguenti delle α , β , γ , λ , μ , ν per mezzo di V :

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{8\pi B} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \frac{A-B}{3A-4B} \Delta_1 V \right], & \lambda = \frac{1}{4\pi B} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \beta = \frac{1}{8\pi B} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \frac{A-B}{3A-4B} \Delta_1 V \right], & \mu = \frac{1}{4\pi B} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \gamma = \frac{1}{8\pi B} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \frac{A-B}{3A-4B} \Delta_1 V \right]; & \nu = \frac{1}{4\pi B} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y}. \end{cases}$$

Tali sono quindi i valori delle sei componenti di deformazione di un mezzo isotropo, cui corrispondono le sei componenti di pressione che risultano dalla teoria di MAXWELL.

Dalle formole (3) si deduce

$$(3_a) \quad \varpi = -\frac{\Delta_1 V}{8\pi(3A-4B)},$$

$$(3_b) \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - 4\beta\gamma - 4\gamma\alpha - 4\alpha\beta = (A-B)(3A-5B) \left[\frac{\Delta_1 V}{4\pi B(3A-4B)} \right]^2;$$

epperò, sostituendo nell'espressione (2_a), si trova

$$(3_c) \quad \Phi = \frac{4A-5B}{2B(3A-4B)} \left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi} \right)^2.$$

Tale è quindi il valore particolare che assume il potenziale d'elasticità, quando le pressioni esistenti nel mezzo isotropo sieno quelle che abbiano dianzi accennate.

Ma affinchè ad un *dato* sistema di componenti di deformazione $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ corrisponda effettivamente un sistema di componenti di spostamento u, v, w , ossia, in altri termini, affinchè un *dato* sistema di funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ rappresenti una deformazione *possibile* del mezzo elastico, è necessario e sufficiente *) che sieno identicamente soddisfatte le sei equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial \lambda}, & 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \lambda^2} &= \frac{\partial^2 \mu}{\partial \lambda \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \lambda \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial y}; & 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial \lambda} \right). \end{aligned}$$

Affinchè dunque esista veramente una deformazione del mezzo, definita dalle sei componenti (3), bisogna e basta che la funzione V soddisfaccia alle sei condizioni seguenti, che risultano dalla sostituzione delle espressioni (3) di $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ nelle sei equazioni precedenti:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \lambda} \right)^2 \right] + C \left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial \lambda^2} \right) = 0, \\ & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} \right)^2 \right] + C \left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} \right) = 0, \\ & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + C \left(\frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} \right) = 0; \\ & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \lambda} \right] - C \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y \partial \lambda} = 0, \\ & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \lambda} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} \right] - C \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial \lambda \partial x} = 0, \\ & 2 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right] - C \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \right.$$

*) Per la dimostrazione della *sufficienza* di queste equazioni, veggasi la *Nota* in fine della presente Memoria.

dove per brevità si è posto

$$(4_a) \quad \frac{A - B}{3A - 4B} = C.$$

Questa costante C si può esprimere più brevemente con

$$(4_b) \quad C = \frac{B}{E},$$

dove E è il modulo d'elasticità del mezzo isotropo.

La soluzione del proposto problema è tutta contenuta nelle precedenti equazioni (4), che ora procediamo a studiare.

§ 2.

Per semplificare i calcoli che seguono, adottiamo primieramente le segnature seguenti:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \frac{\partial V}{\partial x} = a, & \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = e, & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = e', \\ \frac{\partial V}{\partial y} = b, & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f, & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = f', \\ \frac{\partial V}{\partial z} = c, & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = g, & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = g'. \end{array} \right.$$

Effettuando le derivazioni dell'espressione $\Delta_1 V$ si trovano in tal modo i valori seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} &= e^2 + f'^2 + g'^2 + a \frac{\partial e}{\partial x} + b \frac{\partial e}{\partial y} + c \frac{\partial e}{\partial z}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} &= f^2 + g'^2 + e'^2 + a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} + c \frac{\partial f}{\partial z}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z^2} &= g^2 + e'^2 + f'^2 + a \frac{\partial g}{\partial x} + b \frac{\partial g}{\partial y} + c \frac{\partial g}{\partial z}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y \partial z} &= f'g' + e'(f + g) + a \frac{\partial e'}{\partial x} + b \frac{\partial e'}{\partial y} + c \frac{\partial e'}{\partial z}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z \partial x} &= g'e' + f'(g + e) + a \frac{\partial f'}{\partial x} + b \frac{\partial f'}{\partial y} + c \frac{\partial f'}{\partial z}, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x \partial y} &= e'f' + g'(e + f) + a \frac{\partial g'}{\partial x} + b \frac{\partial g'}{\partial y} + c \frac{\partial g'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ma, ponendo

$$(5_a) \quad \left\{ \begin{array}{ll} fg - e'^2 = E, & f'g' - ee' = E', \\ ge - f'^2 = F, & g'e' - ff' = F', \\ ef - g'^2 = G; & e'f' - gg' = G'; \\ e + f + g = \theta, & E + F + G = \Theta, \end{array} \right.$$

si trova facilmente

$$(5_b) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^2 + f'^2 + g'^2 = E + \theta e - \Theta, & f'g' + e'(f + g) = E' + \theta e', \\ f^2 + g'^2 + e'^2 = F + \theta f - \Theta, & g'e' + f'(g + e) = F' + \theta f', \\ g^2 + e'^2 + f'^2 = G + \theta g - \Theta; & e'f' + g'(e + f) = G' + \theta g'. \end{array} \right.$$

Se finalmente si pone

$$(5_c) \quad a^2 + b^2 + c^2 = H^2,$$

si può scrivere

$$(5_d) \quad a = H \frac{\partial x}{\partial n}, \quad b = H \frac{\partial y}{\partial n}, \quad c = H \frac{\partial z}{\partial n},$$

dove n è la normale alla superficie di livello $V = \text{Cost.}$ che passa per il punto (x, y, z) , normale di cui non è necessario fissare il senso, il quale dipende dal segno che si attribuisce alla quantità

$$(5_e) \quad H = \sqrt{\Delta_1 V} = \frac{\partial V}{\partial n}.$$

In base a queste varie formole si ha

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x^2} = E + \theta e - \Theta + H \frac{\partial e}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y^2} = F + \theta f - \Theta + H \frac{\partial f}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z^2} = G + \theta g - \Theta + H \frac{\partial g}{\partial n}.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial y \partial z} = E' + \theta e' + H \frac{\partial e'}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial z \partial x} = F' + \theta f' + H \frac{\partial f'}{\partial n},$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta_1 V}{\partial x \partial y} = G' + \theta g' + H \frac{\partial g'}{\partial n};$$

e, facendo la sostituzione di queste espressioni e dei simboli (ζ_a) nelle equazioni (4), si trova che a queste può darsi la forma seguente:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1 - C)E = C \left(\theta e + H \frac{\partial e}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H \frac{\partial \theta}{\partial n} \right), \\ (1 - C)F = C \left(\theta f + H \frac{\partial f}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H \frac{\partial \theta}{\partial n} \right), \\ (1 - C)G = C \left(\theta g + H \frac{\partial g}{\partial n} + \Theta - \theta^2 - H \frac{\partial \theta}{\partial n} \right); \\ (1 - C)E' = C \left(\theta e' + H \frac{\partial e'}{\partial n} \right), \\ (1 - C)F' = C \left(\theta f' + H \frac{\partial f'}{\partial n} \right), \\ (1 - C)G' = C \left(\theta g' + H \frac{\partial g'}{\partial n} \right). \end{array} \right.$$

Sommando membro a membro le prime tre di queste equazioni si ottiene un risultato che può essere scritto nel modo seguente:

$$(6_a) \quad (1 - 4C)\Theta + 2C\theta^2 + 2CH \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0.$$

Ora osserviamo in primo luogo che, per le ipotesi fatte, la quantità θ , la quale non è altro che $\Delta_2 V$, non può essere eguale che allo zero o ad una costante: quindi in ogni caso

$$(6_b) \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0.$$

Inoltre, per i significati (ζ_a) di E, F, G, Θ si ha

$$2\Theta = (e + f + g)^2 - (e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2),$$

ossia

$$(6_c) \quad 2\Theta = \theta^2 - (e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2).$$

In virtù di queste equazioni (6_b) , (6_c) e del significato (4_a) della costante C , l'equazione (6_a) equivale a quest'altra

$$(6_d) \quad (3A - 4B)\theta^2 + A(e^2 + f^2 + g^2 + 2e'^2 + 2f'^2 + 2g'^2) = 0.$$

Ora finchè le costanti

$$3A - 4B, \quad A$$

sono amendue maggiori di zero, come è richiesto dalle due condizioni (2_b) , quest'equazione non può essere soddisfatta da una funzione *reale* V a meno che non si abbia, in ogni punto dello spazio considerato,

$$e = f = g = e' = f' = g' = 0,$$

cioè a meno che non sieno nulle tutte le derivate seconde della detta funzione, la quale non potrebbe avere, in questo caso, che la forma lineare

$$V = ax + by + cz + d,$$

dove a, b, c, d sono quattro costanti.

Se dunque si prescinde dai casi specialissimi in cui V può assumere questa forma, la quale, in particolare, non può mai convenire ad uno spazio infinito e non presenta d'altronde alcun interesse rispetto al problema d'elasticità, come quella che conduce a valori costanti per le componenti di pressione e per quelle di deformazione, bisogna necessariamente attribuire alle costanti d'isotropia valori inconciliabili colle condizioni (2_b) dell'equilibrio stabile del mezzo. In particolare, considerando lo spazio vuoto di masse potenzianti, cioè quello in cui la funzione θ soddisfa all'equazione $\theta = 0$, bisogna necessariamente supporre, per il mezzo isotropo che invade questo spazio,

$$(6_e) \quad A = 0, \quad B > 0.$$

La seconda di queste condizioni è imposta dalla forma che assume, per $A = 0$, l'espressione (3_e) del potenziale d'elasticità, ossia dell'energia di deformazione (riferita all'unità di volume), la quale diventa

$$(6_f) \quad \Phi = \frac{5}{8B} \left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi} \right)^2.$$

Le condizioni (6_e) sono in patente contraddizione colle (2_b) . Il mezzo definito da esse non può essere in equilibrio stabile rispetto a *tutte* le deformazioni possibili: tuttavia la natura dell'espressione (6_f) è tale che l'equilibrio è ancora stabile rispetto a quella special classe di deformazioni che noi stiamo di presente considerando, cioè a quelle che sono definite da formole del tipo (3) , in uno spazio nel quale la funzione V soddisfa all'equazione $\Delta_2 V = 0$. Un tal mezzo, se esistesse, avrebbe la proprietà di non trasmettere che vibrazioni trasversali. Per esso sarebbe eguale all'unità il noto coefficiente

$$(6_g) \quad \eta = \frac{A - 2B}{2(A - B)}$$

della contrazione alla dilatazione, cosicchè una porzione prismatica di tal mezzo, assoggettata ad una semplice estensione longitudinale, si contrarrebbe sempre in eguale rapporto nel senso trasversale.

§ 3.

Vediamo ora se, anche ammettendo l'esistenza del mezzo testè considerato, si possa conseguire in ogni caso la determinazione della deformazione corrispondente ad una data funzione potenziale V ; e, per evitare maggiori difficoltà, occupiamoci unicamente dello spazio infinito escluso dalle masse cui questa funzione potenziale appartiene, tanto più che è in questo spazio che si rende maggiormente plausibile la supposizione dell'esistenza di un mezzo isotropo.

Introducendo nelle equazioni (6) le condizioni

$$\Theta = 0, \quad A = 0,$$

donde

$$C = \frac{1}{4},$$

quelle equazioni si riducono alla seguente forma più semplice:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H \frac{\partial e}{\partial n} = 3E - \Theta, & H \frac{\partial e'}{\partial n} = 3E', \\ H \frac{\partial f}{\partial n} = 3F - \Theta, & H \frac{\partial f'}{\partial n} = 3F', \\ H \frac{\partial g}{\partial n} = 3G - \Theta; & H \frac{\partial g'}{\partial n} = 3G'. \end{array} \right.$$

Rappresentiamo con Δ il determinante delle derivate seconde di V , cioè poniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} e & g' & f' \\ g' & f & e' \\ f' & e' & g \end{vmatrix}$$

ed osserviamo che questo determinante può essere svolto in vari modi. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \Delta &= Ee + F'f' + G'g', \\ &= Ff + G'g' + E'e', \\ &= Gg + E'e' + F'f', \end{aligned}$$

e quindi anche

$$3\Delta = Ee + Ff + Gg + 2E'e' + 2F'f' + 2G'g';$$

combinando opportunamente fra loro queste diverse espressioni, si trovano queste altre:

$$(7_a) \quad \begin{cases} \Delta = Ff + Gg + 2E'e' - Ee, \\ = Gg + Ee + 2F'f' - Ff, \\ = Ee + Ff + 2G'g' - Gg. \end{cases}$$

Inoltre dalle note proprietà dello stesso determinante Δ scaturiscono tre coppie di identità del tipo

$$G'f' + F'e' + E'g = 0, \quad F'g' + E'f + Ge' = 0,$$

e, sommando membro a membro le due identità di ciascuna coppia, si hanno le tre formole

$$(7_b) \quad \begin{cases} F'g' + G'f' - Ee' - E'e + e'\Theta = 0, \\ G'e' + E'g' - Ff' - F'f + f'\Theta = 0, \\ E'f' + F'e' - Gg' - G'g + g'\Theta = 0. \end{cases}$$

Ciò premesso, derivando rispetto alla normale n le espressioni di E, F, G, E', F', G' date dalle formole (5_a) e sostituendo, nelle equazioni così ottenute, i valori delle derivate normali di e, f, g, e', f', g' dati dalle sei equazioni (7), si trovano, col-l'aiuto delle precedenti identità (7_a), (7_b), queste altre sei equazioni:

$$(7_c) \quad \begin{cases} H \frac{\partial E}{\partial n} = -2\Theta e - 3\Delta, & H \frac{\partial E'}{\partial n} = -2\Theta e', \\ H \frac{\partial F}{\partial n} = -2\Theta f - 3\Delta, & H \frac{\partial F'}{\partial n} = -2\Theta f', \\ H \frac{\partial G}{\partial n} = -2\Theta g - 3\Delta; & H \frac{\partial G'}{\partial n} = -2\Theta g', \end{cases}$$

le quali formano un sistema equivalente a quello delle equazioni (7).

Dalla somma delle prime tre di queste equazioni (7_c) si ricava

$$(7_d) \quad H \frac{\partial \Theta}{\partial n} = -9\Delta.$$

Finalmente, dalla derivazione rispetto alla normale di una qualunque delle precedenti espressioni del determinante Δ , e dalla sostituzione dei valori forniti dalle equazioni (7), (7_c) per le derivate normali di $e, f, g, e', f', g', E, F, G, E', F', G'$, si

deduce

$$(7_e) \quad H \frac{\partial \Delta}{\partial n} = 2 \Theta^2.$$

Eliminando H fra le due equazioni (7_d) , (7_e) si trova

$$\frac{\partial}{\partial n} (4 \Theta^3 + 27 \Delta^2) = 0,$$

epperò si conclude che l'espressione

$$4 \Theta^3 + 27 \Delta^2$$

è costante lungo il corso di ciascuna linea di forza. Ma quest'espressione si annulla in ogni punto a distanza infinita, dunque dev'essere sempre

$$(7_f) \quad 4 \Theta^3 + 27 \Delta^2 = 0.$$

Questa conclusione sussiste anche quando una parte soltanto delle linee di forza si protrae a distanza infinita, poichè per essere V una funzione la quale, nello spazio infinito in cui $\Delta, V = 0$, è continua e finita con tutte le sue derivate, ogni espressione formata colle derivate di questa funzione non può essere nulla in una regione di questo spazio senza essere tale anche in tutte le altre.

Il primo membro dell'equazione (7_f) è la notissima condizione dell'eguaglianza di due radici dell'equazione di 3° grado priva di secondo termine

$$s^3 + s \Theta - \Delta = 0,$$

dove s è l'incognita. Scrivendo quest'equazione sotto la forma

$$\Delta - (E + F + G)s + (e + f + g)s^2 - s^3 = 0,$$

si riconosce subito ch'essa equivale alla seguente:

$$\begin{vmatrix} e - s & g' & f' \\ g' & f - s & e' \\ f' & e' & g - s \end{vmatrix} = 0.$$

È noto che la condizione (7_f) dell'eguaglianza di due radici di quest'ultima equazione si scinde, nell'ipotesi della realtà, in più altre, le quali, come vedremo, sono quelle che conducono alla risoluzione del nostro problema. Ma noi preferiamo ottenere queste singole condizioni direttamente, giovandoci di una notevole proprietà del sistema d'equazioni (7) , la quale ora procediamo ad esporre.

§ 4.

Derivando ciascuna delle equazioni (7) rispetto alla normale n e sostituendo nei secondi membri delle equazioni che così si ottengono i valori delle derivate normali di $E, F, G, E', F', G', \Theta$ forniti dalle equazioni (7_c), (7_d), si trovano le seguenti sei nuove equazioni:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H \frac{\partial \left(H \frac{\partial e}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta e = 0, & H \frac{\partial \left(H \frac{\partial e'}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta e' = 0, \\ H \frac{\partial \left(H \frac{\partial f}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta f = 0, & H \frac{\partial \left(H \frac{\partial f'}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta f' = 0, \\ H \frac{\partial \left(H \frac{\partial g}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta g = 0; & H \frac{\partial \left(H \frac{\partial g'}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta g' = 0. \end{array} \right.$$

Di qui risulta che le sei derivate seconde di V soddisfano tutte ad una sola e medesima equazione differenziale della forma

$$(8_a) \quad H \frac{\partial \left(H \frac{\partial \omega}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta \omega = 0,$$

dove

$$\omega = e, f, g, e', f', g'.$$

Sieno ora ω ed ω' due qualunque di queste sei derivate seconde, talchè, insieme coll'equazione (8_a), sussista anche la seguente

$$H \frac{\partial \left(H \frac{\partial \omega'}{\partial n} \right)}{\partial n} + 6 \Theta \omega' = 0.$$

Da quest'equazione e dalla (8_a) si deduce

$$\omega \frac{\partial \left(H \frac{\partial \omega'}{\partial n} \right)}{\partial n} - \omega' \frac{\partial \left(H \frac{\partial \omega}{\partial n} \right)}{\partial n} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[H \left(\omega \frac{\partial \omega'}{\partial n} - \omega' \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \right] = 0.$$

Di qui risulta che l'espressione

$$H \left(\omega \frac{\partial \omega'}{\partial n} - \omega' \frac{\partial \omega}{\partial n} \right)$$

è costante lungo il corso di ciascuna linea di forza. Ma, come si è già osservato rispetto al primo membro dell'equazione (7_f), quest'espressione si annulla in ogni punto a distanza infinita, dunque dev'essere sempre

$$(8_b) \quad \omega \frac{\partial \omega'}{\partial n} - \omega' \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0.$$

Da quest'equazione, che sussiste per due qualunque delle derivate seconde e, f, g, e', f', g' , si deducono in particolare le due eguaglianze

$$(9) \quad \frac{\frac{\partial e'}{\partial n}}{e'} = \frac{\frac{\partial f'}{\partial n}}{f'} = \frac{\frac{\partial g'}{\partial n}}{g'}$$

e quindi anche, in virtù delle tre ultime equazioni (7), queste altre due

$$(9_a) \quad \frac{E'}{e'} = \frac{F'}{f'} = \frac{G'}{g'}.$$

Queste relazioni contengono gli elementi essenziali della soluzione del nostro problema.

Abbiamo supposto, nel porre le precedenti eguaglianze sotto la forma qui indicata, che nessuna delle derivate seconde e', f', g' sia identicamente nulla. Ora questa supposizione è lecita, poichè non essendosi fatta alcuna ipotesi speciale sulla direzione degli assi coordinati, è sempre possibile fissarla in modo da evitare l'anzidetta eccezione. Il solo caso in cui ciò riuscirebbe impossibile sarebbe quello nel quale *tutte* le derivate seconde fossero identicamente nulle, ossia nel quale V fosse una funzione lineare delle coordinate: ma questo caso, che venne già messo in disparte per altre ragioni, è attualmente escluso dall'infinità dello spazio al quale riferiamo la funzione V .

Denotando con

$$\frac{\frac{\partial h'}{\partial n}}{h'}$$

il valore dei tre rapporti eguali (9), si può porre

$$e' = \frac{b'}{\xi}, \quad f' = \frac{b'}{\eta}, \quad g' = \frac{b'}{\zeta},$$

dove ξ, η, ζ sono tre funzioni che rimangono costanti lungo una stessa linea di forza, cioè che soddisfanno alle condizioni

$$(10) \quad \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$$

e che possono inoltre essere, per comodità di calcolo, assoggettate alla relazione

$$(10_a) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Dai precedenti valori di e', f', g' si ricava

$$E' = \frac{b'(b'\xi - e\eta\zeta)}{\xi\eta\zeta}, \quad F' = \frac{b'(b'\eta - f\zeta\xi)}{\xi\eta\zeta}, \quad G' = \frac{b'(b'\zeta - g\xi\eta)}{\xi\eta\zeta},$$

epperò, (9_a),

$$\frac{b'\xi}{\eta\zeta} - e = \frac{b'\eta}{\zeta\xi} - f = \frac{b'\zeta}{\xi\eta} - g.$$

Designando con h il valor comune di queste tre espressioni eguali, si ha,

$$e = \frac{b'\xi}{\eta\zeta} - h, \quad f = \frac{b'\eta}{\zeta\xi} - h, \quad g = \frac{b'\zeta}{\xi\eta} - h,$$

e la condizione $\theta = e + f + g = 0$ dà, (10_a),

$$\frac{b'}{\xi\eta\zeta} - 3h = 0,$$

cioè

$$b' = 3h\xi\eta\zeta.$$

Si ha dunque finalmente

$$(10_b) \quad \begin{cases} e = h(3\xi^2 - 1), & e' = 3h\eta\zeta, \\ f = h(3\eta^2 - 1), & f' = 3h\zeta\xi, \\ g = h(3\zeta^2 - 1); & g' = 3h\xi\eta. \end{cases}$$

Di qui si ricava

$$\begin{aligned} E &= b^2(3\xi^2 - 2), & E' &= 3b^2\eta\zeta, \\ F &= b^2(3\eta^2 - 2), & F' &= 3b^2\zeta\xi, \\ G &= b^2(3\zeta^2 - 2); & G' &= 3b^2\xi\eta; \\ \Theta &= -3b^2, & \Delta &= 2b^3. \end{aligned}$$

Facendo la sostituzione di questi valori nelle equazioni (7), con riguardo alle condizioni (10), si trova che esse si riducono tutte all'unica equazione

$$(10_c) \quad H \frac{\partial h}{\partial n} = 3b^2.$$

§ 5.

Ritorniamo ora alle formole (5), dalle quali si ha

$$\begin{aligned} da &= e dx + g' dy + f' dz, \\ db &= g' dx + f dy + e' dz, \\ dc &= f' dx + e' dy + g dz, \end{aligned}$$

e quindi, per i precedenti valori (10_b),

$$(11) \quad \begin{cases} da = 3b\xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz) - h dx, \\ db = 3b\eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz) - h dy, \\ dc = 3b\zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz) - h dz. \end{cases}$$

Le nove condizioni d'integrabilità (riducibili ad otto)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g'}{\partial \zeta} - \frac{\partial f'}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial f'}{\partial x} - \frac{\partial e}{\partial \zeta} &= 0, & \frac{\partial e}{\partial y} - \frac{\partial g'}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \frac{\partial e'}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial e'}{\partial x} - \frac{\partial g'}{\partial \zeta} &= 0, & \frac{\partial g'}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial e'}{\partial \zeta} - \frac{\partial g}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f'}{\partial \zeta} &= 0, & \frac{\partial f'}{\partial y} - \frac{\partial e'}{\partial x} &= 0; \end{aligned}$$

si traducono in altrettante equazioni differenziali parziali fra le quattro funzioni ξ , η , ζ , h , che possono essere scritte nel modo seguente:

$$(II_{\xi}) \quad \begin{cases} L\xi + h\left(\eta \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right) = 0, \\ M\xi + h\left(\zeta \frac{\partial \xi}{\partial x} - \xi \frac{\partial \xi}{\partial \zeta}\right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial \zeta}, \\ N\xi + h\left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = +\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial y}; \end{cases}$$

$$(II_{\eta}) \quad \begin{cases} L\eta + h\left(\eta \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial \eta}\right) = +\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial \zeta}, \\ M\eta + h\left(\zeta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \xi \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}\right) = 0, \\ N\eta + h\left(\xi \frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial x}; \end{cases}$$

$$(II_{\zeta}) \quad \begin{cases} L\zeta + h\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial y}, \\ M\zeta + h\left(\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \xi \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta}\right) = +\frac{1}{3} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ N\zeta + h\left(\xi \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0; \end{cases}$$

dove per brevità si è posto

$$(II_a) \quad L = \frac{\partial h \eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial h \zeta}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial h \zeta}{\partial x} - \frac{\partial h \xi}{\partial \zeta}, \quad N = \frac{\partial h \xi}{\partial y} - \frac{\partial h \eta}{\partial x}.$$

Sommando le equazioni di ciascuna delle tre terne (II_{ξ}) , (II_{η}) , (II_{ζ}) , dopo averle ordinatamente moltiplicate per ξ , η , ζ , si ottiene

$$(II_b) \quad \begin{cases} (L\xi + M\eta + N\zeta)\xi = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \zeta - \frac{\partial h}{\partial \zeta} \eta \right), \\ (L\xi + M\eta + N\zeta)\eta = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \xi - \frac{\partial h}{\partial x} \zeta \right), \\ (L\xi + M\eta + N\zeta)\zeta = \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \eta - \frac{\partial h}{\partial y} \xi \right). \end{cases}$$

Sommando invece le prime equazioni di ciascuna delle terne anzidette, poscia le seconde, poscia le ultime, dopo averle ordinatamente moltiplicate, ciascuna volta, per ξ , η , ζ , si ottiene, con riguardo alla relazione (10_a),

$$(11_c) \quad \begin{cases} L + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \zeta - \frac{\partial h}{\partial \zeta} \eta \right) = 0, \\ M + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \xi - \frac{\partial h}{\partial x} \zeta \right) = 0, \\ N + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \eta - \frac{\partial h}{\partial y} \xi \right) = 0. \end{cases}$$

Finalmente, sommando sia le tre equazioni (11_b), sia le tre equazioni (11_c), dopo averle ordinatamente moltiplicate per ξ , η , ζ , si ottiene

$$L\xi + M\eta + N\zeta = 0,$$

epperò, in forza delle stesse equazioni (11_b), (11_c), si ha tanto

$$\frac{\partial h}{\partial y} \zeta - \frac{\partial h}{\partial \zeta} \eta = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \zeta} \xi - \frac{\partial h}{\partial x} \zeta = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} \eta - \frac{\partial h}{\partial y} \xi = 0,$$

quanto

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Alle prime tre di queste ultime sei equazioni si può dare la forma

$$(11_d) \quad \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\xi} = \frac{\frac{\partial h}{\partial y}}{\eta} = \frac{\frac{\partial h}{\partial \zeta}}{\zeta} = \frac{dh}{\xi dx + \eta dy + \zeta d\zeta};$$

alle ultime tre, tenendo conto delle precedenti, si può dare invece la forma

$$(11_e) \quad \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Da queste tre equazioni (11_e) consegue immediatamente che esiste una funzione r delle coordinate x , y , ζ , il cui differenziale totale è dato da

$$(12) \quad \xi dx + \eta dy + \zeta d\zeta = dr,$$

e le precedenti equazioni (11_d) mostrano che la quantità h non può dipendere che da questa funzione r .

Le tre fra le equazioni (11_ξ) , (11_η) , (11_ζ) i cui secondi membri sono nulli si riducono, in virtù delle equazioni (11_e) , alle seguenti

$$(12_a) \quad \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \zeta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \quad \xi \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = 0.$$

Le rimanenti sei equazioni del sistema anzidetto, combinate a due a due per somma, in guisa da eliminare le derivate di h , danno

$$(12_b) \quad \begin{cases} \xi \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) = \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} - \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \eta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \xi \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ \zeta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \xi \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Finalmente quelle stesse equazioni, combinate a due a due per sottrazione, danno

$$\begin{aligned} h \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) &= - \frac{2}{3} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ h \eta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) &= - \frac{2}{3} \frac{\partial h}{\partial y}, \\ h \zeta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) &= - \frac{2}{3} \frac{\partial h}{\partial \zeta}, \end{aligned}$$

equazioni che si compendiano tutte, (12) , nell'unica

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \right) dr = - \frac{2}{3} \frac{dh}{h},$$

alla quale si può dare la forma

$$(12_c) \quad \frac{d \log h}{dr} = - \frac{3}{2} \Delta_2 r.$$

§ 6.

È ora facile ottenere la determinazione delle due funzioni r , h , dalle quali ormai dipende la soluzione del problema.

Le equazioni (12_a), poste sotto la forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta}{\zeta} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\zeta}{\xi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\xi}{\eta} \right) = 0,$$

danno

$$(13) \quad \eta = P\zeta, \quad \zeta = Q\xi, \quad \xi = R\eta,$$

dove P è una funzione di y e z , Q di z ed x , R di x ed y . Queste tre funzioni sono vincolate dalla relazione

$$PQR = 1$$

ossia

$$(13_a) \quad \log P + \log Q + \log R = 0,$$

dalla quale si deduce

$$\frac{\partial \log Q}{\partial x} = -\frac{\partial \log R}{\partial x}, \quad \frac{\partial \log R}{\partial y} = -\frac{\partial \log P}{\partial y}, \quad \frac{\partial \log P}{\partial z} = -\frac{\partial \log Q}{\partial z}.$$

Ora nella prima di queste ultime eguaglianze il primo membro è indipendente da y ed il secondo da z : quindi i due membri non possono essere eguali che ad una funzione della sola x . Per una ragione analoga i due membri della seconda eguaglianza non possono essere eguali che ad una funzione della sola y e quelli della terza ad una funzione della sola z . Da ciò e dalla necessità di soddisfare alla primitiva relazione (13_a) segue molto facilmente che le forme di $\log P$, $\log Q$, $\log R$ non possono essere che le seguenti:

$$\log P = Y - Z, \quad \log Q = Z - X, \quad \log R = X - Y,$$

dove X è una funzione della sola x , Y della sola y , Z della sola z , e che quindi le equazioni (13) si possono scrivere, mutando la designazione di queste funzioni arbitrarie, nel modo seguente:

$$\frac{\xi}{X'} = \frac{\eta}{Y'} = \frac{\zeta}{Z'},$$

dove X' è la derivata d'una funzione della sola x , Y' quella d'una funzione della sola y e Z' quella d'una funzione della sola z . Di qui e dall'equazione (12) si deduce

$$\frac{\xi}{X'} = \frac{\eta}{Y'} = \frac{\zeta}{Z'} = \frac{dr}{d(X + Y + Z)},$$

cosicchè, ponendo per un momento

$$(13_b) \quad X + Y + Z = t,$$

si riconosce che r è necessariamente funzione soltanto di t e che si ha

$$(13_c) \quad \xi = \frac{\partial r}{\partial x} = r' X', \quad \eta = \frac{\partial r}{\partial y} = r' Y', \quad \zeta = \frac{\partial r}{\partial z} = r' Z',$$

dove

$$r' = \frac{dr}{dt};$$

l'equazione (10_a) diventa quindi

$$(13_d) \quad r'^2 (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = 1.$$

I precedenti valori (13_c) delle funzioni ξ, η, ζ , sostituiti nelle equazioni (12_b), danno

$$r'^2 X' (Z'' - Y'') = 0, \quad r'^2 Y' (X'' - Z'') = 0, \quad r'^2 Z' (Y'' - X'') = 0,$$

epperò si ha

$$(13_e) \quad X'' = Y'' = Z'' = 2k,$$

dove $2k$ rappresenta il valor comune delle tre derivate seconde di X, Y, Z , il quale non può essere che *costante*.

Questa costante k non può essere nulla. Infatti se ciò fosse, sarebbero costanti le quantità X', Y', Z' e quindi, (13_d), anche la r' , cosicchè r sarebbe una funzione lineare delle x, y, z e si avrebbe $\Delta_2 r = 0$. Per conseguenza, (12_c), anche h avrebbe un valore costante e questo valore non potrebbe essere, (10_c), che lo zero, cosicchè, (11), si avrebbe

$$da = 0, \quad db = 0, \quad dc = 0$$

e la funzione V risulterebbe lineare, forma già esclusa come inammissibile.

Poichè dunque la costante k non può essere nulla, si possono assegnare, (13_e), alle funzioni X, Y, Z le forme seguenti

$$X = k(x - x_0)^2 + l, \quad Y = k(y - y_0)^2 + m, \quad Z = k(z - z_0)^2 + n,$$

dove x_0, y_0, z_0, l, m, n sono nuove costanti arbitrarie. Di qui si deduce, (13_b),

$$t = k[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2] + l + m + n,$$

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = 4k(t - l - m - n),$$

epperò, (13_d),

$$dr = \frac{dt}{2\sqrt{k(t - l - m - n)}},$$

donde si ricava, tralasciando la costante additiva (evidentemente inutile),

$$r = \sqrt[3]{\frac{t - l - m - n}{k}},$$

ossia

$$(14) \quad r = \sqrt[3]{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Da quest'espressione di r segue

$$\Delta_2 r = \frac{2}{r},$$

talchè l'equazione (12_c) diventa

$$\frac{d \log h}{dr} = - \frac{3}{r}$$

e dà

$$(14_a) \quad h = \frac{M}{r^3},$$

dove M è una nuova costante.

In virtù delle formole (14), (14_a), (13_c), le equazioni (11) diventano

$$da = M \frac{3(x - x_0)dr - r dx}{r^4},$$

$$db = M \frac{3(y - y_0)dr - r dy}{r^4},$$

$$dc = M \frac{3(z - z_0)dr - r dz}{r^4},$$

e danno

$$a = -M \frac{x - x_0}{r^3} + a_0, \quad b = -M \frac{y - y_0}{r^3} + b_0, \quad c = -M \frac{z - z_0}{r^3} + c_0,$$

dove a_0, b_0, c_0 sono tre costanti, le quali non possono essere che nulle. Ciò è richiesto già dalla proprietà che devono avere le derivate prime di V di annullarsi all'infinito, ma segue anche necessariamente dalle equazioni del problema. Infatti le tre quantità, (13_c),

$$\xi = \frac{x - x_0}{r}, \quad \eta = \frac{y - y_0}{r}, \quad \zeta = \frac{z - z_0}{r}$$

debbono soddisfare alle equazioni (10), le quali equivalgono, per questi valori di ξ, η, ζ , alle

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \xi \frac{\partial r}{\partial n}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \eta \frac{\partial r}{\partial n}, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = \zeta \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Queste equazioni mostrano che le quantità ξ , η , ζ debbono essere proporzionali alle tre derivate prime di V , cioè alle quantità testè determinate

$$a = -\frac{M\xi}{r^2} + a_0, \quad b = -\frac{M\eta}{r^2} + b_0, \quad c = -\frac{M\zeta}{r^2} + c_0,$$

e tale proporzionalità non può evidentemente aver luogo se non è, come dicevamo, $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Si ha dunque

$$a = \frac{\partial}{\partial x} \frac{M}{r}, \quad b = \frac{\partial}{\partial y} \frac{M}{r}, \quad c = \frac{\partial}{\partial z} \frac{M}{r}$$

e di qui si ricava finalmente

$$(14_b) \quad V = \frac{M}{r}.$$

La direzione della normale n potendosi far coincidere, in questo caso, con quella del raggio r , si ha, (14_a) , (14_b) ,

$$\frac{\partial b}{\partial n} = -\frac{3M}{r^4}, \quad H = \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{M}{r^2}$$

e quindi l'equazione (10_c) è anch'essa soddisfatta.

Il trovato valore di V soddisfa così a tutte le equazioni (7). Del resto se questo stesso valore si sostituisce nelle primitive equazioni (4), si trova che queste si riducono alle seguenti:

$$A(2r^2 - 3x^2) = 0, \quad Ay\zeta = 0,$$

$$A(2r^2 - 3y^2) = 0, \quad A\zeta x = 0,$$

$$A(2r^2 - 3z^2) = 0, \quad Axy = 0,$$

e diventano identità quando (e solamente quando) $A=0$, in accordo colle conclusioni del § 2.

§ 7.

Da quanto precede risulta che è sommamente ristretto il numero dei casi nei quali è possibile riprodurre il sistema delle pressioni di MAXWELL colla effettiva deformazione d'un mezzo isotropo indefinito, mezzo la cui costituzione non corrisponde

d'altronde, per la necessaria condizione $A = 0$, ad alcuna realtà conosciuta. Vediamo ciò nonostante qual sia la deformazione di questo mezzo che corrisponde all'unica forma testè riconosciuta possibile per la funzione V .

Ponendo per semplicità

$$\text{si ha} \quad x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{Mx}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{My}{r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{Mz}{r^3}, \quad \Delta_1 V = \frac{M^2}{r^4}$$

e le formole (3), posto $A = 0$, danno

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{M^2(4x^2 - r^2)}{32\pi Br^6}, & \lambda &= \frac{8M^2yz}{32\pi Br^6}, \\ \beta &= \frac{M^2(4y^2 - r^2)}{32\pi Br^6}, & \mu &= \frac{8M^2zx}{32\pi Br^6}, \\ \gamma &= \frac{M^2(4z^2 - r^2)}{32\pi Br^6}; & \nu &= \frac{8M^2xy}{32\pi Br^6}, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, & \lambda &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \\ \beta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, & \mu &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x}, \\ \gamma &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, & \nu &= 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

dove

$$(15) \quad \varphi = \frac{V^2}{64\pi B}.$$

Ne risulta che le componenti u, v, w dello spostamento del punto (x, y, z) , le quali supponiamo doversi annullare all'infinito, sono date da

$$(15_a) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

ossia da

$$u = -\frac{M^2}{32\pi B} \frac{x}{r^4}, \quad v = -\frac{M^2}{32\pi B} \frac{y}{r^4}, \quad w = -\frac{M^2}{32\pi B} \frac{z}{r^4}.$$

Lo spostamento di ogni punto del mezzo è dunque *radiale*, come la forza, ed ha il valore

$$(15_b) \quad - \frac{M^2}{32\pi B} \frac{1}{r^3}.$$

Il segno di quest'espressione mostra che vi è sempre una *contrazione* di tutto l'ambiente verso il centro $x = y = z = 0$: ma la legge del decrescimento di questa contrazione colla distanza dal centro è tale che la dilatazione cubica è sempre *positiva* e data da

$$(15_c) \quad \delta = \frac{M^2}{32\pi B} \frac{1}{r^4}.$$

Si trova poi

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{r^2 - 2x^2}{r^6}, & Y_z &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{-2yz}{r^6}, \\ Y_y &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{r^2 - 2y^2}{r^6}, & Z_x &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{-2zx}{r^6}, \\ Z_z &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{r^2 - 2z^2}{r^6}; & X_y &= \frac{M^2}{8\pi} \cdot \frac{-2xy}{r^6}; \end{aligned}$$

ovvero anche

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, & Y_z &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}, \\ Y_y &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & Z_x &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}, \\ Z_z &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, & X_y &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

dove

$$\psi = \frac{M^2}{8\pi} \log r.$$

La deformazione definita dalle formole (15_a), (15_b), (15_c) si può riferire allo spazio infinito escluso, per esempio, da una sfera di raggio finito ed ha luogo radialmente ed uniformemente intorno al centro di questa. Ora lo studio d'una deformazione di questo genere si presenta in una delle più elementari applicazioni della teoria dell'elasticità, cioè nel problema dell'equilibrio di un involucro sferico isotropo, soggetto a pressioni costanti sulle sue due superficie, delle quali, nel caso analogo al nostro, l'esterna sarebbe tutta all'infinito e non sopporterebbe pressione veruna. Si potrebbe dunque supporre che la soluzione precedentemente trovata dovesse coincidere colla già nota. Ma ciò non è, nè può essere, per la ragione che ora passiamo ad esporre.

§ 8.

Poichè tanto nell'una quanto nell'altra questione il trinomio

$$u dx + v dy + w dz$$

è un differenziale esatto, poniamo

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

donde segue, come nel § precedente,

$$\alpha = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \lambda = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \mu = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad \nu = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Di qui risultano, per le componenti di pressione in un mezzo isotropo ordinario, i valori

$$X_x = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad Y_z = -2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z},$$

$$Y_y = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad Z_x = -2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x},$$

$$Z_z = -(A - 2B)\Delta_2 \varphi - 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad X_y = -2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

dai quali si deduce

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = -A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = -A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z}.$$

Denotando con X, Y, Z le componenti della forza esterna riferita all'unità di volume, le equazioni indefinite dell'equilibrio sono quindi

$$A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial x} + X = 0, \quad A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial y} + Y = 0, \quad A \frac{\partial \Delta_2 \varphi}{\partial z} + Z = 0$$

e, ponendo

$$X = -k \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -k \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -k \frac{\partial V}{\partial z},$$

dove V è la funzione potenziale delle forze esterne, k la densità, queste equazioni si riassumono nell'unica

$$A \Delta_2 \varphi - kV = \text{Cost.},$$

la quale si riduce alla semplicissima

$$A \Delta_2 \varphi = \text{Cost.}$$

quando non vi sono che pressioni superficiali.

Ora se A è diverso da zero, come avviene necessariamente nei mezzi isotropi ordinari, e se, come avviene nel sovraccitato problema sferico, la funzione φ dipende soltanto dalla distanza r del punto (x, y, z) dal centro dell'involucro, quest'equazione diventa

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r\varphi)}{\partial r^2} = \text{Cost.}$$

e, tralasciando una costante additiva insignificante, dà

$$\varphi = \frac{K}{r} + K' r^2,$$

dove K e K' sono due costanti. Nel caso dello spazio infinito escluso da una sfera bisogna fare $K' = 0$ e si ottiene così l'espressione

$$\varphi = \frac{K}{r}$$

che porge l'ordinaria soluzione, nella quale la costante K resta poi determinata dalla pressione che deve aver luogo sulla superficie sferica interna. Ma, qualunque sia questa pressione, la dilatazione cubica del mezzo, data da

$$\varpi = \Delta_2 \varphi,$$

è sempre *nulla*.

Se invece, come avviene nel caso singolare che siamo stati condotti a considerare nei precedenti §§, la costante A è nulla, si ha, qualunque sia la funzione φ ,

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0.$$

Ne risulta che, per l'ammessa natura della deformazione, l'equilibrio non può aver luogo che in assenza di forze di massa, ma, quando questa condizione sia soddisfatta, esso è conciliabile con qualunque forma della funzione φ . Questa palmare contraddizione col teorema fondamentale dell'unicità dello stato d'equilibrio dipende evidentemente da ciò che, per $A = 0$, il potenziale d'elasticità non possiede più il carattere di forma quadratica essenzialmente positiva. La precisa determinazione che tuttavia abbiamo ottenuto della funzione φ nel § precedente, ed a tenore della quale la dilatazione cubica (15_c) non è punto risultata nulla, scaturisce da un'altra sorgente, e cioè dall'avere assunto *a priori* espressioni di *data forma* per le componenti di pressione X_x , Y_y , etc., cioè le espressioni (1). Queste espressioni contengono bensì una funzione arbitraria V , ma, negli spazî infiniti in cui questa funzione soddisfa all'equazione $\Delta_2 V = 0$, esse non possono, come abbiamo dimostrato, convenire alle componenti di pressione derivanti da una vera deformazione del mezzo se non a patto che V abbia la forma (14_b), e da questa forma speciale di V segue necessariamente quella pur speciale determinazione di φ che abbiamo incontrata nel § precedente e che è essenzialmente diversa da quella che conviene ai mezzi isotropi ordinari.

§ 9.

Non vogliamo por termine a questo lavoro senza far cenno di un caso nel quale il problema della determinazione delle funzioni u , v , w , corrispondenti ad una data forma della funzione potenziale V , con riguardo alle condizioni (1), è riducibile a termini semplicissimi. Il caso cui alludiamo è quello in cui la funzione anzidetta dipende dalla sola distanza r del punto potenziato da un punto fisso, che per semplicità assumeremo come origine delle coordinate.

È facile comprendere (e si può del resto dimostrare) che in questo caso anche gli spostamenti devono essere radiali ed uniformi, cioè che le componenti u , v , w devono essere le derivate d'una funzione della sola distanza r . Ciò posto, considerando V , per comodità di calcolo, come funzione dell'argomento

$$\rho = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e ponendo

$$\frac{dV}{d\rho} = V',$$

si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2V'x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2V'y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 2V'z, \quad \Delta_1 V = 4V'^2\rho$$

e le formole (3), (4_a) danno

$$\alpha = \frac{V'^2}{2\pi B}(x^2 - C\rho), \quad \lambda = \frac{V'^2}{\pi B}yz,$$

$$\beta = \frac{V'^2}{2\pi B}(y^2 - C\rho), \quad \mu = \frac{V'^2}{\pi B}zx,$$

$$\gamma = \frac{V'^2}{2\pi B}(z^2 - C\rho); \quad \nu = \frac{V'^2}{\pi B}xy.$$

Assumendo poscia un'altra funzione φ dello stesso argomento ρ e ponendo

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

si trova

$$\alpha = 2\varphi' + 4\varphi''x^2, \quad \lambda = 8\varphi''yz,$$

$$\beta = 2\varphi' + 4\varphi''y^2, \quad \mu = 8\varphi''zx,$$

$$\gamma = 2\varphi' + 4\varphi''z^2, \quad \nu = 8\varphi''xy.$$

Ora queste ultime espressioni non si possono identificare colle precedenti se non ponendo simultaneamente le *due* relazioni

$$\varphi'' = \frac{V'^2}{8\pi B}, \quad \varphi' = -\frac{CV'^2\rho}{4\pi B},$$

dalle quali risulta

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{2C\rho} = 0.$$

Quest'ultima equazione stabilisce già che la forma della funzione φ (e per conseguenza anche quella della funzione V) dipende unicamente, astrazione fatta da un fattore costante, dalla costituzione del mezzo isotropo che si considera. Ciò sarebbe egualmente vero se la costituzione del mezzo variasse colla distanza dal centro, cioè se i parametri d'isotropia A e B si supponessero funzioni di ρ , di guisa che il mezzo si concepisse formato di strati concentrici ed isotropi, con parametri d'isotropia variabili con continuità dall'uno strato all'altro.

Nel caso dei parametri costanti si ha, dall'integrazione dell'ultima equazione,

$$\varphi = K \rho^{-\eta},$$

dove K è una costante arbitraria ed η il già rammentato rapporto della contrazione trasversale alla dilatazione longitudinale. Ne risulta

$$V = 4 \sqrt{\frac{\pi E K}{\eta} \rho^{-\frac{\eta}{2}}},$$

dove E è il modulo d'elasticità. Riponendo r^2 al posto di ρ si conclude di qui che l'unica soluzione del problema è data da

$$V = \frac{M}{r^\eta}, \quad \varphi = \frac{\eta}{16 \pi E} V^2,$$

dove M è una nuova costante.

La densità della distribuzione dotata di questo potenziale V è espressa da

$$\frac{M \eta (1 - \eta)}{4 \pi r^{\eta+2}}.$$

Affinchè questa densità sia nulla bisogna che sia $\eta = 1$ e quindi

$$A = 0, \quad E = 4B.$$

Si ricade così sulla soluzione già trovata. Se invece si volesse che la detta densità risultasse *costante*, si giungerebbe a conclusioni ancora più incongrue. Dovendo infatti essere, perchè ciò avvenisse, $\eta = -2$, si avrebbe

$$5A - 6B = 0$$

e quindi

$$E = -2B,$$

cosicchè bisognerebbe ammettere o che il modulo d'elasticità del mezzo fosse negativo,

o che, (3_c), fosse negativo il potenziale d'elasticità

$$\Phi = \frac{-1}{2E} \left(\frac{\Delta_1 V}{8\pi} \right)^2.$$

Vi è anche un altro caso nel quale il problema trattato in questa Memoria si può risolvere in modo diretto, benchè meno semplicemente che nell'ipotesi particolarissima testè considerata. È il caso in cui la distribuzione di masse, cui appartiene la funzione potenziale V , è simmetrica intorno ad un asse rettilineo, cosicchè V diventa funzione delle sole due coordinate che bastano a definire la posizione di un punto in un piano passante per l'asse di simmetria. In questo caso le sei equazioni di condizione (4) si riducono a quattro, due delle quali sono le derivate esatte d'una stessa equazione differenziale parziale di 2° ordine. Quest'equazione, combinata colla $\Delta_2 V = 0$, ammette di nuovo un integrale primo: e dalla forma di questo si deduce facilmente (giovandosi all'uopo dell'intervento della funzione *associata*) che, se si esclude la forma lineare e se quindi si pone $A = 0$, la sola forma possibile per V è quella rappresentata dall'equazione (14_b), per un punto (x_0, y_0, z_0) situato sull'asse di simmetria.

In questo caso, che è stato il primo da me studiato, la forma (14_b) si palesa come la sola ammissibile (escludendo sempre la lineare) in *ogni* spazio vuoto di masse potenzianti.

NOTA

Delle equazioni di condizione per le quantità $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, che sono citate nel § 1, si dimostra ordinariamente la *necessità*, non già la *sufficienza*. Stimo perciò opportuno, stante l'importanza di queste equazioni rispetto allo scopo del presente lavoro, di aggiungere una deduzione delle medesime, la quale stabilisca chiaramente la proprietà loro di costituire le condizioni non solo necessarie, ma eziandio sufficienti, per l'esistenza delle tre componenti di spostamento u, v, w .

Si rammenti, dalla teoria generale delle deformazioni d'un mezzo continuo, che

insieme colle citate componenti $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ intervengono altresì, con ufficio non meno essenziale, le tre quantità p, q, r definite dalle equazioni

$$(a) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2p, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2q, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2r$$

e rappresentanti le *componenti di rotazione* della particella circostante al punto (x, y, z) . Ora dal sistema delle nove equazioni che si ottengono combinando le sei equazioni (2) del § 1 colle precedenti tre (a), si possono ricavare i valori di tutte le derivate prime delle tre componenti di spostamento u, v, w , e questi valori sono i seguenti:

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, & \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu}{2} - r, & \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu}{2} + q, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\nu}{2} + r, & \frac{\partial v}{\partial y} = \beta, & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\lambda}{2} - p, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\mu}{2} - q, & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\lambda}{2} + p, & \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma. \end{cases}$$

Consideriamo le prime tre di queste equazioni, che forniscono i valori delle derivate prime della funzione u . Affinchè, supposte *date* le quantità che entrano nei loro secondi membri, esista una funzione u soddisfacente a queste tre equazioni, è necessario e sufficiente che sieno soddisfatte tre note relazioni, le quali possono essere scritte come segue:

$$-\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Da queste si deducono, colla permutazione ciclica, le due terne analoghe di condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle altre due funzioni v e w . Ma, eseguendo dapprima questa permutazione sulla sola prima delle tre precedenti condizioni, e sommando poscia membro a membro le tre equazioni così ottenute, si trova

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0, \quad *)$$

talchè la prima delle dianzi trovate tre condizioni può scriversi più semplicemente così:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \right).$$

*) Questa relazione notissima risulta già dalle formole di definizione (a): ma, per lo scopo attuale, era necessario far constare che essa è inclusa nelle nove condizioni d'integrabilità di cui qui è parola.

Per tal modo si ottiene il seguente sistema di relazioni differenziali fra le nove funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, p, q, r$:

$$(c) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), & \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, & \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial z}; \\ \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x}, & \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right), & \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \\ \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, & \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial y}, & \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \end{cases}$$

Questo sistema d'equazioni contiene le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle nove condizioni (b), ossia alle sei equazioni (2) del § 1 ed alle tre equazioni (a) di questa Nota.

Ciò posto, consideriamo come *date* soltanto le *sei componenti di deformazione* $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$. Se esistono tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle equazioni (2) del § 1, esistono certamente anche le tre funzioni p, q, r definite dalle equazioni (a) di questa Nota. Poichè dunque le derivate di queste tre ultime funzioni sono legate alle $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ dalle nove equazioni (c), bisogna che sieno soddisfatte le condizioni di integrabilità che risultano da queste ultime nove equazioni e che si riducono alle sei seguenti:

$$(d) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial z \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x \partial y}, & 2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z} \right), \end{cases}$$

le quali sono appunto quelle citate nel § 1. Quando queste condizioni sono soddisfatte, esistono indubbiamente tre funzioni p, q, r soddisfacenti alle nove equazioni (c); ma si è già veduto che se queste nove equazioni son soddisfatte da nove funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, p, q, r$, esistono tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle condizioni (2) del § 1 ed (a) della presente Nota: dunque le sei condizioni (d), evidentemente *necessarie* per l'esistenza di tre funzioni u, v, w soddisfacenti alle sole equazioni (2) del § 1, sono anche *sufficienti*.