Alexander Ziwet

OPERE MATEMATICHE

DI

EUGENIO BELTRAMI

PUBBLICATE PER CURA

DELLA

FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA R. UNIVERSITÀ DI ROMA.

TOMO QUARTO

ED ULTIMO.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1920

C.

OSSERVAZIONI ALLA NOTA DEL PROF. MORERA.

Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, tomo I (1892), I° semestre, pp. 141-142.

È noto che rappresentando con

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lambda = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \nu = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

le sei componenti della deformazione corrispondente ad un sistema di spostamenti (u, v, w), queste sei funzioni $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, supposte date *a priori,* devono soddisfare a sei condizioni necessarie e sufficienti perchè sia possibile la conseguente determinazione di tre funzioni u, v, w, dalle quali esse dipendano giusta le formole precedenti. Queste sei condizioni sono

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

dove

$$A = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial y^2}, \quad \text{ecc.}$$

$$L = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right), \quad \text{ecc.}$$

Ciò premesso è facile verificare che fra queste ultime sei espressioni A, B, C, L, M, N sussistono le seguenti tre relazioni identiche *):

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial M}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Poichè dunque queste relazioni hanno la stessa forma delle equazioni indefinite d'equilibrio d'un corpo continuo sottratto ad ogni azione esterna, è lecito soddisfare a queste equazioni ponendo

$$X_x = A, \quad Y_y = B, \quad Z_z = C,$$
$$Y_z = L, \quad Z_x = M, \quad X_y = N$$

e prendendo per α, β, γ, λ, μ, ν *sei* funzioni di x, y, z *interamente arbitrarie.*

La soluzione ottenuta per altra via dal prof. MORERA corrisponde alle ipotesi particolari

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \quad \lambda = U, \quad \mu = V, \quad \nu = W.$$

Le sei componenti di pressione X_x, X_y, ... sono necessariamente soggette a certe condizioni, quando corrispondono a forze interne generate per pura deformazione; giacchè esse devono in tal caso potersi esprimere, in un modo del tutto determinato (e dipendente dalla natura del corpo), per mezzo di tre componenti di spostamento u, v, w. Nel caso dell'isotropia, queste condizioni, immediata conseguenza di quelle che ho accennato più sopra, sono estremamente semplici; esse hanno infatti la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + C\Delta_2 X_x = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + C\Delta_2 Y_y = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + C\Delta_2 Z_z = 0,$$
$$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + C\Delta_2 Y_z = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial x} + C\Delta_2 Z_x = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + C\Delta_2 X_y = 0,$$

*) Queste relazioni ripetono la loro origine da quella notissima che lega fra loro le tre componenti di rotazione; giacchè, come ho stabilito in una Nota addizionale alla mia Memoria *Sull'interpretazione meccanica delle formole di* MAXWELL, le ricordate sei condizioni $A = 0$, ecc. non sono altro che condizioni d'integrabilità dei differenziali di quelle componenti.

dove

$$P = X_x + Y_y + Z_z.$$

e dove C è una costante (e propriamente $C = 1 + \eta$, dove η è il noto *rapporto di contrazione,* così designato nella traduzione francese del trattato di CLEBSCH).

Queste ultime condizioni suppongono l'assenza d'ogni forza esterna. Tralascio, per brevità, di riportare le condizioni analoghe per il caso in cui questa forza esista ed abbia le componenti X, Y, Z.