

$$\eta^{(i)} - \varepsilon_i X_i = \eta_{ia} + \eta_{io} + \eta_{i1} X_1 + \dots + \eta_{ii} X_i + \dots + \eta_{in} X_n ,$$

$$\eta^{(i)} = \eta_{ia} + \eta_{io} + \eta_{i1} X_1 + \dots + (\eta_{ii} + \varepsilon_i) X_i + \dots + \eta_{in} X_n ,$$

e ancora, posto :

$$(404) \quad \eta'_{ii} = \eta_{ii} + \varepsilon_i ,$$

$$(405) \quad \eta^{(i)} = \eta_{ia} + \eta_{io} + \eta_{i1} X_1 + \dots + \eta'_{ii} X_i + \dots + \eta_{in} X_n .$$

Analogamente per le forme particolari (402) e (403) avremo :

$$(406) \quad 0 = \eta_{io} + \eta_{i1} X_1 + \dots + \eta'_{ii} X_i + \dots + \eta_{in} X_n ,$$

$$(407) \quad \eta^{(i)} = \eta_{ia} + \eta_{i1} X_1 + \dots + \eta'_{ii} X_i + \dots + \eta_{in} X_n .$$

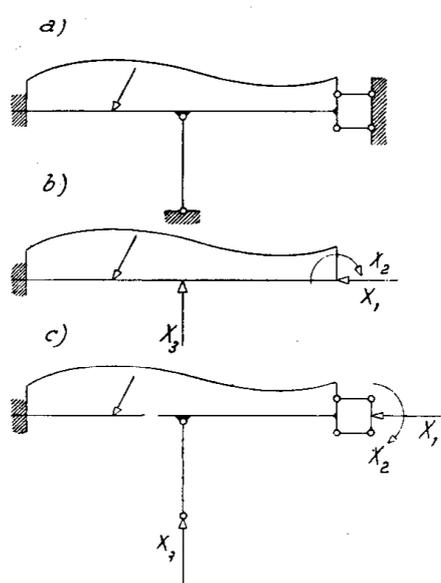


Fig. 129

Le equazioni di elasticità d'un sistema con vincoli iperstatici cedevoli elasticamente si possono dunque scrivere al modo solito, purchè si sostituiscano agli  $n$  coefficienti  $\eta_{ii}$  quelli espressi dalla (404).

Allo stesso risultato si perviene direttamente ove si considerino i vincoli elastici non esterni (fig. 129 b), ma appartenenti al sistema e le relative iperstatiche applicate esternamente ad essi (figura 129 c). In tal caso infatti agli spostamenti  $\eta_{ik}$  della travatura principale per il carico d'esplorazione  $X_k = 1$  concorre senz'altro l'elasticità dei vincoli e si ottengono direttamente gli spostamenti  $\eta'_{ii}$  in luogo degli  $\eta_{ii}$ .

### 59 -- Esempi di risoluzione di sistemi iperstatici.

Il portale semplice  $A, C, D, B$ , sia perfettamente incastrato al suolo in  $A$  e  $B$  e la sua architrave  $CD$  sia collegata mediante cerniere  $C$  e  $D$  ai piedriti (fig. 130 a).

Il sistema può essere trasformato in due mensole mediante un solo taglio, ma si rendono con ciò labili partiti di esso: in una sola mensola se il taglio interessa un ritto, in entrambe se il taglio interessa l'architrave. In ogni caso esso acquista col taglio le libertà di movimento corrispondenti alle due sconnessioni semplici del tipo  $M=0$  in  $C$  e in  $D$ , sicchè applicando le (380) si trova:

$$n = 3 \cdot 1 - 2 = 1 ;$$

il portale è dunque semplicemente iperstatico.

Le reazioni dei ritti sull'architrave passano necessariamente per le articolazioni  $C$  e  $D$  e fanno equilibrio al carico gravante l'architrave stessa. Ma qualunque sia tale carico, le componenti verticali di dette reazioni sono le stesse della trave  $CD$  supposta semplicemente appoggiata agli estremi, e quindi staticamente determinate, mentre le reazioni orizzontali dipendono da un solo parametro iperstatico  $X_1$  che può essere identificato nella caratteristica  $N$  relativa ad una sezione arbitraria dell'architrave. Il sistema principale cui ci riduciamo ponendo  $X_1 = 0$ , cioè con un taglio in corrispondenza di tale sezione, in particolare, come nel seguito è supposto, svincolando la parte  $CD$  da una delle cerniere d'estremità, per esempio in  $C$ , consta ancora di due sistemi parziali a mensola.

Per essere l'indeterminazione interna è certamente nullo lo spostamento relativo  $\eta^{(1)}$  secondo  $X_1$ , dei punti d'applicazione delle due forze  $X_1$  costituenti l'iperstatica; ritenendo inoltre il sistema esente da autotensioni, dovremo applicare le (402), che si riducono all'unica equazione:

$$0 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1 .$$

Da questa si trae immediatamente:

$$(408) \quad X_1 = -\eta_{10}/\eta_{11} .$$

Supporremo il portale caricato esclusivamente da una forza orizzontale  $P$  in corrispondenza della cerniera  $C$ , nel qual caso, essendo scarica l'architrave, la forza normale è costante ed uguale ad  $X_1$  in tutte le sezioni di essa. Riterremo poi prismatiche e dello stesso materiale omogeneo ed isotropo le travi costituenti il sistema; ammetteremo infine, com'è lecito in molti casi, di poter trascurare l'influenza del taglio.

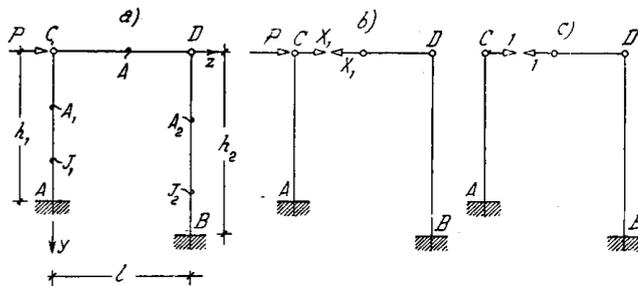


Fig. 130

Per la determinazione degli spostamenti relativi  $\eta_{i0}$ , ed  $\eta_{ik}$  dovremo applicare le (395) e (387 per  $i=k=1$ . In conformità alle ipotesi fatte, ponendo di più  $E=1$  e contando le ordinate a partire dall'architrave e le ascisse a partire da  $C$ , avremo:

$$(409) \quad \eta_{10} = \frac{1}{A_1} \int_C^A N_0 N_1 dy + \frac{1}{A} \int_C^D N_0 N_1 dz + \frac{1}{A_2} \int_D^B N_0 N_1 dy + \\ + \frac{1}{J_1} \int_C^B M_0 M_1 dy + \frac{1}{J} \int_C^D M_0 M_1 dz + \frac{1}{J_2} \int_D^B M_0 M_1 dy ,$$

$$(410) \quad \eta_{ii} = \frac{1}{A_1} \int_C^A N_i^2 dy + \frac{1}{A} \int_C^D N_i^2 dz + \frac{1}{A_2} \int_D^B N_i^2 dy + \\ = \frac{1}{J_1} \int_C^A M_i^2 dy + \frac{1}{J} \int_C^D M_i^2 dz + \frac{1}{J_2} \int_D^B M_i^2 dy .$$

Le caratteristiche che figurano in queste si riferiscono tutte al sistema principale:  $N_o$  ed  $M_o$  dovute al carico effettivo,  $N_i$  ed  $M_i$  dovute al carico d'esplorazione  $X=1$  (fig. 130 c). Le loro espressioni sono riportate per le varie travi nel prospetto qui a fianco.

Trave	$N_o$	$N_i$	$M_o$	$M_i$
AC	0	0	$-Py$	$-y$
CD	0	1	0	0
DA	0	0	0	$y$

Sostituendo negli integrali, la (409) e (410) divengono:

$$\eta_{io} = \frac{P}{J_1} \int_C^A y^2 dy , \\ \eta_{ii} = \frac{1}{A} \int_C^D dz = \frac{1}{J_1} \int_C^A y^2 dy + \frac{1}{J_2} \int_D^B y^2 dy .$$

Agendo infatti il carico sulla mensola AC del sistema principale sono ovunque nulle tutte le caratteristiche con l'indice zero per la porzione CDB; di conseguenza lo spostamento relativo  $\eta_{io}$  coincide con lo spostamento assoluto del punto C considerato appartenente alla parte caricata, cioè con la freccia della mensola AC per il carico flettente P agente all'estremo libero. Lo spostamento  $\eta_{ii}$  per il carico d'esplorazione  $X_i=1$  è invece somma dell'allungamento della trave CD e delle frecce delle due mensole AC e BD (fig. 130 c).

Eseguendo le integrazioni, troviamo:

$$\eta_{io} = \frac{Ph_1^3}{3J_1} , \quad \eta_{ii} = \frac{l}{A} + \frac{h_1^3}{3J_1} + \frac{h_2^3}{3J_2}$$

e infine, sostituendo nella (408):

$$(411) \quad X_i = - \frac{P}{1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 \frac{J_1}{J_2} + \frac{3J_1 l}{Ah_1^3}}$$

In particolare per  $h_1 = h_2 = h$  e  $J_1 = J_2$ , si ottiene:

$$X_i = - \frac{P}{2 + \frac{3J_1 l}{Ah_1^3}}$$

e prescindendo dalla forza normale oltrechè dal taglio, cioè dall'allungamento elastico dell'architrave ( $EA = \infty$ ):

$$X_i = - P/2 .$$

\* \* \*

La travatura rappresentata in figura 131 a) è un portale semplice simmetrico, la cui architrave, uniformemente caricata, è sorretta in mezzeria da due saettoni articolati a cerniera alle estremità. Essa si riconosce facilmente doppiamente iperstatica.

Scegliamo come sistema principale quello che si ottiene svincolando l'unione mutua fra i saettoni e la trave e sostituiamo alla cerniera dell'imposta destra un carrello scorrevole orizzontalmente: saranno quindi da riguardare come incognite iperstatiche (fig. 131 b): l'azione mutua  $X_1$  — necessariamente verticale come il carico agente sul sistema — che si trasmettono l'architrave ed il complesso dei saettoni: la componente orizzontale  $X_2$  della reazione destra.

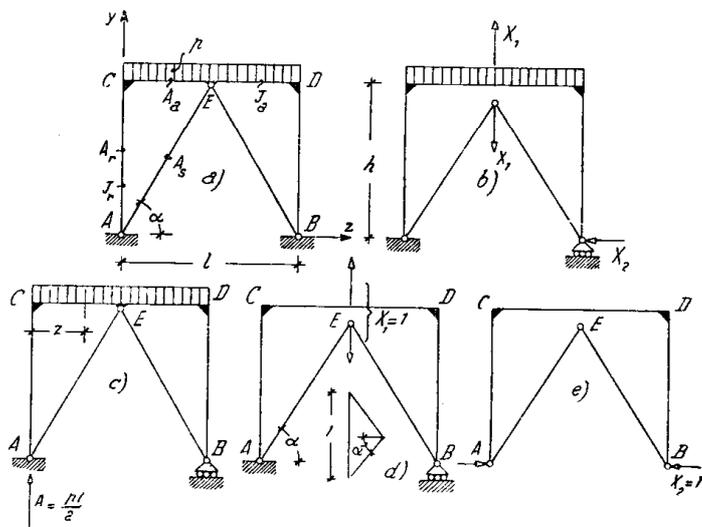


Fig. 131

Supposte prismatiche e tutte dello stesso materiale le varie travi che compongono il sistema, indicati rispettivamente con  $A_r$ ,  $A_a$ ,  $A_s$ , le aree delle sezioni trasversali dei ritte, dell'architrave e dei saettoni, con  $J_r$ ,  $J_a$ ,  $J_s$ , i corrispondenti momenti d'inerzia; avuto riguardo alla simmetria del sistema e prescindendo da autotensioni, si ottiene:

dalle (402):

$$(412) \quad \begin{cases} 0 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 , \\ 0 = \eta_{20} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 ; \end{cases}$$

dalle (395):

$$\begin{aligned} \frac{E\eta_{10}}{2} = & \frac{1}{A_r} \int_B^C N_o N_i dy + \frac{1}{A_a} \int_C^E N_o N_i dz + \frac{1}{A_s \text{sen} \alpha} \int_A^E N_o N_i dy + \\ & + \frac{1}{J_r} \int_A^C M_o M_i dy + \frac{1}{J_a} \int_C^E M_o M_i dz + \frac{1}{J_s \text{sen} \alpha} \int_A^E M_o M_i dy + \\ & + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C T_o T_i dy + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \int_C^E T_o T_i dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_s}{A_s \text{sen} \alpha} \int_A^E T_o T_i dy , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E\eta_{20}}{2} = & \frac{1}{A_r} \int_A^C N_o N_2 dy + \frac{1}{A_a} \int_C^E N_o N_2 dz + \frac{1}{A_s} \int_A^E N_o N_2 ds + \\ & + \frac{1}{J_r} \int_A^C M_o M_2 dy + \frac{1}{J_a} \int_C^E M_o M_2 dz + \frac{1}{J_s} \int_A^E M_o M_2 ds + \\ & + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C T_o T_2 dy + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \int_C^E T_o T_2 dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_s}{A_s} \int_A^E T_o T_2 ds ; \end{aligned}$$

e dalle (397):

$$\begin{aligned} \frac{E\eta_{11}}{2} = & \frac{1}{A_r} \int_A^C N_1^2 dy + \frac{1}{A_a} \int_C^E N_1^2 dz + \frac{1}{A_s} \int_A^E N_1^2 ds + \\ & + \frac{1}{J_r} \int_A^C M_1^2 dy + \frac{1}{J_a} \int_C^E M_1^2 dz + \frac{1}{J_s} \int_A^E M_1^2 ds + \\ & + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C T_1^2 dy + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \int_C^E T_1^2 dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_s}{A_s} \int_A^E T_1^2 ds , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E\eta_{12}}{2} = \frac{E\eta_{21}}{2} = & \frac{1}{A_r} \int_A^C N_1 N_2 dy + \frac{1}{A_a} \int_C^E N_1 N_2 dz + \frac{1}{A_s} \int_A^E N_1 N_2 ds + \\ & + \frac{1}{J_r} \int_A^C M_1 M_2 dy + \frac{1}{J_a} \int_C^E M_1 M_2 dz + \frac{1}{J_s} \int_A^E M_1 M_2 ds + \\ & + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C T_1 T_2 dy + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \int_C^E T_1 T_2 dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_s}{A_s} \int_A^E T_1 T_2 ds , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E\eta_{22}}{2} = & \frac{1}{A_r} \int_A^C N_2^2 dy + \frac{1}{A_a} \int_C^E N_2^2 dz + \frac{1}{A_s} \int_A^E N_2^2 ds + \\ & + \frac{1}{J_r} \int_A^C M_2^2 dy + \frac{1}{J_a} \int_C^E M_2^2 dz + \frac{1}{J_s} \int_A^E M_2^2 ds + \\ & + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C T_2^2 dy + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \int_C^E T_2^2 dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_s}{A_s} \int_A^E T_2^2 ds , \end{aligned}$$

Le caratteristiche che figurano negli integrali si desumono per i vari tronchi dal prospetto seguente:



Sostituendo nelle precedenti espressioni, otteniamo:

$$\frac{E\eta_{10}}{2} = -\frac{pl}{4A_r} \int_A^C dy - \frac{p}{4J_a} \int_C^E (lz^2 - z^3) dz - \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{p}{2} \int_C^E \left(\frac{l}{2} - z\right) dz,$$

$$\frac{E\eta_{20}}{2} = -\frac{ph}{2J_a} \int_C^E (lz - z^2) dz,$$

$$\frac{E\eta_{11}}{2} = \frac{1}{4A_r} \int_A^C dy + \frac{1}{4A_s \sin^2 \alpha} \int_A^E ds + \frac{1}{4J_a} \int_C^E z^2 dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{1}{4} \int_C^E dz,$$

$$\frac{E\eta_{12}}{2} = \frac{h}{2J_a} \int_C^E z dz,$$

$$\frac{E\eta_{22}}{2} = \frac{1}{A_a} \int_C^E dz + \frac{1}{J_r} \int_A^C y^2 dy + \frac{h_2}{J_a} \int_C^E dz + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} \int_A^C dy$$

ed integrando:

$$E\eta_{10} = -\frac{plh}{2A_r} - \frac{5}{384} \frac{pl^3}{J_a} - \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{pl^2}{8},$$

$$E\eta_{20} = -\frac{phl^3}{12J_a},$$

$$E\eta_{11} = \frac{h}{2A_2} + \frac{s}{2A_s \sin^2 \alpha} + \frac{l^3}{48J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_r} \frac{l}{4},$$

$$E\eta_{12} = \frac{h}{J_a} \cdot \frac{l^2}{8},$$

$$E\eta_{22} = \frac{l}{A_a} + \frac{2}{J_r} \frac{h^3}{3} + \frac{h^2 l}{J_a} + \frac{2E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} h.$$

Con ciò le (412) divengono:

$$pl \left( \frac{h}{A_r} + \frac{5}{192} \frac{l^3}{J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{l}{4} \right) = \left( \frac{h}{A_r} + \frac{s}{A_s \sin^2 \alpha} + \frac{l^3}{24J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{l}{2} \right) X_1 + \frac{h}{J_a} \frac{l^2}{4} X_2,$$

$$\frac{pl^3 h}{6J_a} = \frac{h}{J_a} \frac{l^2}{4} X_1 + 2 \left( \frac{l}{A_a} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{J_r} + \frac{h^2 l}{J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_r} 2h \right) X_2,$$

da cui, posto:

$$D_1 = 2 \left( \frac{h}{A_r} + \frac{5}{192} \frac{l^3}{J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{l^3}{4} \right) \left( \frac{l}{A_a} + \frac{2}{3} \frac{h^3}{J_r} + \frac{h^2 l}{J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_r}{A_r} 2h \right) - \frac{h^3 l^4}{24J_a^2},$$

$$D_2 = \left( \frac{h}{A_r} + \frac{s}{A_s \sin^2 \alpha} + \frac{l^3}{24J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{l}{2} \right) \frac{hl^2}{6J_a} - \left( \frac{h}{A_r} + \frac{5}{192} \frac{l^3}{J_a} + \frac{E}{G} \frac{\chi_a}{A_a} \frac{l}{4} \right) \frac{h}{J_a} \frac{l^2}{4},$$

$$D = 2 \left( \frac{h}{A_r} + \frac{s}{A_s \sin^2 \alpha} + \frac{l^3}{24 J_a} + \frac{E \chi_a l}{G A_a 2} \right) \left( \frac{l}{A_a} + \frac{2 h^3}{3 J_r} + \frac{h^2 l}{J_a} + \frac{E \chi_r}{G A_r} 2h \right) - \frac{h^2 l^4}{16 J_a^2},$$

si ottiene:

$$X_1 = pl \frac{D_1}{D}, \quad X_2 = pl \frac{D_2}{D}.$$

### 60 — Trave continua su appoggi cedevoli.

Applicheremo ancora le equazioni di Müller-Breslau alla trattazione della trave continua a sezione variabile con appoggi cedevoli. Supporremo rigidi i due appoggi di estremità, cedevoli — elasticamente od anelastivamente — quelli intermedi, riguardando naturalmente come assegnati i cedimenti anelastici.

Assumeremo ora come incognite iperstatiche le reazioni finite  $C_i$  degli appoggi intermedi e perciò la trave semplice  $AB$  come sistema principale (fig. 132 a).

Supposto questo sistema caricato esclusivamente dalla forza  $P=1$  in corrispondenza della sezione  $I$  sul primitivo appoggio  $C_i$ , costruiamone la linea elastica  $\Gamma_i$ , per esempio col metodo di Mohr (fig. 132 b): tracciando cioè prima il diagramma delle curvature, quindi la funicolare di questo riguardato come diagramma di carico. Sia  $\eta_{si}$  l'ordinata generica di questa linea elastica, il primo indice stando ad indicare la sezione  $S$  di cui si valuta

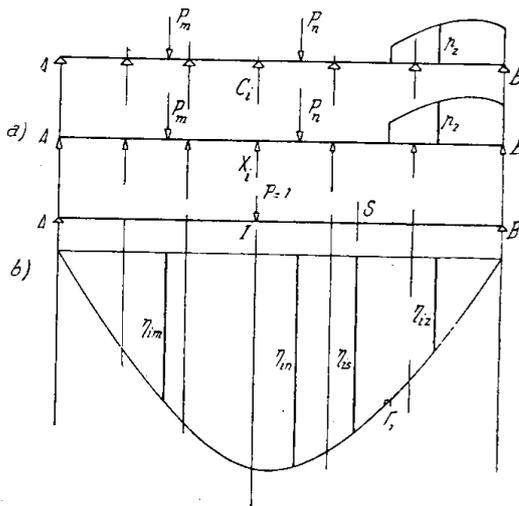


Fig. 132

l'abbassamento, il secondo quella in cui agisce il carico unitario.

Per il Teorema di Maxwell è  $\eta_{si} = \eta_{is}$ ; l'ordinata sulla verticale della sezione corrente  $S$  misura cioè anche l'abbassamento che subisce la sezione  $I$  quando il carico  $P=1$ , anzichè in  $I$ , agisce in corrispondenza di quella sezione  $S$ .

Interpretandovi le  $\eta_{is}$  in questo senso, la  $\Gamma_i$  è la linea d'influenza dell'abbassamento della sezione  $I$ ; essa limita pertanto il diagramma le cui ordinate, lette sulla verticale di un carico unitario viaggiante sulla trave misurano i corrispondenti abbassamenti della sezione  $I$ .

Nota questa linea, la sovrapposizione degli effetti permette di deter-

minare facilmente l'abbassamento della sezione  $I$  dovuto ad un complesso di forze flettenti qualsiasi. Sarà infetti:

per un carico  $P$ , non più unitario, agente in  $S$ :

$$(413) \quad P \eta_{is} ;$$

per un complesso qualsivoglia formato di  $t$  carichi concentrati  $P_1, P_2, \dots, P_s, P_t$ , applicati in altrettante sezioni, e da un carico d'intensità  $p_x$  all'ascissa generica, distribuito su una lunghezza  $\lambda$ :

$$(414) \quad \sum_{s=1}^t P_s \eta_{is} + \int_{\lambda} p_x \eta_{ix} dz .$$

Ci varremo della linea d'influenza  $\Gamma_i$  per scrivere l' $i^{ma}$  equazione di elasticità.

Supposto che il complesso di forze cui corrisponde l'abbassamento espresso dalla (414) sia quello stesso dei carichi assegnati sulla trave ipertatica, è:

$$\eta_{io} = \sum_{s=1}^t P_s \eta_{is} + \int_{\lambda} p_x \eta_{ix} dz ;$$

possiamo quindi calcolare questo primo spostamento come somma dei prodotti dei carichi per le ordinate della  $\Gamma_i$  lette sotto ciascuno di essi ed aggiungendovi il valore dell'integrale corrispondente al carico ripartito. Lo spostamento  $\eta_{ik}$  che moltiplica la generica  $X_k$  è invece misurato direttamente dall'ordinata della  $\Gamma_i$  letta sulla verticale del corrispondente appoggio  $C_k$ .

Determinati così tutti i coefficienti, dovremo scrivere la suddetta  $i^{ma}$  equazione nella forma:

$$(415) \quad \eta_i = \eta_{in} = \eta_{i1} X_1 - \eta_{i2} X_2 - \dots - \eta_{ii} X_i - \dots - \eta_{ik} X_k - \dots - \eta_{in} X_n .$$

perchè essendo  $\eta_{ik}$  lo spostamento (abbassamento) dovuto al carico  $P=1$  applicato alla sezione sul primitivo appoggio  $C_k$ , che riguardiamo positivo se diretto verso il basso, sarà  $-\eta_{ik}$  quello (innalzamento) dovuto alla reazione  $X_k=1$ , che riguardiamo positiva se diretta verso l'alto.

Il secondo membro della (415) uguaglia il cedimento totale — elastico ed anelastico — che effettivamente subisce sotto il carico l'appoggio  $C_i$ . Posto tale cedimento nella forma espressa dalla (2), indichiamo ora con  $\eta^{(i)}$  la parte anelastica e con  $\varepsilon_i$  l'abbassamento elastico dell'appoggio dovuto a una forza  $X_i = -1$ , la  $i^{ma}$  equazione d'elasticità diviene:

$$\eta^{(i)} - \varepsilon_i X_i = \eta_{io} - \eta_{i1} X_1 - \dots - \eta_{ii} X_i - \dots - \eta_{ik} X_k - \dots - \eta_{in} X_n ,$$

oppure, raccogliendo i termini in  $X$ :

$$(416) \quad \eta_i^{(i)} = \eta_{i0} - \eta_{i1} X_1 - \dots - (\eta_{ii} + \varepsilon_i) X_i - \dots - \eta_{ik} X_k - \dots - \eta_{in} X_n .$$

Procedendo così per ogni appoggio intermedio si perviene a un sistema di  $n$  equazioni lineari nelle  $X$ , che pertanto vale a determinare le incognite.

Per poter effettivamente costruire questo sistema occorre però tracciare le  $n$  linee d'influenza — analoghe alla  $\Gamma_i$  — degli abbassamenti degli  $n$  appoggi intermedi: tracciamento questo che, per  $n$  piuttosto grande, sarebbe assai gravoso se ogni linea  $\Gamma_i$  dovesse ottenersi direttamente come deformata del sistema principale per la condizione di carico  $X = 1$ . Ma esso può essere abbreviato grazie alla possibilità di dedurre le  $n-2$  linee intermedie dalle due estreme, tracciate preventivamente.

Mostreremo qui brevemente si ottenga la  $i^{ma}$  linea.

Costruite le linee  $\Gamma_i$  (figura 133 b) e  $\Gamma_n$  (fig. 133 d), supponiamo intanto tracciata anche la  $\Gamma_i$  (figura 133 c) e siano  $t_{ii}, t_{ni}, t_{ii}$  le tangenti ad esse rispettivamente nei punti  $I_1, I_n, I_i$ , della verticale del primitivo appoggio  $C_i$ .

Tanto per la condizione di carico  $X_i = -1$  che per quella  $X_i = +1$ , la porzione di sistema principale che rimane a destra della sezione  $I$  (fig. 133 f) si comporta staticamente ed elasticamente come una mensola incastrata in corrispondenza della sezione  $I$  e caricata esclusivamente da una forza applicata in  $B$ , rivolta verso l'alto, d'intensità pari alla reazione dell'appoggio  $B$  e che, rispettivamente per le dette condizioni di carico, vale:

$$(417) \quad B_i = 1 \frac{a_i}{l} \quad , \quad B_i = 1 \frac{a_i}{l} .$$

Le ordinate della linea elastica, lette a partire dalla tangente ad essa in corrispondenza dell'incastro, sono proporzionali al carico: risultano perciò affini le deformate corrispondenti ai due valori (417) della forza  $B_i$  applicata all'estremo libero.

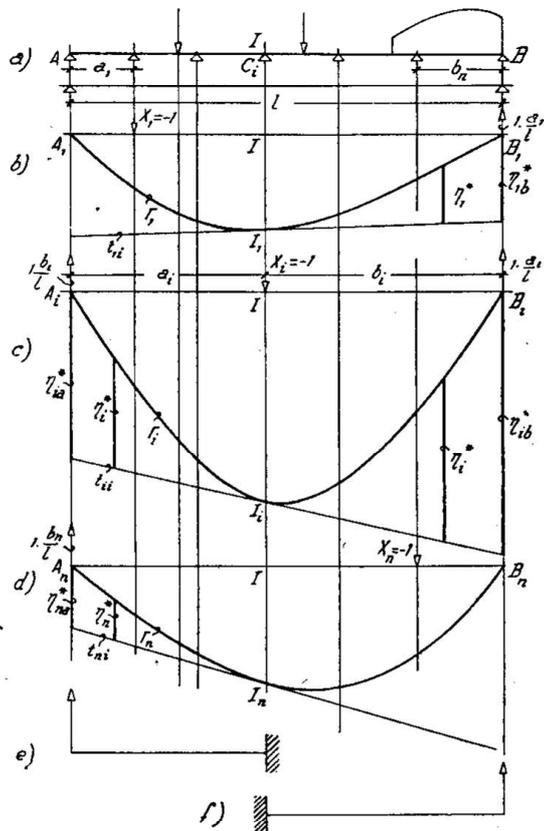


Fig. 133

Nota pertanto la linea elastica dovuta alla  $B$  — la porzione  $I_1 B_1$  della  $\Gamma_1$  — moltiplicandone le ordinate  $\eta_i^*$  per il rapporto d'affinità:

$$\frac{B_i}{B_1} = \frac{a_i}{a_1}$$

e portando, a partire dalla tangente  $t_{ii}$  le nuove ordinate  $\eta_i^*$  così ottenute, si può dedurre la deformata dovuta alla  $B_i$ , la quale coincide con la porzione  $I_1 B_i$  della  $\Gamma_i$ .

Similmente si dimostra che il tratto  $A_i I_i$  si ottiene portando, sempre dalla tangente  $t_{ii}$ , le ordinate  $\eta_i^*$  della porzione  $A_n I_n$  della  $\Gamma_n$  moltiplicate per il rapporto:

$$\frac{A_i}{A_n} = \frac{b_i}{b_n}$$

Occorre naturalmente far precedere la determinazione della  $t_{ii}$ , che viene fatta calcolando le ordinate:

$$(418) \quad \eta_{ia}^* = \eta_{ina}^* \frac{b_i}{b_n}, \quad \eta_{ib}^* = \eta_{inb}^* \frac{a_i}{a_n},$$

ch'essa stacca sulle verticali degli appoggi  $A$  e  $B$ .

La ricerca dei coefficienti  $\eta$  delle equazioni di Müller-Breslau potrebbe esse fatta senza difficoltà tenendo anche conto dell'influenza del taglio sulla deformazione; in genere è perciò lecito prescindere da tale contributo.

### 61 — Risoluzione delle travature iperstatiche col Teorama di Menabrea.

Tra le infinite ennuple di parametri iperstatici riferentesi ad uno stesso sistema principale isostatico d'una travatura  $n$  volte staticamente indeterminata, e che soddisfino all'equilibrio, si può ricercare quella relativa all'equilibrio effettivo della travatura, ossia l'unica che al tempo stesso soddisfi alle condizioni di congruenza e di compatibilità coi vincoli, attraverso il principio di minimo di Menabrea (n° 34/I).

Esprese all'uopo le caratteristiche della sollecitazione per l'equilibrio effettivo nella forma (393), la somma  $\Phi$  delle energie potenziali elastiche spettanti alle parti in cui la travatura deve considerarsi suddivisa trattandosi in generale di stati d'equilibrio incompatibili coi vincoli, può esprimersi come funzione quadratica delle  $X_i$ .

Il minimo di tale funzione, coincidente col lavoro di deformazione, corrisponde all'equilibrio effettivo in assenza di autotensioni ed è caratterizzato dalle  $n$  condizioni simultanee  $\partial\Phi/\partial X_i = 0$ .

Ricordando le (5) avremo cioè il sistema di equazioni:

$$(419) \quad 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_i} ds + \int_s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_i} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_i} ds \quad (X=1,2,\dots,n),$$

che in base alle (393) si riconoscono lineari nelle incognite iperstatiche  $X_k$ .

Le equazioni di elasticità di una travatura soggetta esclusivamente all'azione di carichi, prescindendo cioè da eventuali autotensioni, possono pertanto ottenersi scrivendo il lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne e delle incognite iperstatiche, e uguagliandone a zero le derivate parziali prime rispetto alle incognite stesse.

Le stesse (393), derivate rapporto ad  $X_i$ , forniscono:

$$\frac{\partial N}{\partial X_i} = N_i \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial X_i} = M_i \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial X_i} = T_i :$$

si constata così che la derivata rapporto ad  $X_i$  della funzione esprime una data caratteristica della sollecitazione è uguale al valore che quella caratteristica assume nel sistema principale soggetto al carico d'esplorazione  $X_i=1$ . Tenuto conto di ciò ed avuto riguardo ancora alle (393) nonchè alle (395), le (419) si riconoscono identiche alle (402).

## 62 — Applicazioni del Teorema di Menabrea.

Una trave incastrata ad un estremo ed incernierata all'altro sia gravata in tutta la sua lunghezza da un carico  $P=pl$  non ortogonale all'asse (fig. 134). Il sistema presenta complessivamente cinque condizioni di vincolo e comporta quindi due indeterminazioni esterne.

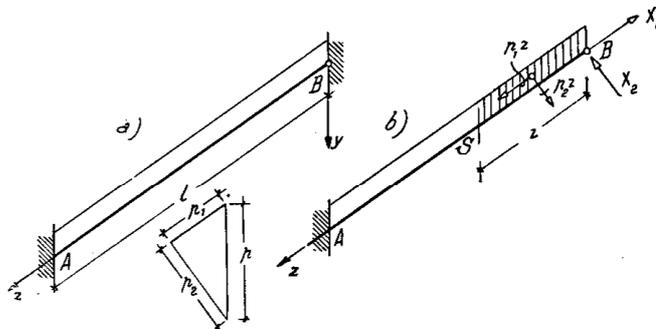


Fig. 134

Considereremo come sistema principale la mensola incastrata in A, alla quale

ci riduciamo svincolando l'unione in B; assumeremo così come iperstatiche due componenti  $X_1$  ed  $X_2$  della reazione della cerniera.

L'applicazione delle (419) porta alle equazioni:

$$\int_l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_1} dz + \int_l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_1} dz + \int_l \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_1} dz = 0 ,$$

$$\int_l \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_2} dz + \int_l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_2} dz + \int_l \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_2} dz = 0 .$$

Scegliamo le componenti della reazione della cerniera dirette: la  $X_1$  secondo l'asse della trave, la  $X_2$  normale alla precedente; scomponiamo inoltre il carico assegnato nel carico assiale  $P_1 = p_1 l$  ed in quello flettente  $P_2 = p_2 l$ .

La forza normale  $N$  per la sezione  $S$  all'ascissa  $z$  vale:

$$N = X_1 - p_1 z;$$

il momento flettente  $M$  per la stessa sezione - somma algebrica, cambiata di segno, dei momenti di tutte le forze alla destra di  $S$  - vale analogamente:

$$M = X_2 z - p_2 \frac{z^2}{2};$$

e così per il taglio:

$$T = -X_2 + p_2 z.$$

Le derivate che figurano nelle equazioni d'elasticità sono allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial X_1} = 1 & \quad , & \quad \frac{\partial N}{\partial X_2} = 0 , \\ \frac{\partial M}{\partial X_1} = 0 & \quad , & \quad \frac{\partial M}{\partial X_2} = z , \\ \frac{\partial T}{\partial X_1} = 0 & \quad , & \quad \frac{\partial T}{\partial X_2} = -1 , \end{aligned}$$

per modo che, supposta la trave prismatica ed omogenea, le (419) divengono:

$$\frac{1}{EA} \int_0^l (X_1 - p_1 z) dz = 0 \quad , \quad \frac{1}{EA} \int_0^l \left( X_2 z - p_2 \frac{z^2}{2} \right) z dz + \frac{\chi}{GA} \int_0^l (X_2 - p_2 z) dz = 0 .$$

Sviluppando nella prima e successivamente risolvendo per  $X_1$  si ottiene:

$$X_1 = \frac{p_1 l}{2} = \frac{P_1}{2};$$

e dalla seconda, moltiplicando prima per  $EJ = EA \rho^2$ :

$$X_2 \frac{l}{3} - \frac{p^2}{2} \frac{l^3}{4} + \frac{E}{G} \chi \rho^2 \left( X_2 l - p_2 \frac{l^2}{2} \right) = 0 ,$$

da cui, con facili calcoli:

$$X_2 = \frac{3}{8} P_2 \frac{1 + 4 \frac{E}{G} \chi \left( \frac{\rho}{l} \right)^2}{1 + 3 \frac{E}{G} \chi \left( \frac{\rho}{l} \right)^2} .$$

\* \* \*

Come secondo esempio risolveremo una trave prismatica incastrata agli estremi, soggetta ad una forza concentrata  $P$  non ortogonale all'asse, agente all'ascissa  $b$  (fig. 135 a).

Assumiamo come incognite iperstatiche i tre parametri della reazione dell'incastrato di destra: le componenti finite  $X_1$  e  $X_2$  ed il momento d'incastrato  $X_3$  (fig. 135 b).

Le equazioni di elasticità sono:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_3} = 0,$$

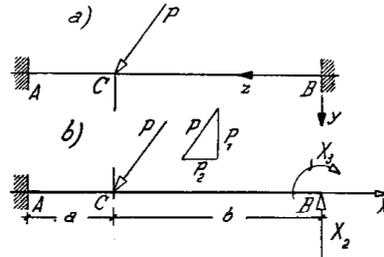


Fig. 135

essendo sempre la generica di esse della forma:

$$\int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_i} ds + \int_s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X_i} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_i} ds = 0.$$

Dette rispettivamente  $P_1$  e  $P_2$  le componenti assiale a flettente di  $P$ , le caratteristiche della sollecitazione nei due tronchi di trave separati dal punto d'applicazione del carico valgono:

Tratto	$N$	$M$	$T$
BC	$X_1$	$X_2 z + X_3$	$-X_2$
CA	$X_1 - P_1$	$X_2 z + X_3 - P_2(z - b)$	$-X_2 + P_2$

Le derivate che figurano nelle equazioni d'elasticità sono allora le seguenti:

Tratto	$\frac{\partial N}{\partial X_1}$	$\frac{\partial M}{\partial X_1}$	$\frac{\partial T}{\partial X_1}$	$\frac{\partial N}{\partial X_2}$	$\frac{\partial M}{\partial X_2}$	$\frac{\partial T}{\partial X_2}$	$\frac{\partial N}{\partial X_3}$	$\frac{\partial M}{\partial X_3}$	$\frac{\partial T}{\partial X_3}$
BC	1	0	0	0	$z$	-1	0	1	0
CA	1	0	0	0	$z$	-1	0	1	0

Le equazioni del sistema pertanto divengono:

$$\frac{1}{EA} \int_B^C X_1 dz + \frac{1}{EA} \int_C^A (X_1 - P_1) dz = 0,$$

$$\frac{1}{EJ} \left\{ \int_B^C (X_2 z + X_3) z dz + \int_C^A [X_2 z + X_3 - P_2(z - b)] z dz \right\} + \frac{\chi}{GA} \left[ \int_B^C X_2 dz + \int_C^A (X_2 - P_2) dz \right] = 0,$$

$$\frac{1}{EJ} \left\{ \int_B^C (X_2 z + X_3) dz + \int_C^A [X_2 z + X_3 - P_2(z-b)] dz \right\} = 0;$$

e successivamente:

$$X_1 l - P_1 a = 0,$$

$$X_2 \frac{l^3}{3} + X_3 \frac{l^2}{2} - P_2 \left( \frac{l^3 - b^3}{3} - b \frac{l^2 - b^2}{2} \right) + \frac{E}{G} \chi \rho^2 (X_2 l - P_2 a) = 0,$$

$$X_2 \frac{l^2}{2} + X_3 l - P_2 \left( \frac{l^2 - b^2}{2} - ab \right) = 0.$$

Da queste, risolvendo, si trae:

$$X_1 = P_1 \frac{a}{l},$$

$$X_2 = P_2 \left( \frac{a}{l} \right)^3 \frac{1 + 3 \frac{b}{a} + 12 \frac{E}{G} \chi \left( \frac{\rho}{a} \right)^2}{1 + 12 \frac{E}{G} \chi \left( \frac{\rho}{a} \right)^2},$$

$$X_3 = P_2 \frac{a^2 b}{l^2} \frac{1 + 6 \frac{E}{G} \chi \frac{\rho^2}{al}}{1 + 12 \frac{E}{G} \chi \left( \frac{\rho}{l} \right)^2}.$$

### 63 — Il principio dei lavori virtuali sotto la forma variazionale.

La risoluzione dei problemi iperstatici viene talora facilitata ricorrendo ad un principio di minimo cui si perviene partendo dal principio dei lavori virtuali espresso in forma variazionale.

Supponiamo per semplicità che sul sistema elastico agiscano esclusivamente forze esterne — esplicite e reazioni — concentrate; la (379) scritta per la deformazione effettiva fornisce:

$$\sum P \eta_i = \int_s \frac{N^2 ds}{EA} + \int_s \frac{M^2 ds}{EJ} + \int_s \chi \frac{T^2 ds}{GA} = 2 \Phi_i.$$

Diamo agli spostamenti  $\eta$ , già subiti dai punti del sistema, una piccola variazione  $\delta \eta$ ; ne risulterà una variazione del lavoro prodotto dalle forze esterne  $\sum P \delta \eta$ , mentre il lavoro interno  $\Phi_i$  subirà a sua volta la variazione  $\delta \eta \Phi_i$ , dove l'indice  $\eta$  serve a indicare che la variazione è intervenuta negli spostamenti e nei parametri della deformazione.

Dovendo la variazione del lavoro interno essere uguale a quella del lavoro esterno, cioè:

$$\delta\eta\Phi_I = \sum P\delta\eta,$$

segue:

$$\delta\eta(\Phi_I - \sum P\eta) = 0;$$

infine, indicando il lavoro esterno con:

$$L_e = \frac{1}{2} \sum P\eta,$$

si ottiene:

$$(420) \quad \delta\eta(\Phi_I - 2L_e) = 0.$$

Analogamente facendo intervenire la variazione nelle forze e nei parametri della tensione, otterremo:

$$(421) \quad \delta_P(\Phi_I - 2L_e) = 0.$$

In ogni caso risulta valido il principio di minimo per l'espressione:

$$\Phi_I - 2L_e.$$

La (420) si può applicare alla risoluzione di travature staticamente indeterminate assumendo come incognite del problema gli spostamenti  $\eta_1, \eta_2, \dots$  di un certo numero di punti e determinandoli mediante le equazioni:

$$(422) \quad \frac{\partial(\Phi_I - 2L_e)}{\partial \eta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Alcuni esempi chiariranno meglio la portata del metodo.

\* \* \*

Si tratti di risolvere la trave prismatica  $AB$ , vincolata rigidamente a cerniera ad entrambi gli estremi e soggetta ad una forza assiale  $P$  alla ascissa  $z = a$  (fig. 136).

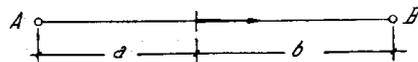


Fig. 136

Indicando con  $\zeta$  lo spostamento che il punto d'applicazione della forza subisce nella deformazione elastica, sarà anzitutto:

$$L_e = \frac{1}{2} P\zeta;$$

dette inoltre  $X_a$  e  $X_b$  le reazioni delle cerniere, avremo:

$$\Phi_I = \Phi_a + \Phi_b = \frac{X_a^2 a}{2EA} + \frac{X_b^2 b}{2EA},$$

o anche, essendo:

$$(423) \quad \zeta = \frac{X_a a}{EA} = \frac{X_b b}{EA},$$

$$\Phi_1 = \frac{EA\zeta^2}{2b} + \frac{EA\zeta^2}{2a}.$$

Sostituendo nella (420), avremo così:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{EA\zeta^2}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - P\zeta \right] = 0,$$

da cui, successivamente:

$$EA\zeta \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) - P = 0, \quad \zeta = \frac{P}{EA} \frac{ab}{l}.$$

Le reazioni risultano dalle (423):

$$X_a = Pb/l, \quad X_b = Pa/l.$$

\* \* \*

Consideriamo ancora il sistema elastico simmetrico e simmetricamente caricato rappresentato in figura 137.

Detto  $\eta$  lo spostamento, necessariamente verticale, del punto  $D$ , sarà:

$$L_e = \frac{1}{2} P\eta;$$

mentre il lavoro interno, con le notazioni della figura, vale:

$$\Phi_1 = 2 \frac{EA \overline{\Delta s_1^2}}{2s} + \frac{E_1 A_1 \overline{\Delta s_1^2}}{2s_1},$$

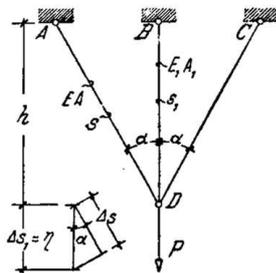


Fig 137

o anche:

$$\Phi_1 = \frac{EA\eta^2 \cos^3 \alpha}{h} + \frac{E_1 A_1 \eta^2}{2h} = \frac{\eta^2}{h} \left( EA \cos^3 \alpha + \frac{E_1 A_1}{2} \right).$$

Sostituendo nella (420) otteniamo la funzione che deve rendersi minima:

$$\frac{\eta^2}{h} \left( EA \cos^3 \alpha + \frac{E_1 A_1}{2} \right) - P\eta,$$

sicchè, derivando rapporto ad  $\eta$  ed uguagliando a zero, si ottiene:

$$\frac{2}{h} \eta \left( EA \cos^3 \alpha + \frac{E_1 A_1}{2} \right) = P,$$

da cui:

$$\eta = \frac{Ph}{2EA \cos^3 \alpha + E_1 A_1}.$$

Gli sforzi nelle aste valgono:

$$S = \frac{EA}{h} \eta \cos^2 \alpha \quad , \quad S_1 = \frac{E_1 A_1}{h} \eta \quad .$$

#### 64 — Risoluzione delle equazioni d'elasticità.

La regola di Cramer porta alle espressioni delle incognite:

$$(424) \quad X_k = \frac{D_k}{D} = \frac{D_{1k}}{D} \eta_{10} + \frac{D_{2k}}{D} \eta_{20} + \dots + \frac{D_{nk}}{D} \eta_{n0} \quad ,$$

dove notoriamente  $D \neq 0$  è il determinante dei coefficienti,  $D_k$  quello che si ottiene sostituendo la colonna  $k^{ma}$  della matrice (400) con la colonna dei termini noti,  $D_{ik}$  il complemento algebrico di  $\eta_{ik}$  in  $D$ , cioè il determinante di ordine  $n-1$  che si ottiene cancellando in  $D$  la riga  $k$  e la colonna  $i$ .

I rapporti  $\xi_{ik} = D_{ik}/D$  dipendono, come gli  $\eta_{ik}$ , dalle caratteristiche geometriche ed elastiche della travatura e del sistema principale di riferimento, mentre sono indipendenti dal carico.

Evidentemente, essendo  $D_{ik} = D_{ki}$ , è pure  $\xi_{ik} = \xi_{ki}$ , per cui può scriversi:

$$(425) \quad X_k = \sum_{i=1}^n \xi_{ik} \eta_{i0} \quad ,$$

donde si rileva che  $\xi_{ik}$  è il valore dell'iperstatica  $X_k$  quando sia  $\eta_{i0} = 1$  e si annullino tutti gli altri termini di carico.

La matrice dei coefficienti  $\xi$ :

$$(426) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc|c} \eta_{10} & \eta_{20} & \dots & \eta_{i0} & \dots & \eta_{n0} & X \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1i} & \dots & \xi_{1n} & X_1 \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2i} & \dots & \xi_{2n} & X_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i1} & \xi_{i2} & \dots & \xi_{ii} & \dots & \xi_{in} & X_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{ni} & \dots & \xi_{nn} & X_n \end{array} \right.$$

coniugata della (400), contiene come quella, al più,  $n(n+1)/2$  elementi tra loro distinti:

gli  $n$  della diagonale principale, tutti positivi, del tipo  $\xi_{ii} (i = k)$ ,

gli  $n(n-1)/2$  positivi, negativi o nulli, a due a due simmetrici rispetto a detta diagonale, del tipo  $\xi_{ik} (i \neq k)$ .

L'uso della matrice coniugata torna particolarmente comodo quando debbano essere esaminate parecchie situazioni di carico o di autotensione, in particolare quando interessi la legge di variazione della  $X_k$  per un ca-

rico unitario che si sposti sulla travatura con legge assegnata, occorre cioè conoscere la linea d'influenza della  $X_k$ .

Spesso è necessario introdurre nei calcoli un numero di cifre assai superiore a quello che si desidera ottenere nei valori delle iperstatiche; ove questi risultino come differenze di quantità prossime tra loro, non sono rari i casi in cui si riconoscono insufficienti le ordinarie tavole di logaritmi con sette decimali.

Come risulta dalle (424), un errore  $\Delta D$  nella valutazione di  $D$  si ripercuote su tutte le iperstatiche, la generica delle quali diviene:

$$(427) \quad X'_k = \frac{D_k}{D'} = \frac{D_k}{D + \Delta D} = \frac{D_k}{D} \left( \frac{1}{1 + \frac{\Delta D}{D}} \right) = X_k \left( 1 - \frac{\Delta D}{D'} \right) = X_k (1 - \varphi).$$

Se  $\pm e_{ik} \eta_{ik}$  è l'errore del coefficiente  $\eta_{ik}$ , talchè questo intervenga nel determinante col valore  $\eta'_{ik} = \eta_{ik} (1 \pm e_{ik})$ , per  $e_{ik} = e = \text{cost.}$  abbastanza piccolo da poter limitare ai termini di primo grado lo sviluppo di  $D'$  in serie di potenze di  $e$ , avremo:

$$(428) \quad \varphi = \frac{\Delta D}{D'} = \frac{e}{D'} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{ik} D_{ik}.$$

L'errore  $\varphi X_k = X'_k - X_k$  è massimo per:

$$(429) \quad \varphi = \pm \frac{e}{D'} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{ik} D_{ik},$$

quando cioè siano tutti positivi gli  $n^2$  prodotti degli elementi  $\eta_{ik}$  della matrice (400) per i corrispondenti complementi algebrici.

Poichè notoriamente, per la colonna  $i$ , arbitrariamente scelta fra le  $n$  della matrice (400), è  $D' = \sum_{k=1}^n \eta_{ik} D_{ik}$  quando il generico  $D_{ik}$  venga preso col segno  $(-1)^{i+k}$ ,  $\varphi$  è tanto più grande per un dato  $e \neq 0$ , quanto maggiore è la differenza  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{ik} D_{ik} - nD'$ , cioè quanto più piccolo è  $D'$ . Al tendere di  $D'$  a zero,  $\varphi$  cresce oltre ogni limite. Il minimo valore di  $\varphi$  si ha invece per  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \eta_{ik} D_{ik} = nD'$ , ed è quindi  $\varphi = \pm en$ .

La sensibilità agli errori diminuisce variando le ennupla di parametri iperstatici, cioè il sistema principale di riferimento, in modo da accrescere il valore di  $D'$ .

Convieni all'uopo scegliere i legami iperstatici in modo che la loro soppressione alteri il meno possibile l'equilibrio elastico della travatura effettiva. Le iperstatiche hanno allora valori moderati ed influiscono in piccola misura nelle (392); gli elementi della diagonale principale ( $i = k$ )

della matrice (400) divengono preponderanti, mentre si annullano o risultano relativamente piccoli gli altri ( $i \neq k$ ) i quali caratterizzano l'influenza mutua delle iperstatiche.

65 — **Travature con molte iperstatiche.**

Gli ordinari metodi di risoluzione dei sistemi lineari, basati sulla regola di Cramer o sulla eliminazione delle incognite, divengono troppo laboriosi non appena le equazioni siano in numero superiore a quattro o cinque. e lungaggini dei calcoli possono invece essere abbreviate ricorrendo a particolari metodi di eliminazione e sostituzione o di iterazione.

Gli artifici all'uopo suggeriti, spesso improntati ad un medesimo principio, benchè differenti per gli sviluppi formali, sono in realtà assai numerosi. Ci limiteremo qui a ricordare alcuni tra quelli di uso più comodo e frequente.

A) **METODO DI GAUSS.**

Ricaviamo l'incognita  $X_i$  dalla prima equazione - equazione 1 - e sostituiamone l'espressione nelle rimanenti. Si ottiene così il *sistema normale ridotto del primo ordine*, mancante dell'equazione 1<sup>(o)</sup> e della prima incognita, e nel quale al coefficiente  $k^{mo}$  generico  $\eta_{rk}$  della equazione  $r$  del sistema dato è subentrato l'altro:

$$(430) \quad \eta_{rk}^{(1)} = \eta_{rk} - \frac{\eta_{ik}}{\eta_{ii}} \eta_{ik} = \eta_{rk} + c_{ir} \eta_{ik}$$

ed al termine noto  $\eta_{ro}$  quello:

$$(431) \quad \eta_{ro}^{(1)} = \eta_{ro} + c_{ir} \eta_{io} ,$$

come può facilmente verificarsi moltiplicando la prima equazione del sistema dato per  $-\eta_{ir}/\eta_{ii} = c_{ir}$  e sommandola alla equazione  $r$ .

L'esattezza dei calcoli si controlla effettuando le somme algebriche:

$$(432) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\eta}_i = \eta_{i2} + \eta_{i1} + \dots + \eta_{in} \\ \bar{\eta}_r = \eta_{r1} + \eta_{r2} + \dots + \eta_{rn} \\ \bar{\eta}_r^{(1)} = \eta_{r2}^{(1)} + \eta_{r2}^{(1)} + \dots + \eta_{rn}^{(1)} \end{array} \right.$$

e verificando le identità:

$$(433) \quad \bar{\eta}_r^{(1)} = \bar{\eta}_r + c_{ir} \bar{\eta}_i .$$

Operiamo poi nei confronti della  $X_2$  del sistema ridotto del primo ordine come per la  $X_1$  sul sistema dato: ricavando dalla equazione 2<sup>(o)</sup>

la  $X_2$  e sostituendone l'espressione nelle rimanenti  $r^{(1)}$  otterremo il *sistema normale ridotto del secondo ordine*, mancante delle equazioni  $1^{(2)}$  e  $2^{(2)}$ , nonchè delle prime due incognite e nel quale al coefficiente  $k^{mo}$  generico  $\eta_{rk}^{(1)}$  dell'equazione  $r$  è subentrato l'altro:

$$(434) \quad \eta_{rk}^{(2)} = \eta_{rk}^{(1)} - \frac{\eta_{2r}^{(1)} \eta_{2k}^{(1)}}{\eta_{22}^{(1)}} = \eta_{rk}^{(1)} + c_{2r} \eta_{2k}^{(1)} = \eta_{rk} + c_{1r} \eta_{1k} + c_{2r} \eta_{2k}^{(1)}$$

ed al termine noto  $\eta_{ro}^{(1)}$  quello:

$$(435) \quad \eta_{ro}^{(2)} = \eta_{ro} + c_{1r} \eta_{10} + c_{2r} \eta_{20}^{(1)},$$

come si riscontra moltiplicando l'equazione  $2^{(1)}$  per  $-\eta_{2r}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)} = c_{2r}$  e sommandola alla  $r^{(1)}$ . Per verifica dev'essere:

$$(436) \quad \bar{\eta}_r^{(2)} = \bar{\eta}_r^{(1)} + c_{2r} \bar{\eta}_2^{(1)}.$$

Così continuando perverremo al sistema normale ridotto di  $i_{mo}$  ordine, mancante delle equazioni  $1^{(i)}, 2^{(i)}, \dots, i^{(i)}$  nonchè delle incognite  $X_1, X_2, \dots, X_i$ , alle cui equazioni  $r^{(i)}$  spettano i coefficienti:

$$(437) \quad \eta_{rk}^{(i)} = \eta_{rk}^{(i-1)} - \frac{\eta_{ir}^{(i-1)} \eta_{ik}^{(i-1)}}{\eta_{ii}^{(i-1)}} = \eta_{rk}^{(i-1)} + c_{ir} \eta_{ik}^{(i-1)} = \eta_{rk} + c_{1r} \eta_{1k} + c_{2r} \eta_{2k}^{(1)} + \dots + c_{ir} \eta_{ik}^{(i-1)},$$

il termine noto:

$$(438) \quad \eta_{ro}^{(i)} = \eta_{ro} + c_{1r} \eta_{10} + c_{2r} \eta_{20}^{(1)} + \dots + c_{ir} \eta_{io}^{(i-1)}$$

e la verifica:

$$(439) \quad \bar{\eta}_r^{(i)} = \bar{\eta}_r^{(i-1)} + c_{ir} \bar{\eta}_i^{(i-1)}.$$

Giungeremo infine al sistema ridotto di ordine  $n-1$ , costituito dalla sola equazione  $n^{(n-1)}$  nella sola incognita  $X_n$ , col coefficiente:

$$(440) \quad \eta_{nn}^{(n-1)} = \eta_{nn}^{(n-2)} - \frac{\eta_{n-1,n}^{(n-2)} \cdot \eta_{n-1,n}^{(n-2)}}{\eta_{n-1,n-1}^{(n-2)}} = \eta_{nn}^{(n-2)} + c_{n-1,n} \eta_{n-1,n}^{(n-2)} = \eta_{nn} + c_{1n} \eta_{1n} + c_{2n} \eta_{2n}^{(1)} + \dots + c_{n-1,n} \eta_{n-1,n}^{(n-2)}$$

ed il termine noto:

$$(441) \quad \eta_{no}^{(n-1)} = \eta_{no} + c_{1n} \eta_{10} + c_{2n} \eta_{20}^{(1)} + \dots + c_{n-1,n} \eta_{n-1,0}^{(n-2)}.$$

Avremo cioè:

$$\eta_{nn}^{(n-1)} X_n = -\eta_{no}^{(n-1)}$$

donde:

$$(442) \quad X_n = -\eta_{no}^{(n-1)} / \eta_{nn}^{(n-1)}.$$

Dopo ciò si può trarre l'incognita  $X_{n-1}$  da un'equazione qualunque del sistema di ordine  $n-2$ , la  $X_{n-2}$  da un'equazione del sistema di ordine  $n-3$  e così via risalendo, fino a determinare l'incognita  $X_1$  da una equazione qualsiasi del sistema dato.