

CAPITOLO VII

TRAVI PIANE AD ASSE CURVILINEO

43 — Generalità.

Nella costruzione di macchine è frequente l'impiego di travi piane il cui asse presenta raggio di curvatura dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni della sezione trasversale nella direzione del raggio stesso. Lo studio di questi solidi particolari dovrebbe a rigore essere basato sulla teoria generale dell'elasticità, tuttavia in molti casi è applicabile ad essi la teoria delle travi, opportunamente modificata. La relativa trattazione approssimata poggia sulle seguenti ipotesi semplificative, in verità alquanto arbitrarie:

si ammette che le sezioni trasversali si conservino piane nella deformazione;

si prescinde dall'influenza delle deformazioni trasversali;

si trascurano le tensioni trasversali che in una trave curva accompagnano necessariamente quelle longitudinali.

Prendiamo in esame il tronco elementare di trave situato fra le sezioni S, S' , ortogonali all'asse ed i cui piani comprendono l'angolo $d\varphi$ (figu-

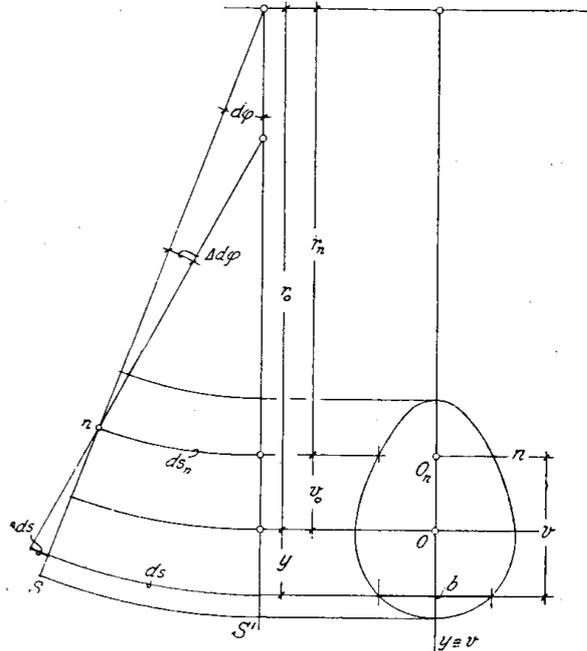


Fig. 112

ra 112). Supposta verificata la condizione dichiarata al n. 1 a proposito delle travi piane, le caratteristiche della sollecitazione sono, al più, una coppia flettente M , una forza normale centrata N ed un taglio T . In generale perciò la sezione S ruoterà nella deformazione, rispetto alla sezione S' , di un angolo $\Delta d\varphi$, intorno ad un asse n ovviamente normale all'asse di sollecitazione y , non passante per il baricentro O .

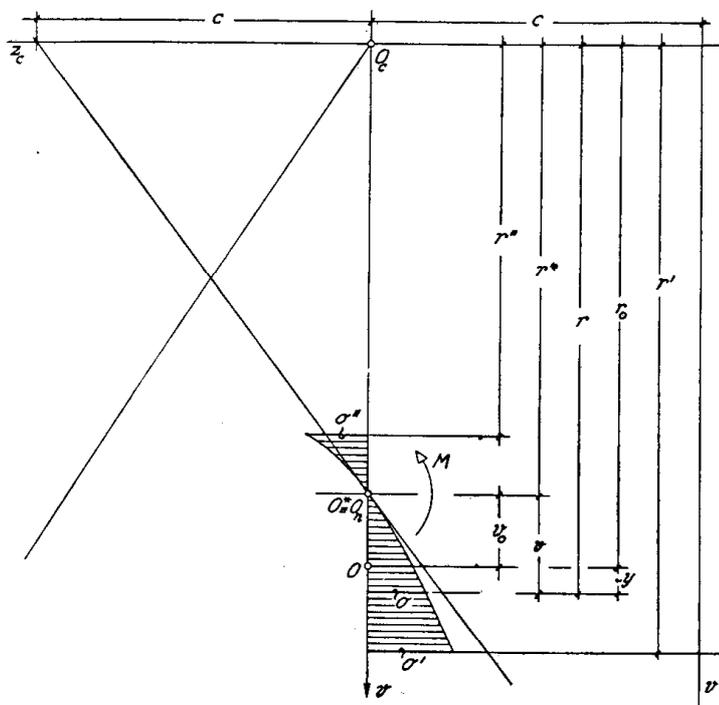


Fig. 113

Le fibre del tronco adagiate sulla superficie cilindrica avente l'asse di rotazione n come generatrice, di lunghezza:

$$ds_n = r_n d\varphi = (r_0 - v_0) d\varphi,$$

conservano, per le ipotesi fatte, inalterata questa lunghezza, mentre ogni altra fibra parallela alla precedente, di lunghezza:

$$ds = (r_n + v) d\varphi = ds_n + v d\varphi = (r_0 + y) d\varphi,$$

subirà la variazione:

$$\Delta ds = v \Delta d\varphi.$$

A questa corrispondono la dilatazione:

$$(340) \quad \epsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{v}{r_n + v} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$$

che, posto $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega$, $r_n + v = r$, può scriversi:

$$\epsilon = \omega v/r,$$

e conseguentemente, per la legge di Hooke, la tensione:

$$(341) \quad \sigma = E \omega v/r,$$

variabile nella sezione con legge iperbolica.

44 — Sollecitazione a flessione.

Supponiamo dapprima che le caratteristiche della sollecitazione si riducano al solo momento flettente M (fig. 113). L'equilibrio porta allora alle equazioni:

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad , \quad \int_A \sigma v dA = M \quad ,$$

le quali, per la (341), possono scriversi:

$$(342) \quad \int_A \frac{v}{r} dA = 0 \quad , \quad E \omega \int_A \frac{v^2}{r} dA = M \quad .$$

Se sostituiamo le corde b della sezione con le altre:

$$(343) \quad b' = \frac{r_0}{r} b \quad ,$$

otteniamo una nuova sezione, la *prima trasformata*, il cui elemento superficiale generico ha l'espressione:

$$(344) \quad dA' = \frac{r_0}{r} dA \quad ,$$

ed alla cui area:

$$(345) \quad A' = r_0 \int_A \frac{dA}{r} \quad ,$$

osservando che è:

$$(346) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + y} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{y}{r_0} + \frac{y^2}{r_0^2} - \frac{y^3}{r_0^3} + \dots \right) \quad ,$$

può darsi l'espressione:

$$(345') \quad A' = \int_A \left(1 - \frac{y}{r_0} + \frac{y^2}{r_0^2} - \frac{y^3}{r_0^3} + \dots \right) dA \quad .$$

Con ciò la prima delle (342) fornisce:

$$(347) \quad \int_{A'} v dA' = 0 \quad ,$$

la quale dichiara che *l'asse neutro è baricentrico per la sezione trasformata*, mentre non lo era per la sezione effettiva. La proprietà ora dimostrata può essere utilizzata per la determinazione dell'asse n^* e quindi della relativa distanza r^* di esso dall'asse di curvatura (fig. 113); tuttavia basta per que-

sto conoscere l'area A' . Infatti dalla prima delle (342) si trae:

$$(348) \quad \int_A \frac{v}{r} dA = \int_A \frac{r-r^*}{r} dA = A - r^* \int_A \frac{dA}{r} = 0,$$

e, per la (345):

$$A - r^* \frac{A'}{r_0} = 0,$$

donde:

$$(349) \quad r^* = r_0 \frac{A}{A'}.$$

La seconda equazione d'equilibrio, introdotto il momento d'inerzia della prima trasformata:

$$J' = \int_{A'} v^2 dA',$$

diviene:

$$M = EJ' \omega / r_0;$$

confrontando poi questa con la (341), si ottiene:

$$(350) \quad \sigma = \frac{Mr_0}{J'} \frac{v}{r}.$$

Le tensioni massime hanno così le espressioni:

$$(351) \quad \sigma' = \frac{Mr_0}{J'} \frac{v'}{r'}, \quad \sigma'' = \frac{Mr_0}{J'} \frac{v''}{r''},$$

nelle quali v' e v'' , nonchè il momento M , vanno introdotti in valore e segno, r' ed r'' indicano i raggi di curvatura delle fibre corrispondenti agli elementi più cimentati. In figura è rappresentato il diagramma delle tensioni riferito alla traccia stessa del piano della sezione; esso è limitato da un'iperbole equilatera avente gli asintoti:

$$\begin{aligned} v &= -r^* & (\sigma = -\infty), \\ \sigma &= \frac{Mr_0}{J'} = c & (v = \infty), \end{aligned}$$

rispettivamente coincidenti con la normale z_c alla traccia della sezione e con la parallela alla traccia stessa, situata alla distanza c da essa. La derivata della (350) rispetto a v :

$$\frac{d\sigma}{dv} = c \frac{r^*}{(r^* + v)^2},$$

per $v=0$, fornisce:

$$\left(\frac{d\sigma}{dv}\right)_{v=0} = \frac{c}{r^*},$$

la quale prova che la tangente al diagramma in corrispondenza del punto D^* di tensione nulla stacca sull'asintoto z_c un segmento uguale a c .

Con riguardo alla (348) si può porre il momento d'inerzia J' nella forma:

$$(352) \quad J' = \int_{A'} v^2 dA = \int_{A'} v(r-r^*) dA' = r_0 \int_A v dA = A r_0 v_0,$$

per cui la (351) divengono:

$$(350') \quad \sigma = \frac{M}{A v_0} \frac{v}{r},$$

$$(351') \quad \sigma' = \frac{M}{A v_0} \frac{v'}{r'} \quad , \quad \sigma'' = \frac{M}{A v_0} \frac{v''}{r''}.$$

45 — Sollecitazione a forza normale.

Se la rotazione relativa $\Delta\varphi$ delle sezioni S ed S' che limitano il tronco elementare di trave considerato al n. 43 avviene intorno ad un asse passante per il centro di curvatura, le fibre parallele all'asse del tronco subiscono tutte la stessa dilatazione:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \omega.$$

Gli elementi superficiali della sezione sono allora cimentati ugualmente, ed è ovviamente:

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma A \quad , \quad M = \sigma \int_A y dA = 0;$$

la sezione è dunque sollecitata esclusivamente a forma normale.

Le tensioni e le deformazioni valgono:

$$(353) \quad \sigma = \frac{N}{A} \quad , \quad \varepsilon = \frac{N}{EA};$$

a parità di caratteristica della sollecitazione e di area della sezione trasversale, sono cioè le stesse di quelle relative ad una trave ad esse rettilinea.

46 — Sollecitazione a forza normale eccentrica.

Il caso composto di sollecitazione a forza normale eccentrica può esse-

re trattato mediante sovrapposizione delle due sollecitazioni che lo compongono (fig. 114):

la forza normale N baricentrica,
il momento flettente $M = Ne$.

La tensione totale sull'elemento generico della sezione sarà allora:

$$(354) \quad \sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{Mr_o}{J'} \frac{v}{r},$$

ovvero, per la (350'):

$$(355) \quad \sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{A v_o} \frac{v}{r} = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e v}{v_o r} \right);$$

in entrambe le ordinate v (sempre misurate dall'asse di flessione n^* , ora distinto dall'asse neutro n), le caratteristiche N ed M nonchè l'eccentricità e vanno introdotte in valore e segno.

Gli asintoti dell'iperbole che anche qui limita il diagramma delle tensioni, sono ora:

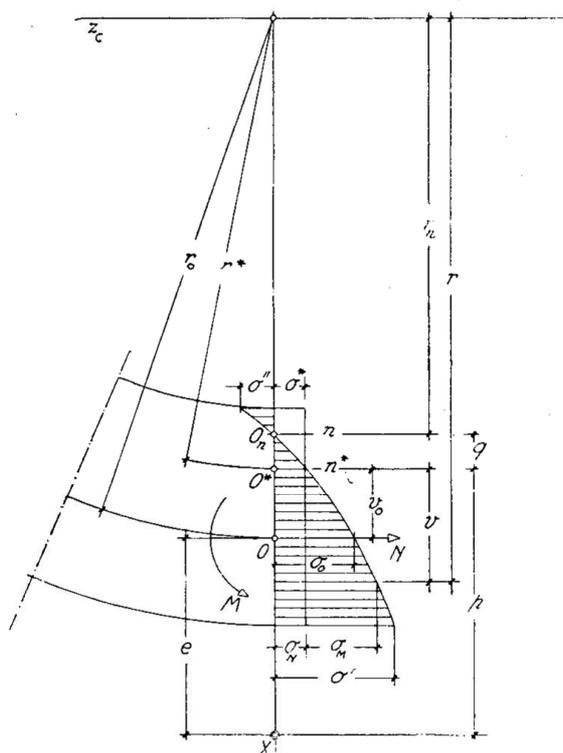


Fig. 114

$$v = -r^* \quad (\sigma = -\infty),$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Mr_o}{J'} = \sigma_N + c \quad (v = \infty);$$

il primo coincide ancora con l'asse di curvatura iniziale, l'altro, normale al precedente, dista dalla fondamentale del diagramma di $\sigma_N + c$.

Le tensioni massime si ottengono dalla (354):

$$(354') \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} + \frac{Mr_o}{J'} \frac{v'}{r}, \\ \sigma'' = \frac{N}{A} + \frac{Mr_o}{J'} \frac{v''}{r}. \end{cases}$$

oppure dalla (355):

$$(355') \quad \begin{cases} \sigma' = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e v'}{v_o r} \right), \\ \sigma'' = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{e v''}{v_o r} \right). \end{cases}$$

La tensione sulla corda baricentrica ($v = v_o$) vale:

$$\sigma_o = \sigma_N + c v_o / r_o,$$

e sull'asse di flessione:

$$\sigma^* = \sigma_N = N/A .$$

Sull'asse neutro, indicando con r_n il raggio di curvatura delle fibre corrispondenti ($v = r_n - r^*$), avremo:

$$\sigma_n = \frac{N}{A} \left(1 + e \frac{r_n - r^*}{r_n v_o} \right) = 0 ,$$

da cui:

$$(356) \quad r_n = \frac{e r^*}{e + v_o} .$$

Introducendo in quest'ultima le posizioni:

$$r_n = r^* - q = r^* - \overline{O^* O_n} \quad , \quad e = p - v_o = \overline{X O^*} - v_o$$

si ottiene:

$$pq = r^* v_o = \text{costante} ,$$

la quale dimostra che, i punti X ed O_n si corrispondono in una involuzione avente il prodotto $r^* v_o$ come modulo ed il baricentro O^* della sezione trasformata come centro.

Centro di sollecitazione ed asse neutro sono dunque legati da una relazione di antipolarità analoga a quella che sussiste nelle travi ad asse rettilineo.

47 — Sollecitazione al taglio.

Le tensioni tangenziali dovute ad un'eventuale forza tagliante T si possono calcolare ancora, in via di approssimazione, mediante la (302/I). Risultati più attendibili si ottengono sostituendo al momento d'inerzia J rispetto all'asse baricentrico, che figura in essa, l'espressione:

$$(358) \quad J_r = J \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 .$$

Sugli elementi della corda b_r situata alla distanza r dall'asse di curvatura avremo così:

$$(359) \quad \tau = \frac{T S_r}{J_r b_r} ,$$

in cui S_r è ancora il momento statico rispetto all'asse baricentrico n_o di una delle parti della sezione separate dalla corda b_r .

48 — Studio delle deformazioni.

Dicesi *seconda trasformata* della sezione la figura che si ottiene moltiplicando le larghezze b della sezione effettiva per il rapporto $r^*:r$, cioè che importa:

$$(360) \quad dA'' = \frac{r^*}{r} dA \quad , \quad A'' = r^* \int_A \frac{dA}{r} .$$

La figura così definita gode delle seguenti proprietà:

1°) è *equivalente alla sezione effettiva*. Dalla prima delle (342) si ha infatti:

$$(361) \quad \int_A \frac{v}{r} dA = \int_A \frac{r-r^*}{r} dA = A - r^* \int_A \frac{dA}{r} = A - A'' = 0 ;$$

2°) *il suo baricentro*, come per la prima trasformata, *appartiene all'asse di flessione n^** . Infatti, come risulta dalla (344) e (360), gli elementi dA'' sono proporzionali a quelli dA' , essendo $r^*:r_0$ la costante di proporzionalità.

Ciò premesso, la seconda della (342), può scriversi:

$$(362) \quad E\omega \int_A \frac{v^2}{r} dA = \frac{E\omega}{r^*} \int_{A''} v^2 dA'' = \frac{E\omega}{r^*} J'' = M ,$$

avendo posto:

$$(363) \quad J'' = \int_{A''} v^2 dA'' = \int_{A''} v(r-r^*) dA'' = r^* \int_A v dA = Ar^* v_0 \text{ (1)} .$$

Una forza normale N passante per il punto O^* produce una rotazione della sezione intorno alla retta all'infinito del piano, cioè una pura traslazione. In tal caso, essendo $\Delta ds = k$ una costante, avremo le dilatazioni:

$$(364) \quad \varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{k}{r} \frac{1}{d\varphi} ,$$

e le tensioni:

$$\sigma = \frac{k}{r^* + v} \frac{E}{d\varphi} = \frac{k}{r} \frac{E}{d\varphi} .$$

Ma l'equilibrio alla traslazione importa:

$$N = \int_A \sigma dA = \frac{Ek}{d\varphi} \int_A \frac{dA}{r} = \frac{EkA''}{r^* d\varphi} ,$$

(1) È facile provare che per $r=r^*$, la (358) fornisce:

$$J_{r^*} = J (r^*/r_0)^2 = J'' .$$

sicchè la (364) può scriversi:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA''} \frac{r^*}{r^* + v},$$

ed in corrispondenza dell'asse di flessione ($v=0$):

$$(365) \quad \varepsilon^* = N/EA''.$$

La rotazione dovuta alla sola flessione scende direttamente dalla (362):

$$(366) \quad \frac{\Delta d\varphi}{ds^*} = \frac{\Delta d\varphi}{r^* d\varphi} = \frac{\omega}{r^*} = \frac{M}{EJ''}.$$

Per le ipotesi fatte i parametri dati dalle (365) e (366) caratterizzano completamente la deformazione: *a parità di modulo elastico e di caratteristiche della sollecitazione, sono gli stessi che si avrebbero per una trave ad asse rettilineo avente per sezione la seconda trasformata.*

* * *

Per le travi ad asse circolare si può dedurre un'equazione differenziale della linea elastica analoga a quella delle travi ad asse rettilineo.

Riferita la deformata in coordinate polari r, φ , la curvatura ha la espressione:

$$(367) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right]^{3/2}}.$$

Indichiamo con η l'inflessione e sostituiamo nella (376) $r=r_0+\eta$ trascurando le quantità di second'ordine in η ; avremo (fig. 115):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_0^2 + 2r_0\eta - r_0 \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}}{(r_0^2 + 2r_0\eta)^{3/2}} = \frac{r_0 + 2\eta - \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}}{r_0^2 + 3r_0\eta}.$$

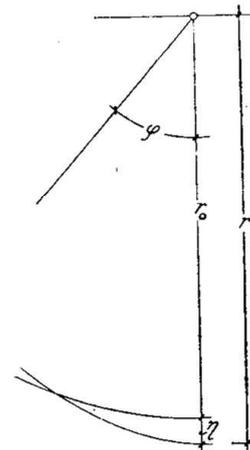


Fig. 115

L'aumento di curvatura dovuto alla deformazione è dunque:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} = - \frac{\eta + \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}}{r_0^2 + 3r_0\eta},$$

e, trascurando $3r_0\eta$ rispetto a r_0^2 :

$$(368) \quad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r_0} = - \frac{\eta + \frac{d^2\eta}{d\varphi^2}}{r_0^2}.$$

Introdotti ora i momenti ausiliari:

M_1 , capace di dare alla trave ad asse rettilineo d'ugual sezione la curvatura $1/\rho = M_1/EJ$,

M_2 , capace d'annullare la curvatura iniziale $1/r_0 = M_2/EJ$,
il momento effettivo può considerarsi *idealmente* risultante dalla differenza $M = M_1 - M_2$.

La (368) si muta così nell'equazione cercata:

$$(369) \quad \frac{M}{EJ} = - \left(\frac{\eta}{r_0^2} + \frac{d^2\eta}{ds^2} \right).$$

Se r_0 cresce oltre ogni limite, il primo termine tende a zero, ds si confonde con dz e si ricade nell'equazione differenziale relativa alla trave ad asse rettilineo.

49 — Casi particolari.

Applichiamo la teoria esposta ai casi particolari più interessanti.

È sufficiente dare le formule per la determinazione dell'area A' della prima trasformata; nota questa e determinato $v_0 = r_0 - r^*$, potranno calcolarsi J' mediante la (352) e J'' mediante la (363).

a) *Sezione rettangolare.* Dette $h = 2a$ l'altezza e b la larghezza della sezione, la (345) porge:

$$(370) \quad A' = r_0 b \int_{r''}^{r'} \frac{dr}{r} = r_0 b \ln \frac{r'}{r''},$$

e la (345'):

$$(371) \quad A' = A \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{a}{r_0} \right)^6 + \dots \right].$$

b) *Sezioni di ferri profilati.* Per sezioni scomponibili in rettangoli come quelle dei ferri profilati, avremo:

$$(371') \quad A' = r_0 \sum_i b_i \ln \frac{r'_i}{r''_i}.$$

In particolare per la sezione a doppio T, si ha (fig. 116 a):

$$(372) \quad A' = r_o \left(b_1 \ln \frac{r'}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_1}{r''} \right),$$

per la sezione doppio T (figura 116 b):

$$(373) \quad A = r_o \left(b_1 \ln \frac{r'}{r_1} + b_2 \ln \frac{r_1}{r_2} + b_3 \ln \frac{r_2}{r''} \right).$$

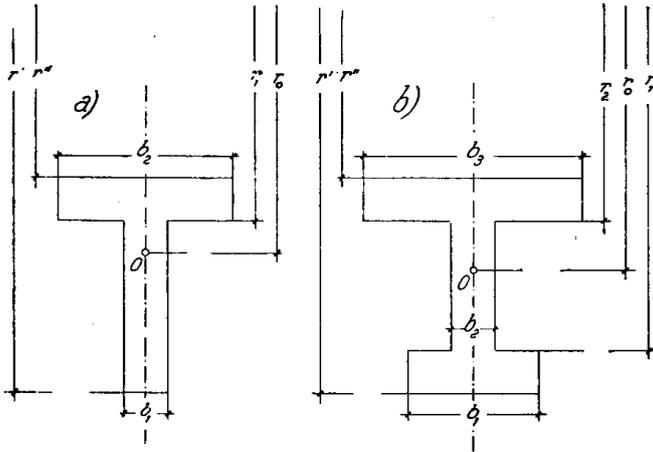


Fig. 116

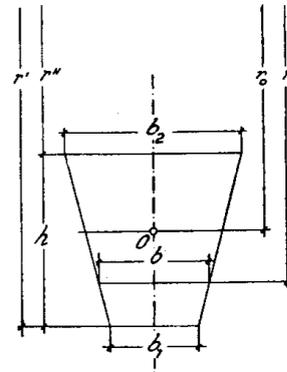


Fig. 117

c) *Sezione trapezoidale isoscele*. La larghezza della sezione all'ordinata generica r vale (fig. 117):

$$b = b_1 + \frac{(b_2 - b_1)(r' - r)}{h},$$

sicchè avremo facilmente:

$$(374) \quad A' = \frac{r_o}{h} \left[(r' b_2 - r'' b_1) \ln \frac{r'}{r''} - (b_2 - b_1) \right].$$

Ponendo in questa espressione $b_1 = 0$ si ottiene l'area della trasformata per la sezione triangolare isoscele.

d) *Sezione circolare o ellittica*. Indicando con a il semiasse della sezione disteso nel piano del sistema, si ha dalla (345'):

$$(375) \quad A' = A \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{r_o} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r_o} \right)^4 + \frac{5}{64} \left(\frac{a}{r_o} \right)^6 + \dots \right].$$

e) *Sezione a corona circolare.* Detti a_1 e a_2 i raggi rispettivamente interno ed esterno, avremo analogamente al caso precedente:

$$(376) \quad \frac{A'}{A} - 1 = \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \left\{ a_1^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 + \dots \right] - a_2^2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r_0} \right)^4 + \dots \right] \right\}.$$

f) *Sezione di forma qualunque.* La determinazione di A' si effettua graficamente, previo tracciamento della trasformata.
