

CAPITOLO VI

TRAVI D'UGUAL RESISTENZA ALLA FLESSIONE

38 — Generalità.

Una trave inflessa i cui moduli di resistenza varino con tale legge che le tensioni massime corrispondenti ad una data condizione di carico raggiungano in ciascuna sezione i carichi di sicurezza alla trazione ed alla compressione, dicesi di *ugual resistenza*.

Per la nota distribuzione delle tensioni nella sezione è evidente che il materiale di una trave siffatta è sfruttato completamente in corrispondenza dei punti a tensione massima o minima, mentre in ogni altro punto il cimento interno è necessariamente inferiore alla tensione ammissibile.

Supponiamo ovunque soddisfatta la condizione $y' = |y''| = h/2$ e quindi l'altra $W'_z = W''_z = W_z$; il materiale comporti inoltre l'unico carico di sicurezza $k' = k'' = k$.

L'ugual resistenza richiede allora (181, I):

$$(323) \quad k = \frac{M_x}{J_x} \frac{h_x}{2}.$$

Tenuto poi conto di questa, l'equazione fondamentale della flessione può scriversi (169, I):

$$(324) \quad \frac{1}{r} = \frac{M_x}{EJ_x} = \frac{2k}{Eh}.$$

Dato che, per le ipotesi fatte, il rapporto $E/2k$ è costante, *in una trave d'ugual resistenza il raggio di curvatura della deformata è proporzionale all'altezza h_x della trave*. Per $h_x = h = \text{cost.}$ la linea elastica è dunque un arco circolare.

Studieremo l'ugual resistenza nei casi di flessione più comuni, avvertendo sin d'ora che le forme che otterremo dovranno essere corrette laddove il metodo porterà a sezioni di area resistente nulla, risultato praticamente inaccettabile in quanto la trave deve presentare anche la necessaria resistenza alla sollecitazione di taglio che accompagna quella di flessione.

40 — Mensola soggetta ad un carico concentrato all'estremo libero.

Tenuto conto del valore assoluto del momento flettente, esprimiamo l'ugual resistenza per la sezione corrente (fig. 105 a):

$$|M_x| = Pz = kW_x ,$$

e per la sezione d'incastro:

$$(325) \quad |M_A| = Pl = kW_A ,$$

dividendo membro a membro, si ottiene:

$$(326) \quad z/l = W_x/W_A .$$

Per una trave a sezione rettangolare con dimension b_x, h_x sarà allora:

$$W_x = b_x h_x^2 / 6 , \quad W_A = b_A h_A^2 / 6 ,$$

e quindi la (326):

$$(326') \quad \frac{z}{l} = \frac{b_x h_x^2}{b_A h_A^2} .$$

a) Mensola a sezione rettangolare di larghezza costante.

Posto ad esempio, $b_x = b_A = b = \text{cost.}$, deriva:

$$(327) \quad z/l = (h_x/h_A)^2 ,$$

cioè il profilo della trave è una parabola a diametri orizzontali col vertice all'estremo carico (fig. 105 b). Alla forma di ugual resistenza simmetrica rispetto all'asse della trave si preferisce di regola quella col profilo superiore rettilineo, il quale si fa allora coincidere con l'asse della para-

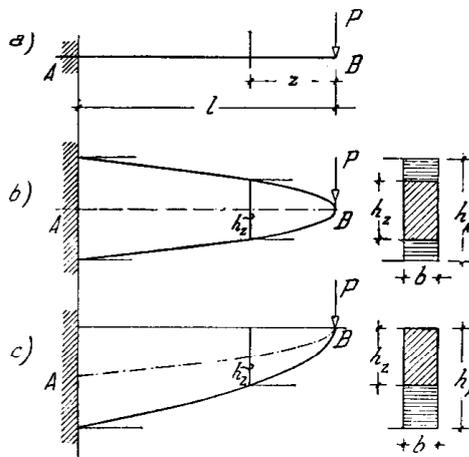


Fig. 105

bola ; naturalmente in questo caso l'asse della trave è anch'esso parabolico (fig. 105 c). L'altezza della sezione d'incastro si trae dalla (325) sostituendovi il valore di W_A e risolvendo :

$$(328) \quad h_A = \sqrt{\frac{6 Pl}{bk}}$$

b) *Mensola a sezione rettangolare di altezza costante.*

Posto invece $h_x = h_A = h = \text{cost.}$ la (326') fornisce :

$$(329) \quad z/l = b_x/b_A ,$$

cioè la larghezza b_x della sezione varia proporzionalmente all'ascissa z

(fig. 106). Per la (324) la linea elastica è un arco circolare. La relativa freccia, deducibile dalla nota relazione $f = l^2/2r$ sostituendovi $1/r = M_A/EJ_A = Pl/EJ_A$, vale :

$$(330) \quad f = Pl^2/2EJ_A .$$

Ricordando la (73) concludiamo che, a parità di sbalzo, di carico concentrato all'estremità e di momento d'inerzia massimo, la mensola di ugual resistenza a sezione rettangolare di altezza costante presenta una freccia 1,5 volte maggiore di quella relativa alla mensola prismatica.

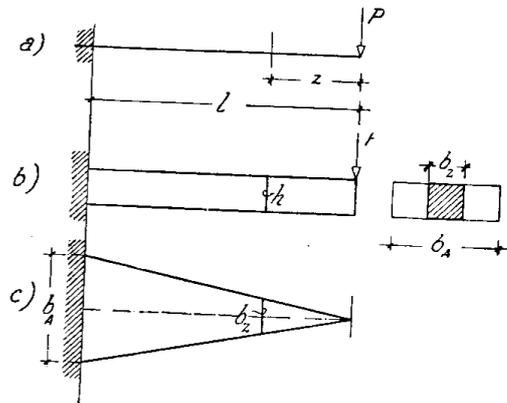


Fig. 106

* * *

Le molle a balestra normalmente impiegate nella sospensione elastica dei veicoli vengono foggiate come solidi di ugual resistenza appunto per aumentarne la deformabilità.

La forma a losanga di larghezza variabile e spessore costante che, per i risultati precedentemente ottenuti, potrebbe adottarsi tenuto conto che ciascuna metà d'una molla è assimilabile ad una mensola, è praticamente poco comoda (fig. 107 a). Si preferisce ad essa la nota formazione a pacchetto, i cui elementi (*foglie*) possono immaginarsi risultare dalla suddivisione della losanga in un numero pari di striscie longitudinali della stessa larghezza $0,5\lambda$ e successiva saldatura delle striscie simmetriche lungo i bordi rivolti verso l'asse (fig. 107 b).

Il comportamento elastico e resistente della trave così trasformata non viene alterato se le foglie sono libere di scorrere le une sulle altre, ossia *non solidali* per mutua aderenza, nel qual caso si deformano per flessione con la medesima curvatura della trave complessiva, assorbendo ciascuna una medesima frazione di momento.

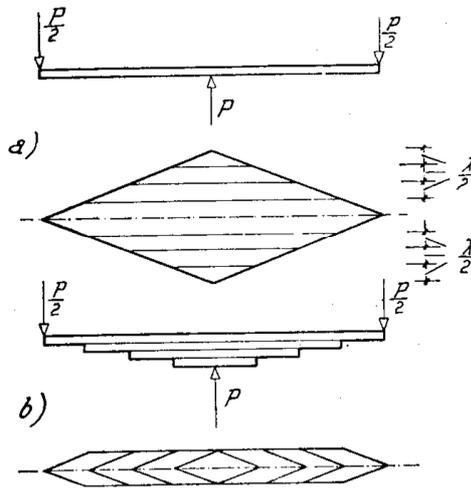


Fig. 107

c) *Mensola a sezione circolare.*

La trave abbia infine sezione circolare e si voglia conseguire l'uguale resistenza alla flessione facendo variare la sezione con legge di omotetia (fig. 108).

$$W_x = \frac{\pi r_x^3}{4}, \quad W_A = \frac{\pi r_A^3}{4},$$

si ottiene:

$$(331) \quad z/l = (r_x/r_A):$$

la mensola assume la forma di un solido di rivoluzione avente una parabola cubica come profilo meridiano.

41 — **Mensola uniformemente caricata.**

Rispettivamente nella sezione corrente di ascissa z ed all'incastro avremo per l'ugual resistenza (fig. 109):

$$M_x = \frac{pz^2}{2} = kW_x, \quad M_A = \frac{pl^2}{2} = kW.$$

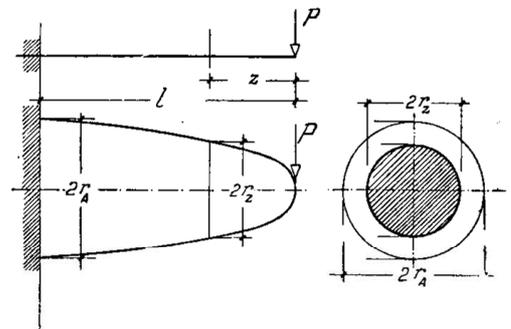


Fig. 108

Dividendo membro a membro, si ottiene:

$$(332) \quad z^2/l^2 = W_x/W_A,$$

e per la sezione rettangolare:

$$(333) \quad \frac{z^2}{l^2} = \frac{b_x h_x^3}{b_A h_A^3}.$$

a) *Mensola a sezione rettangolare di larghezza costante.*

In particolare per $b_x = b_A = b = \text{cost.}$ deriva:

$$(334) \quad z/l = h_x/h_A$$

cioè h_x varia proporzionalmente a z , donde il profilo triangolare indicato in figura.

b) *Mensola a sezione rettangolare di altezza costante.*

Posto invece $h_x = h_A = h = \text{cost.}$, la (333) diviene:

$$(335) \quad z^2/l^2 = b_x/b_A,$$

cioè le larghezze b_x della sezione variano con legge parabolica. Data la necessità di mantenere nel piano del sistema l'asse della trave, realizzeremo il profilo trovato con due archi di parabola ad esso tangenti all'estremo libero (fig. 110).

Poichè la curvatura della linea elastica è costante, potremo anche in questo caso calcolare la freccia d'inflexione mediante la $f = l^2/2r$ ponendovi:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_A}{EJ_A} = \frac{pl^2}{2EJ_A};$$

avremo così:

$$(336) \quad f = pl^4/4EJ.$$

Il confronto di questa con la seconda delle (81) prova che, a parità di carico, di sbalzo e di momento d'inerzia nella sezione d'incastro, una mensola di uguale resistenza ha freccia doppia di quella relativa alla mensola prismatica.

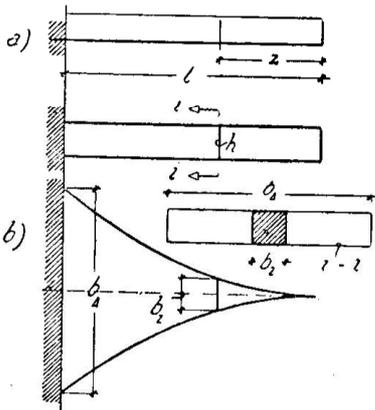


Fig. 110

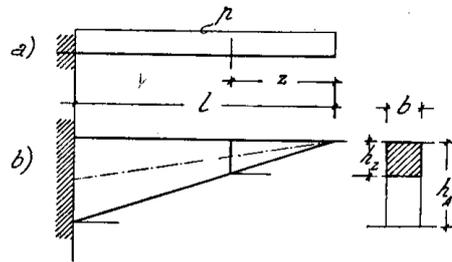


Fig. 109

42 — Trave semplice uniformemente caricata.

Indicate con ζ la ascisse a partire dalla mezzeria, posto cioè $z = a + \zeta$, $z' = a - \zeta$, il momento flettente $M_z = pzz'/2$ nella sezione corrente prende la forma (fig. 111 a):

$$M_\zeta = \frac{p}{2} (a^2 - \zeta^2) = \frac{pa^2}{2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{a^2} \right);$$

in particolare il momento massimo ($\zeta = 0$) ha l'espressione:

$$M_c = p a^2 / 2 .$$

Ne consegue per l'ugual resistenza:

$$(337) \quad k W_\zeta = \frac{p a^2}{2} \left[1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 \right] , \quad k W_c = \frac{p a^2}{2}$$

e quindi:

$$(338) \quad \frac{W_\zeta}{W_c} = 1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 .$$

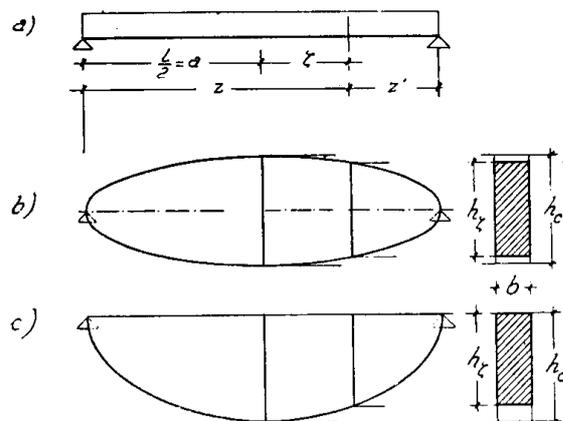


Fig. 111

Per trave a sezione rettangolare con dimensioni b_ζ e h_ζ nella sezione corrente, b_c e h_c al centro sostituendo ai moduli di resistenza le loro espressioni, si ottiene:

$$\frac{b_\zeta h_\zeta^2}{b_c h_c} = 1 - \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 .$$

In particolare per $b_\zeta = h_c = b = \text{cost.}$, si desume (figg. 111 a, b):

$$(339) \quad \left(\frac{h_\zeta}{h_c} \right)^2 + \left(\frac{\zeta}{a} \right)^2 = 1 ,$$

cioè che il profilo della trave deve essere ellittico.