

CAPITOLO V

TRATTAZIONE ANALITICA DELLE TRAVI INFLESSE

27 — Generalità.

Quando la legge $p(\zeta)$ di carico e quella $J(z)$ con cui varia il momento d'inerzia della sezione siano facilmente esprimibili in forma analitica, le travi inflesse si studiano nel miglior modo analiticamente. La trattazione seguente, che limiteremo ai casi fondamentali, riguarda appunto questo metodo.

Finchè non avvertiremo nulla in contrario, riterremo la trave prismatica, soddisfacente quindi alla condizione $J(z)=\text{costante}$, ed i suoi vincoli perfetti. Indicheremo con l la lunghezza della trave, con $z=xl$ le ascisse delle sezioni, con $\xi=\xi l$ quelle dei carichi; x e ξ saranno quindi le *ascisse ridotte*, corrispondenti alle precedenti nella trave di lunghezza unitaria. Con z' e ζ' ovvero x' e ξ' indicheremo talvolta i complementi delle ascisse suddette ad l ed all'unità rispettivamente.

Per la legge di carico assegnata potremmo scrivere la (32) nella forma:

$$(39) \quad EJ \frac{d^4 \eta}{dz^4} = p_x$$

e trovarne l'integrale generale. I quattro parametri arbitrari che questo comporta resterebbero individuati dal sistema lineare cui conducono le condizioni di vincolo spettanti al caso considerato. Per maggiore generalità conviene però studiare l'influenza di un sol carico flettente d'intensità uni-

taria, concentrato all'ascissa generica. Risolto tale caso fondamentale, il principio di sovrapposizione degli stati d'equilibrio permetterà, come ve-

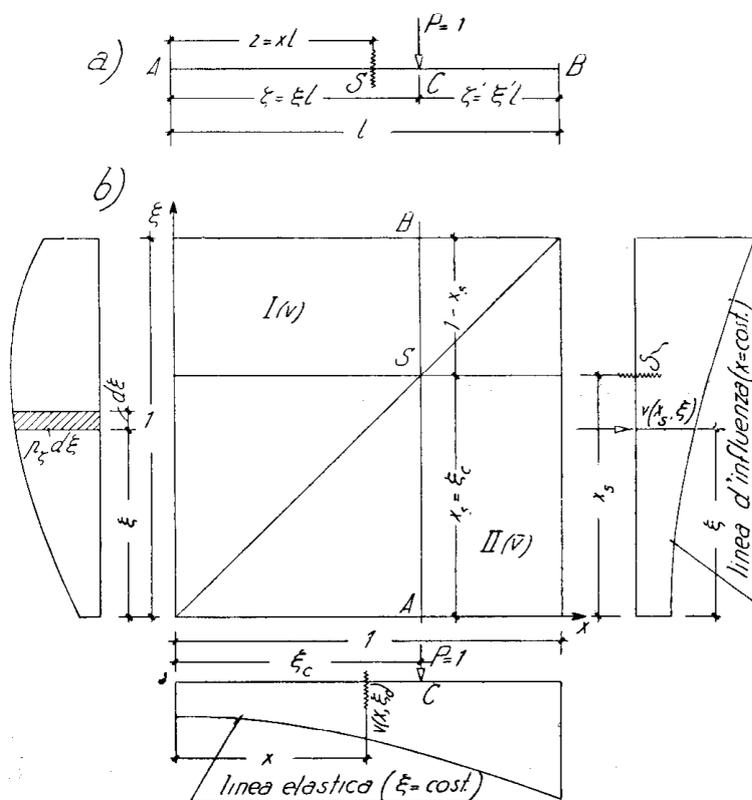


Fig. 66

dremo, di valutare rapidamente gli effetti relativi ad una distribuzione arbitraria di carico.

Consideriamo pertanto applicato alla trave AB , di cui lasciamo per ora imprecisate le condizioni di vincolo, il solo carico $P=1$ alla ascissa $\zeta=\xi l$ contata dall'estremo A (figura 66). La (59), indicata ora con v la inflessione, prende la forma omogenea:

$$(60) \quad EJ \frac{dv^4}{dz^4} = 0$$

e conduce a soluzioni distinte per i due intervalli $(0, \zeta)$ e (ζ, l) separati dal carico, cui per una ζ assegnata, può darsi la forma, nelle ascisse ridotte:

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{EJv}{l^3} = A_3 x^3 + A_2 \xi x^2 + A_1 \xi^2 x + A_0 \xi^3, \\ \frac{EJ\bar{v}}{l^3} = B_3 x^3 + B_2 \xi x^2 + B_1 \xi^2 x + B_0 \xi^3. \end{cases}$$

In corrispondenza del carico sussiste la continuità della v (ordinata unica della deformata), nonchè delle sue derivate prima (tangente unica alla deformata) e seconda (momento flettente unico), mentre è discontinua la derivata terza (taglio alla destra T'_ξ uguale al taglio alla sinistra T''_ξ diminuito del carico $P=1$), condizioni che si traducono nelle equazioni:

$$\begin{aligned} (\bar{v})_{x=\xi} &= (v)_{x=\xi} & , & & (\bar{v}')_{x=\xi} &= (v')_{x=\xi} \\ (\bar{v}'')_{x=\xi} &= (v'')_{x=\xi} & , & & -EJ(\bar{v}''')_{x=\xi} &= -EJ(v''')_{x=\xi} - 1, \end{aligned}$$

cioè nel sistema:

$$\begin{aligned} (A_3 - B_3) + (A_2 - B_2) + (A_1 - B_1) + (A_0 - B_0) &= 0, \\ 3(A_3 - B_3) + 2(A_2 - B_2) + (A_1 - B_1) &= 0, \\ 6(A_3 - B_3) + 2(A_2 - B_2) &= 0, \\ 6(A_3 - B_3) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Da questo, in via del tutto generale, si trae:

$$B_3 = A_3 + \frac{1}{6}, \quad B_2 = A_2 - \frac{1}{2}, \quad B_1 = A_1 + \frac{1}{2}, \quad B_0 = A_0 - \frac{1}{6},$$

e pertanto alle (61) può darsi la forma:

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{EJv}{l^3} = \left(C_2 - \frac{1}{12}\right)x^3 + \left(C_2 + \frac{1}{4}\right)\xi x^2 + \left(C_1 - \frac{1}{4}\right)\xi^2 x + \left(C_0 + \frac{1}{12}\right)\xi^3, \\ \frac{EJ\bar{v}}{l^3} = \left(C_0 - \frac{1}{12}\right)\xi^3 + \left(C_1 + \frac{1}{4}\right)x\xi^2 + \left(C_2 - \frac{1}{4}\right)x^2\xi + \left(C_3 + \frac{1}{12}\right)x^3, \end{cases}$$

dove figurano le sole quattro costanti dipendenti dalle condizioni di vincolo.

La funzione $v(x, \xi)$ espressa dalle (62) vien detta *funzione d'influenza dell'inflessione*; essa è definita in un quadrato avente i lati di lunghezza unitari adagiati sugli assi x e ξ (fig. 66): per la regione *I* è valida la prima, per la regione *II* la seconda delle (62)⁽¹⁾. La sua rappresentazione spaziale potrebbe ottenersi portando come ordinata nel punto generico del campo di definizione, per esempio normalmente al piano x, ξ , il corrispondente valore della funzione in scala arbitraria.

Per $\xi = \xi_c$ costante la $v(x, \xi_c)$ fornisce la linea elastica per il carico $P=1$ agente all'ascissa ξ_c fissata (intersezione del diagramma rappresentativo col piano $\xi_c = \text{cost.}$); per $x = x_s$ costante esprime invece la legge con cui varia l'inflessione in corrispondenza della sezione S fissata al variare della posizione del carico, cioè la *linea d'influenza dell'inflessione in S* (intersezione del diagramma rappresentativo col piano $x_c = \text{cost.}$). Posto ancora $x_s = \xi_c$, per il primo principio di reciprocità dev'essere:

$$v(x, \xi_c) = \bar{v}(x_s, \xi),$$

quindi: *la linea d'influenza dell'inflessione in S coincide con la linea elastica per il carico $P=1$ agente in S.*

(1) Come vedremo in un caso particolare, con appropriati artifici è possibile dare alla funzione d'influenza formata unica in tutto il campo di definizione.

Nota la funzione d'influenza, si deduce immediatamente l'equazione in termini finiti della deformata per un carico d'intensità arbitraria P agente all'ascissa $\zeta = \xi l$; è infatti:

$$(63) \quad \eta = Pv(x, \xi);$$

se poi P è l' i^{mo} carico P_i agente all'ascissa $\xi_i = l\zeta_i$ di un complesso di n carichi flettenti concentrati, avremo:

$$(64) \quad \eta = \sum_{i=1}^n P_i v(x, \xi_i);$$

è chiaro che nei prodotti che figurano in queste espressioni deve introdursi la \bar{v} in luogo della v quando la sezione dove si cerca l'inflessione si trovi alla destra del carico P_i .

Se il carico è distribuito con continuità secondo una data legge $p(\zeta)$, riguarderemo il differenziale $p(\zeta)d\zeta = lp(\xi)d\xi$ come un carico concentrato elementare, per cui, supposto il carico esteso a tutta la trave, avremo:

$$(65) \quad \eta = l \int_0^l p(\xi)v(x, \xi) d\xi;$$

l'integrazione va fatta lungo la parallela all'asse ξ individuato dalla x fissata, introducendo la \bar{v} nel tratto $\overline{AS} = x$, la v in quello $SB = l - x$. Si ottiene così:

$$(66) \quad \eta = l \left[\int_0^x p(\xi)\bar{v}(x, \xi) d\xi + \int_x^l p(\xi)v(x, \xi) d\xi \right].$$

* * *

Se in luogo del carico $P=1$ agisce all'ascissa generica ξ una coppia di momento $\mu=1$, sussistono ancora le (61). Per $x=\xi$ sono continue la v e la v' , discontinua la v'' (momento flettente alla destra M'_ξ uguale al momento alla sinistra M''_ξ diminuito del momento della coppia $\mu=1$), costante la v''' . Poste quindi le condizioni:

$$\begin{aligned} (\bar{v}_\mu)_{x=\xi} &= (v_\mu)_{x=\xi} & , & & (\bar{v}'_\mu)_{x=\xi} &= (v'_\mu)_{x=\xi} , \\ - (EJ \bar{v}''_\mu)_{x=\xi} &= - (EJ v''_\mu)_{x=\xi} - 1 & , & & (\bar{v}'''_\mu)_{x=\xi} &= (v'''_\mu)_{x=\xi} , \end{aligned}$$

in luogo della (62), otteniamo:

$$(62') \quad \begin{cases} \frac{EJv}{l^2} = C_3 l x^3 + \left(C_2 - \frac{1}{4}\right) x_2 + \left(C_1 + \frac{1}{2}\right) x \xi + \left(C_0 - \frac{1}{4}\right) \xi^2, \\ \frac{EJ\bar{v}}{l^2} = C_3 l x^3 + \left(C_2 + \frac{1}{4}\right) x_2 + \left(C_1 - \frac{1}{2}\right) x \xi + \left(C_0 + \frac{1}{4}\right) \xi^2, \end{cases}$$

le quali definiscono la *funzione d'influenza dell'inflessione per l'azione di coppie*: la v_μ esprime cioè l'inflessione in corrispondenza dell'ascissa x dovuta ad una coppia di momento unitario applicata all'ascissa ξ .

Per il principio di reciprocità, posto $x_s = \xi_c$ ed indicato ora con v_P la funzione definita dalle (62), dev'essere:

$$v_\mu(x, \xi_c) = \bar{v}_P^I(x_s, \xi),$$

quindi la *linea d'influenza dell'inflessione in S per l'azione di coppie*, coincide con il *diagramma delle inclinazioni per il carico $P=1$ agente in S*; e reciprocamente, la *linea d'influenza della rotazione in S, per l'azione di carichi*, coincide con la *linea elastica per la coppia $\mu=1$ agente in S*.

Le derivate prime della (62') definiscono poi la *funzione d'influenza della rotazione per l'azione di coppie*, per la quale sussiste la reciprocità:

$$v_\mu(x, \xi_c) = \bar{v}_\mu^I(x_s, \xi),$$

cioè: la *linea d'influenza in S per l'azione di coppie coincide col diagramma delle inclinazioni per la coppia $\mu=1$ agente in S*.

28 — Mensola.

Supponiamo la trave incastrata in A e del resto libera.

A) FUNZIONE D'INFLUENZA.

Le condizioni di vincolo impongono abbassamento e rotazione nulli in A , momento flettente e taglio nulli in B , cioè:

$$(67) \quad \begin{cases} (v)_{x=0} = 0 & , & (v^I)_{x=0} = 0, \\ (v^{II})_{x=0} = 0 & , & -EJ(v^{III})_{x=0} = 0; \end{cases}$$

ciò importa per le (62), com'è facile verificare:

$$(68) \quad C_0 = C_3 = -\frac{1}{12} \quad , \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{4} \quad ,$$

sicchè le equazioni stesse divengono:

$$(69) \quad 6EJv = -l^3(x^3 - 3x^2\xi) \quad , \quad 6EJ\bar{v} = -l^3(\xi^3 - 3\xi^2x).$$

Per l'azione di coppie le (62') associate alle (67) forniscono:

$$C_0 = \frac{1}{4} \quad , \quad C_1 = -\frac{1}{2} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{4} \quad , \quad C_3 = 0 \quad ,$$

sicchè le (62') stesse prendono la forma:

$$(69') \quad 2EJv = -l^2x^2 \quad , \quad 2EJ\bar{v} = -l^2\xi(2x - \xi) \quad .$$

B) CARICHI CONCENTRATI.

Per un carico P avremo allora:

$$EJ\eta = \frac{Pl^3}{6}(3x^2\xi - x^3) \quad , \quad EJ\bar{\eta} = \frac{Pl^3}{6}(3\xi^2x - \xi^3) \quad ;$$

derivando successivamente rispetto a $z=x/l$, otteniamo poi (fig. 67):

le inclinazioni:

$$(70) \quad EJ\varphi = \frac{Pl^2}{2}(2x\xi - x^2) \quad , \quad EJ\bar{\varphi} = \frac{Pl^2}{2}\xi^2 \quad ,$$

i momenti flettenti:

$$(71) \quad M = -Pl(\xi - x) \quad , \quad \bar{M} = 0 \quad ;$$

i tagli:

$$(72) \quad T = P \quad , \quad \bar{T} = 0 \quad .$$

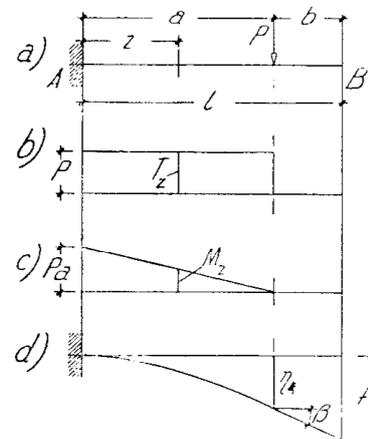


Fig. 67

La linea elastica è dunque una parabola cubica nell'intervallo $(0, \xi)$, un segmento di retta nel rimanente intervallo (ξ, l) ; l'ordinata sotto il carico vale:

$$(73) \quad (\eta)_\xi = \frac{P\xi^3}{3EJ} \quad ,$$

e la freccia:

$$(74) \quad f = \frac{P\xi^2}{6}(3l - \xi) \quad .$$

Il diagramma delle inclinazioni è parabolico nel primo, rettilineo e parallelo alla fondamentale nel secondo, con inclinazione costante ed uguale alla massima:

$$(75) \quad \beta = \frac{P\xi^2}{2EJ} \quad .$$

La freccia può anche esprimersi come somma dell'ordinata $(\eta)_\xi$ e del-

l'abbassamento corrispondente alla rotazione rigida del segmento di trave a destra del carico, cioè:

$$(76) \quad f = \frac{P\zeta^3}{3EJ} + \frac{P\zeta^2}{2EJ}(l-\zeta) = \frac{P\zeta^2}{6EJ}(2\zeta + 3\zeta').$$

Le caratteristiche della sollecitazione sono entrambe nulle tra il carico e l'estremo libero: il momento flettente cresce in valore assoluto proporzionalmente alle distanze $\xi-x$ fino al massimo $M_A = -Pl$ che raggiunge all'incastro; il taglio è costante ed uguale al carico P .

Per una serie di carichi concentrati rotazione ed inflessione dell'estremo libero valgono:

$$(77) \quad \beta = \sum_{i=1}^n \beta_i = \frac{1}{2EJ} \sum_{i=1}^n P_i \zeta_i^2,$$

$$(78) \quad f = \sum_{i=1}^n f_i = \frac{1}{6EJ} \sum_{i=1}^n P_i \zeta_i^2 (2\zeta_i + 3\zeta_i').$$

C) CARICO DISTRIBUITO.

Per un carico della forma:

$$(79) \quad p_\zeta = a_k \zeta^k = a_k l^k \xi^k,$$

dove sia $k > -1$, dato che per $k \leq -1$ la funzione p non è integrabile nell'intervallo $(0, l)$, la (66), avuto riguardo alle (69), fornisce:

$$\eta = -\frac{a_k l^{k+4}}{6EJ} \left[\int_0^x \xi^k (\xi^3 - 3\xi^2 x) d\xi + \int_x^l \xi^k (x^3 - 3x^2 \xi) d\xi \right]$$

ed integrando:

$$(80) \quad \eta = \frac{a_k l^{k+4}}{EJ} \left[\frac{x^{k+4}}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} - \frac{x^3}{6(k+1)} + \frac{x^2}{2(k+2)} \right].$$

In particolare dalla (80) e successive derivate avremo:

a) carico uniformemente riportato ($k=0$, $a_0=p$), figura 68:

$$(81) \quad \eta = \frac{pl^4}{24EJ}(x^4 - 4x^3 + 6x^2) \quad , \quad f = \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{Ql^3}{8EJ};$$

$$(82) \quad \varphi = \frac{pl^3}{6EJ}(x^3 - 3x^2 + 3x) \quad , \quad \beta = \frac{pl^3}{6EJ} = \frac{Ql^2}{6EJ};$$

$$(83) \quad M = -\frac{pl^2}{2}(x^2 - 2x + 1) \quad , \quad M = -\frac{pl^2}{2} = -\frac{Ql}{2}$$

$$(84) \quad T = pl(1-x) = pz' \quad , \quad A = pl = Q.$$

Il taglio varia dunque linearmente con le ascisse z' contate dall'estremo libero: è nullo a tale estremo, uguale all'intero carico nella sezione di incastro per $z=x=0$ (fig. 68 b). Il momento flettente, pure nullo all'estremo libero, uguale a $0,5 pl^2$ all'incastro, varia come le ordinate di un segmento di parabola a diametri verticali, la cui tangente, come attesta la (83), per $z=0$ ($tg \varphi = A = pl$) taglia la fondamentale all'ascissa $z^* = 0,5 pl^2 / pl = 0,5 l$; per $z=l$ ($tg \varphi_e = T_e = 0$) coincide con la fondamentale (fig. 68 c);

b) carico variabile con legge proporzionale all'ascissa z ($k=1$, $a_1 = p/l$), figura 69 b:

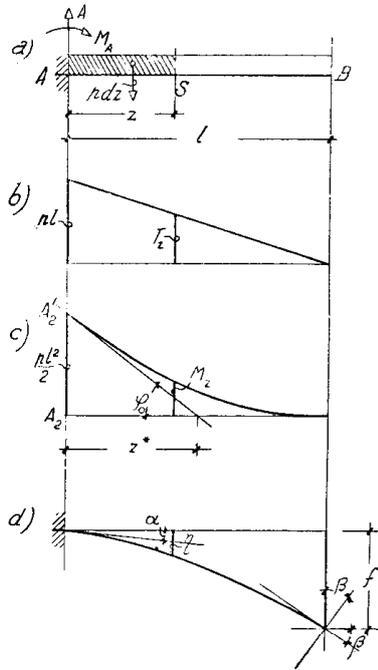


Fig. 68

(85)

(86)

$$\left\{ \begin{aligned} \eta &= \frac{pl^4}{120 EJ} (x^5 - 10x^3 + 20x^2), \\ f &= \frac{11}{120} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{11}{60} \frac{Ql^3}{EJ}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{pl^3}{24 EJ} (x^4 - 6x^2 + 8x), \\ \beta &= \frac{pl^3}{8 EJ} = \frac{Ql^3}{4 EJ}; \end{aligned} \right.$$

$$(87) \quad M = -\frac{pl^2}{6} (x^3 - 3x + 2) \quad , \quad M_A = -\frac{pl^2}{3} = -\frac{2}{3} Ql;$$

$$(88) \quad T = \frac{pl}{2} (1 - x^2) \quad , \quad A = \frac{pl}{2} = Q;$$

c) carico variabile con legge proporzionale all'ascissa $z' = (l - z)$, figura 69 c: le formule relative a questo caso possono dedursi agevolmente dalle precedenti sovrapponendo al caso a) quello b) mutato di segno; si ottiene così:

$$(89) \quad \eta = \frac{pl^4}{120 EJ} (-x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2), \quad f = \frac{pl^4}{30 EJ} = \frac{Ql^3}{15 EJ};$$

$$(90) \quad \varphi = \frac{pl^3}{24 EJ} (-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x) \quad , \quad \beta = \frac{pl^3}{24 EJ} = \frac{Ql^3}{12 EJ};$$

$$(91) \quad M = -\frac{pl^2}{6} (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1) \quad , \quad M_A = -\frac{pl^2}{6} = -\frac{Ql}{3};$$

$$(92) \quad T = \frac{pl}{2} (1 - 2x + x^2) \quad , \quad A = \frac{pl}{2} = Q;$$

d) carico crescente con legge parabolica nell'ascissa z ($k=2$, $a_2 = p/l$, figura 69 d):

$$(93) \quad \begin{cases} \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (x^6 - 20x^3 + 45x^2), \\ f = \frac{13}{180} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{13}{60} \frac{Ql^3}{EJ}; \end{cases}$$

$$(94) \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{pl^3}{60 EJ} (x^5 - 10x^2 + 15x), \\ \beta = \frac{pl^3}{10 EJ} = \frac{3}{10} \frac{Ql^2}{EJ}; \end{cases}$$

$$(95) \quad \begin{cases} M = -\frac{pl^2}{12} (x^4 - 4x + 3), \\ M_A = -\frac{pl^2}{4} = -\frac{3}{4} Ql; \end{cases}$$

$$(96) \quad \begin{cases} T = \frac{pl}{3} (1 - x^3), \\ A = \frac{pl}{3} = Q; \end{cases}$$

e) carico complementare del precedente (sovrapposizione dei precedenti casi a) e — d), figura 69 e):

$$(97) \quad \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (-x^6 + 15x^4 - 40x^3 + 45x^2), \quad f = \frac{19}{360} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{19}{240} \frac{Ql^3}{EJ};$$

$$(98) \quad \varphi = \frac{pl^3}{60 EJ} (-x^5 + 10x^3 - 20x^2 + 15x), \quad \beta = \frac{pl^3}{15 EJ} = \frac{Ql^2}{10 EJ};$$

$$(99) \quad M = -\frac{pl^2}{12} (-x^4 + 6x^2 - 8x + 3), \quad M_A = -\frac{pl^2}{4} = -\frac{3}{8} Ql;$$

$$(100) \quad T = \frac{pl}{3} (x^3 - 3x + 2), \quad A = \frac{2}{3} pl = Q;$$

f) carico crescente con legge parabolica nell'ascissa z' (sovrapposizione dei precedenti casi a), — 2 b) e d), figura 69 f):

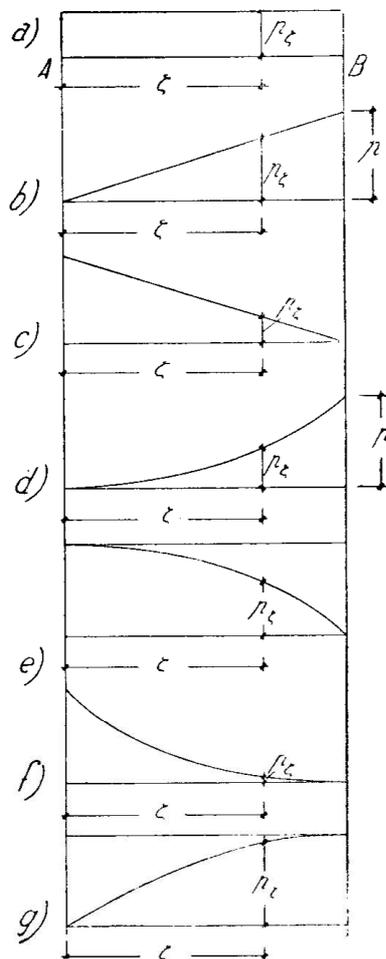


Fig. 69

$$(101) \quad \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2), \quad f = \frac{pl^4}{72EJ} = \frac{Ql^3}{24EJ};$$

$$(102) \quad \varphi = \frac{pl^3}{60 EJ} (x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x), \quad \beta = \frac{pl^3}{60EJ} = \frac{Ql^2}{20EJ};$$

$$(103) \quad M = -\frac{pl^2}{12} (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1), \quad M_A = -\frac{pl^2}{12} = -\frac{Ql}{4};$$

$$(104) \quad T = \frac{pl}{3} (1 - 3x + 3x^2 - x^3), \quad A = \frac{pl}{3} = Q;$$

g) carico complementare del precedente (sovrapposizione dei precedenti casi a) e — f), figura 69 g):

$$(105) \quad \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (-x^6 + 6x^5 - 40x^3 + 75x^2), \quad f = \frac{pl^4}{9EJ} = \frac{Ql^3}{6EJ};$$

$$(106) \quad \varphi = \frac{pl^3}{60 EJ} (-x^5 + 5x^4 - 20x^2 + 25x), \quad \beta = \frac{3}{20} \frac{pl^3}{EJ} = \frac{9}{40} \frac{Ql^2}{EJ};$$

$$(107) \quad M = -\frac{pl^2}{12} (-x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 5), \quad M_A = -\frac{5}{12} pl^2 = -\frac{5}{8} Ql;$$

$$(108) \quad T = \frac{pl}{3} (2 - 3x^2 + x^3), \quad A = \frac{2}{3} pl = Q.$$

È chiaro da quanto precede che la (80) permette di esprimere l'effetto di un carico polinomiale qualunque $p_\zeta = \sum_k a_k z^k$.

D) IMPERFEZIONI DELL'INCASTRO.

Poichè si tratta di trave isostatica, le eventuali imperfezioni anelastiche dei vincoli importano soltanto spostamenti rigidi, i quali ovviamente non

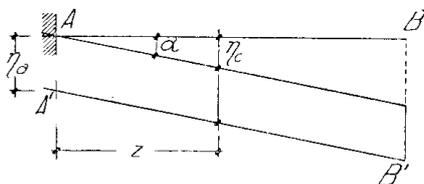


Fig. 70

alterano l'equilibrio del sistema (fig. 70).

Per una distribuzione qualunque di carico restano pertanto immutati i parametri della reazione e quelli della sollecitazione relativi ad una sezione qualsiasi. Si modificano invece in generale le inclinazioni e le inflessioni.

Indicando con η ed α il cedimento e la rotazione subiti dall'incastro, quantità che si ritengono in ogni caso assegnate ed indipendenti dai carichi, le prime restano ovunque maggiorate della rotazione α ; alle inflessioni si sommano gli abbassamenti:

$$(109) \quad \eta_C = \eta_A + \alpha z.$$

In assenza dei carichi la trave resterebbe indeformata trasferendosi soltanto dalla posizione AB a quella $A'B'$.

29 — Trave semplice.

La trave sia ora semplicemente appoggiata agli estremi A e B .

A) REAZIONI E SOLLECITAZIONI PER UN CARICO QUALUNQUE.

Per un carico $p(\zeta)$ distribuito con continuità ed n carichi P_i concentrati alle ascisse a_i le reazioni degli appoggi valgono (fig. 71):

$$(110) \quad A = \frac{1}{l} \left(\int_0^l p_\zeta \zeta' d\zeta + \sum_{i=1}^n P_i b_i \right), \quad B = \frac{1}{l} \left(\int_0^l p_\zeta \zeta d\zeta + \sum_{i=1}^n P_i a_i \right).$$

Note queste, nella sezione S di ascissa z , alla cui sinistra si trovino i primi r carichi concentrati, avremo:

il taglio:

$$(111) \quad T_o = A - \left(\int_0^z p_\zeta d\zeta + \sum_{i=1}^r P_i \right)$$

ed il momento flettente:

$$(112) \quad M_x = Az - \left[\int_0^z p_\zeta (z - \zeta) d\zeta + \sum_{i=1}^r P_i (z - a_i) \right].$$

Talvolta conviene esprimere le caratteristiche della sollecitazione come somma di quelle corrispondenti alla azione separata dei carichi alla sinistra e di quelli alla destra di S . Per l'effetto separato di questi ultimi l'unica forza *alla sinistra* della sezione è la reazione:

$$(113) \quad A_d = \frac{1}{l} \left(\int_0^{z'} p_\zeta \zeta' d\zeta + \sum_{i=r}^n P_i b_i \right);$$

perciò le corrispondenti quote di taglio e di momento flettente in S valgono rispettivamente:

$$T_d = A_d, \quad M_d = A_d z;$$

analogamente, poichè per effetto dei soli carichi alla destra l'unica forza *alla destra* di S è la reazione:

$$(114) \quad B_s = \frac{1}{l} \left(\int_0^z p_\zeta \zeta' d\zeta + \sum_{i=1}^r P_i a_i \right),$$

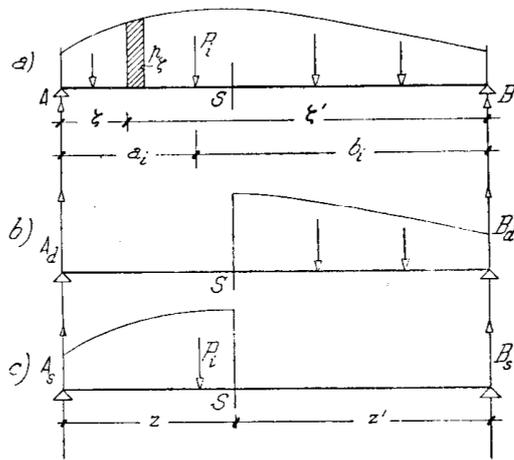


Fig. 71

per le caratteristiche della sezione S avremo le quote complementari:

$$T_s = -B_s \quad , \quad M_s = B_s z' .$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti, si ottiene dunque:

$$(115) \quad T_x = T_s = T_d = -\frac{1}{l} \left(\int_0^z p_\zeta \zeta d\zeta - \int_0^{z'} p_\zeta \zeta' d\zeta + \sum_{i=1}^r P_i a_i - \sum_{i=r}^n P_i b_i \right) ,$$

$$(116) \quad M_x = M_s + M_d = \frac{1}{l} \left[z' \left(\int_0^z p_\zeta \zeta d\zeta + \sum_{i=1}^r P_i a_i \right) + z \left(\int_0^{z'} p_\zeta \zeta' d\zeta + \sum_{i=r}^n P_i b_i \right) \right] .$$

B) FUNZIONE D'INFLUENZA.

Le condizioni di vincolo importano spostamenti e momenti flettenti

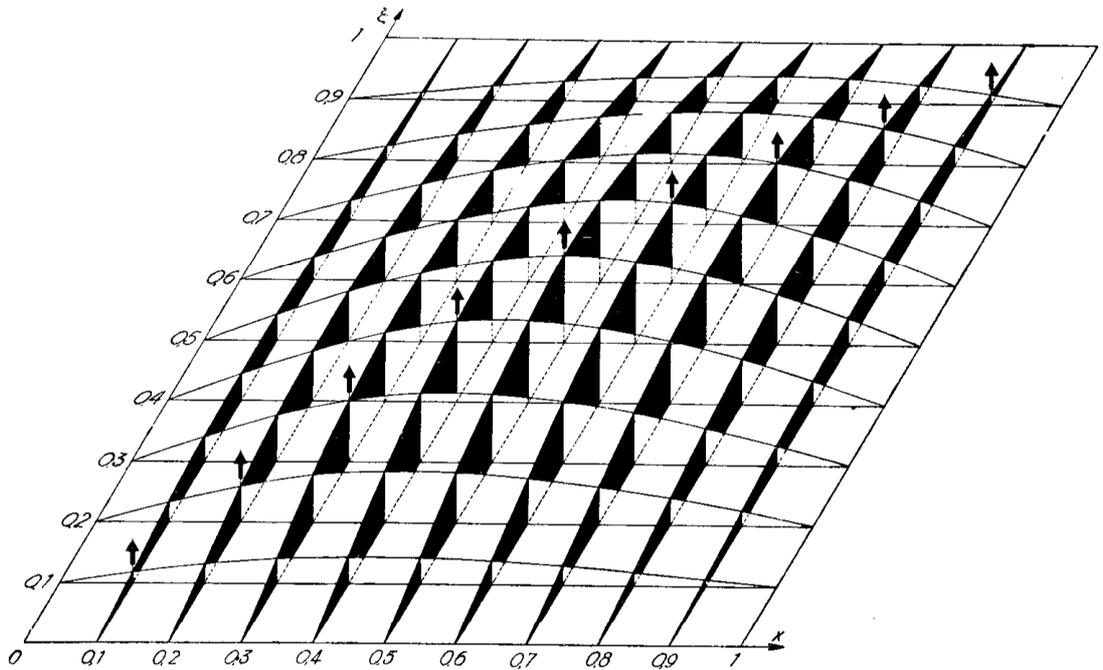


Fig. 72

nulli in corrispondenza degli appoggi, cioè:

$$(117) \quad \begin{cases} (v)_{x=0} = 0 & , & (v)_{x=l} = 0 \\ (v'')_{x=0} = 0 & , & (v'')_{x=l} = 0 \end{cases} .$$

Dalle (62) si trae pertanto:

$$(118) \quad C_0 = -\frac{1}{12} \quad , \quad C_1 = \frac{2\xi^2 - 2\xi + 4}{12} \quad , \quad C_2 = -\frac{1}{4} \quad , \quad C_3 = \frac{2\xi - 1}{12} \quad ,$$

con che la funzione d'influenza assume la forma:

$$(119) \quad \begin{cases} \frac{6 EJ v}{l^3} = x(x^2 - 2\xi + \xi^2)(\xi - 1), \\ \frac{6 EJ \bar{v}}{l^3} = \xi(\xi^2 - 2x + x^2)(x - 1). \end{cases}$$

La figura 72 ne fornisce la rappresentazione grafica in proiezione assonometrica.

Per l'azione di coppie imponendo le (117) alla (62'), otteniamo:

$$(118') \quad C_s = -\frac{1}{6l}, \quad C_2 = \frac{1}{4}, \quad C_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6\xi}(2\xi^2 + 2), \quad C_0 = \frac{1}{4},$$

e quindi la funzione d'influenza:

$$(119') \quad \begin{cases} \frac{6 EJ v}{l^3} = x(6\xi - 3\xi^2 - 2) - x^3, \\ \frac{6 EJ \bar{v}}{l^3} = 3\xi^2 - (3\xi^2 + 2)x + 3x^2 - x^3. \end{cases}$$

C) CARICHI CONCENTRATI.

Per un solo carico P applicando le (119) e derivando successivamente rapporto $z = x/l$, otteniamo (fig. 73 a):

la linea elastica:

$$(120) \quad EJ \eta = \frac{Pl^3}{6} x(x^2 - 2\xi + \xi^2)(\xi - 1), \quad EJ \bar{\eta} = \frac{Pl^3}{6} \xi(\xi^2 - 2x + x^2)(x - 1),$$

le inclinazioni:

$$(121) \quad EJ \varphi = \frac{Pl^2}{6} 3x^2 - 2\xi + \xi^2)(\xi - 1), \quad EJ \bar{\varphi} = \frac{Pl^2}{6} (\xi^2 - 6x + 2x^2 + 2)\xi$$

e quindi le tangenti sugli appoggi:

$$(122) \quad EJ \alpha = \frac{Pl^2}{6} (\xi - 3)(\xi - 1)\xi, \quad EJ \beta = \frac{Pl^2}{6} (\xi^2 - 1)\xi,$$

i momenti flettenti:

$$(123) \quad M = Plx(1 - \xi), \quad \bar{M} = Pl\xi(1 - x),$$

i tagli:

$$(124) \quad T = A = P(1 - \xi), \quad \bar{T} = -B = -P\xi.$$

Come risulta dalle (121) l'inflessione è massima (inclinazione nulla) per una delle ascisse:

$$(125) \quad \begin{cases} x_e = \sqrt{\frac{\xi}{3}} (2 - \xi) & (x_e \leq \xi), \\ \bar{x}_e = 1 - \sqrt{\frac{1 - \xi}{3}} & (\bar{x}_e \geq \xi); \end{cases}$$

è facile provare che per $\xi > 1/2$ si tratta della x_e (punto di ordinata mas-

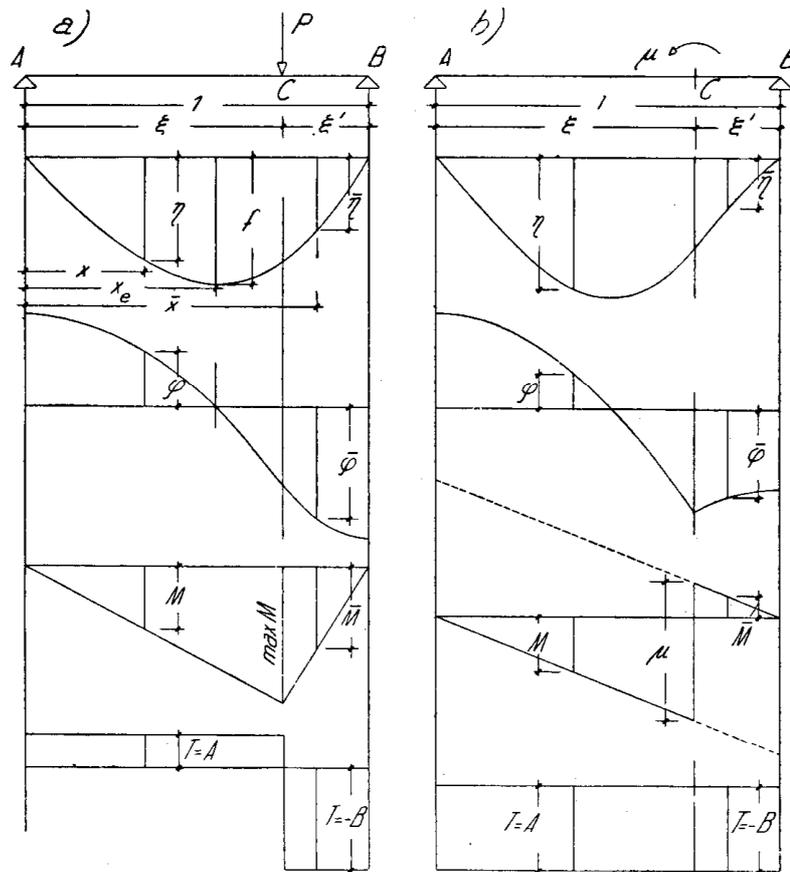


Fig. 73

sima alla sinistra del carico); per $\xi < 1/2$ si tratta invece della \bar{x}_e (punto di massima inflessione alla destra del carico).

Per il carico agente in mezziera ($\xi = 1/2$) otteniamo:

$$(126 - 127) \quad EJ \eta = \frac{Pl^3}{48} (3 - 4x^2) x \quad , \quad EJ \phi = \frac{Pl^2}{16} (1 - 4x^2) ,$$

in particolare rispettivamente la freccia e le tangenti sugli appoggi:

$$(128-129) \quad EJ f = \frac{Pl^3}{48} \quad , \quad EJ \alpha = - EJ \beta = \frac{Pl^2}{16} .$$

Il momento flettente, sempre positivo, varia secondo le ordinate di una bilatera col vertice sulla retta d'azione del carico ed in corrispondenza di questa assume il valore massimo:

$$\max M = Pl\xi(1-\xi) = Pl\xi\xi' .$$

Al variare di ξ tale massimo varia come le ordinate di un segmento di parabola a diametri verticali col vertice sulla verticale della mezzeria e freccia:

$$(130) \quad \max M_c = Pl/4 .$$

Il taglio, positivo a sinistra e negativo a destra del carico, varia linearmente con ξ : il primo tra il valore P (carico immediatamente a destra dell'appoggio A) e zero, il secondo tra zero e $-P$ (carico immediatamente a sinistra dell'appoggio B). Per il carico in mezzeria otteniamo:

$$(131) \quad T = -\bar{T} = A = B = P/2 .$$

È ovvia l'estensione della precedente trattazione al caso di una serie di carichi concentrati.

D) AZIONE DI COPPIE.

Per una coppia di momento μ agente all'ascissa ξ applicando invece le (119'), si ottengono (fig. 74 b):

la linea elastica:

$$(120') \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \eta = \frac{\mu l^2 x}{6} (6\xi - 3\xi^2 - 2 - x^2) , \\ EJ \bar{\eta} = \frac{\mu l^2}{6} [3\xi^2(1-x) - x(x^2 - 3x + 2)] , \end{array} \right.$$

le inclinazioni:

$$(121') \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \varphi = \frac{\mu l}{6} (6\xi - 3\xi^2 - 3x^2 - 2) , \\ EJ \bar{\varphi} = \frac{\mu l}{6} (-3\xi^2 - 3x^2 + 6x - 2) \end{array} \right.$$

e quindi le tangenti sugli appoggi (1):

$$(122') \quad EJ\alpha = \frac{\mu l}{6} (6\xi - 3\xi^2 - 2) \quad , \quad EJ\beta = \frac{\mu l}{6} (-3\xi^2 + 1) \quad ,$$

i momenti flettenti:

$$(123') \quad M = \mu x \quad , \quad \bar{M} = -\mu(1-x) \quad ,$$

i tagli:

$$(124') \quad T = A = \frac{\mu}{l} \quad , \quad T = -B = \frac{\mu}{l} \quad .$$

In particolare per la coppia agente in mezzeria ($\xi = 1/2$):

$$(126' - 127') \quad EJ\eta = \frac{\mu l^2 x}{24} (1 - 4x^2) \quad , \quad EJ\varphi = \frac{\mu l}{24} (1 - 12x^2) \quad ,$$

$$(128' - 129') \quad EJf = 0 \quad , \quad EJ\alpha = \frac{\mu l}{24} \quad ;$$

per la coppia agente all'estremo B ($\xi = 1$):

$$(132) \quad EJ\eta = \frac{\mu l^2 x}{6} (1 - x^2) \quad , \quad EJ\varphi = \frac{\mu l}{6} (1 - 3x^2) \quad ,$$

$$(133) \quad EJ\alpha = \frac{\mu l}{6} \quad , \quad EJ\beta = \frac{\mu l}{3} \quad .$$

E) CARICO DISTRIBUITO.

Per un carico espresso ancora dalla (79) introducendo la (119) nella (66) ed integrando, otteniamo:

$$(134) \quad \eta = \frac{l^{k+4} a^k}{EJ(k+1)(k+2)} \left[\frac{x^{k+4}}{(k+3)(k+4)} - \frac{x^3}{6} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(k+3)(k+4)} \right) x \right] \quad .$$

Da questa e dalle successive derivate si trae in particolare:

a) *carico uniformemente ripartito* ($k=0$, $a_0 = p$), figura 74:

$$(135) \quad \eta = \frac{pl^4}{24 EJ} (x^4 - 2x^3 + x) \quad , \quad f = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{EJ} \quad ,$$

$$(136) \quad \varphi = \frac{pl}{24 EJ} (4x^3 - 6x^2 + 1) \quad , \quad \alpha = -\beta = \frac{pl}{24 EJ} = \frac{Ql}{24 EJ} \quad ,$$

(1) È facile constatare che:

$$\alpha \geq 0 \quad \text{per} \quad \xi \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad \beta \geq 0 \quad \text{per} \quad \xi \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .$$

$$(137) \quad M = \frac{pl^2}{2} x(1-x) \quad , \quad M_c = \frac{pl^2}{8} = \frac{Ql}{8} .$$

$$(138) \quad \begin{cases} T = \frac{pl}{2} (1-2x) , \\ A = B = \frac{pl}{2} = \frac{Q}{2} . \end{cases}$$

Il taglio varia dunque linearmente ed è nullo nella mezzeria (fig. 74 a); il momento flettente è massimo al centro e decresce parabolicamente fino ad annullarsi in corrispondenza degli appoggi (fig. 74 b); l'inclinazione, nulla in mezzeria, cresce con legge espressa da una parabola cubica procedendo dal centro verso gli appoggi (fig. 74 c); la linea elastica è un segmento di parabola del quarto ordine con ordinata massima in mezzeria e nulla agli appoggi (fig. 74 d).

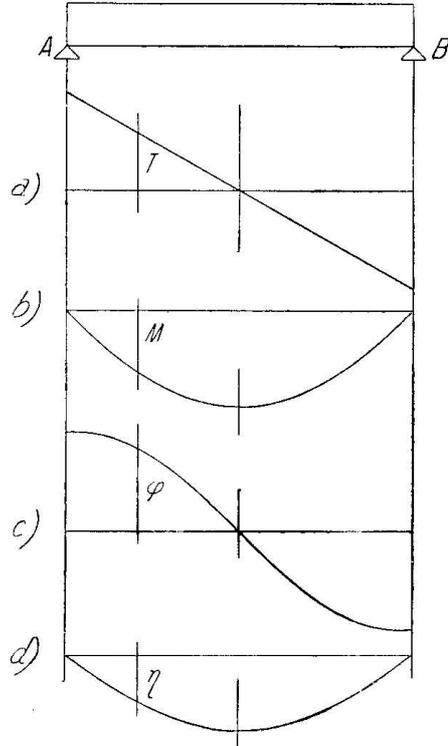


Fig. 74

b) carico proporzionale all'ascissa
 z ($k=1$, $a_0=p/l$), figura 75 b :

$$(139) \quad \begin{cases} \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (3x^5 - 10x^3 + 7x) , \\ f = \frac{pl^4}{675 EJ} \sqrt{15 + 12 \sqrt{\frac{2}{15}}} = \frac{2 Ql^3}{675 EJ} \sqrt{15 + 12 \sqrt{\frac{2}{15}}} , \end{cases}$$

$$(140) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{pl^3}{360} (15x^4 - 30x^2 + 7) , \\ \alpha = \frac{7}{360} \frac{pl^3}{EJ} = \frac{7}{180} \frac{Ql^3}{EJ} , \\ \beta = -\frac{9}{360} \frac{pl^3}{EJ} = -\frac{9 Ql^3}{180 EJ} , \end{cases}$$

$$(141) \quad M = \frac{pl^2}{6} x(1-x^2) \quad , \quad M_{max} = \frac{pl^2}{9\sqrt{3}} = \frac{2}{9} \frac{Ql^3}{\sqrt{3}} ,$$

$$(142) \quad T = \frac{pl}{6} (1-3x^2) \quad , \quad A = \frac{pl}{6} = \frac{Q}{3} \quad , \quad B = -(T)_{\xi=1} = \frac{pl}{3} = \frac{2}{3} Q .$$

L'espressione della freccia si ottiene introducendo nella prima delle

(139) il valore di x per cui è nulla l'inclinazione, cioè, con riguardo alla prima delle (140) e scartando le radici che non interessano:

$$x_f = \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{2}{15}}} = \approx 0,520 .$$

Si constata poi che l'ordinata in mezzeria ($x = x_c = 1/2$) ha lo stesso valore fornito dall'ultima delle (135), cioè è uguale alla freccia corrispondente allo stesso carico $Q = pl/2$ supposto uniformemente ripartito, ciò che era da attendersi, data la simmetria dell'influenza $v(x_c, \xi)$ rispetto alla verticale media.

Analogamente il momento flettente massimo si ottiene introducendo nella relativa espressione l'ascissa per cui è nullo il taglio, cioè:

$$x^* = 1 : \sqrt{3} = \approx 0,577 .$$

Le reazioni A e B valgono rispettivamente $1/3$ e $2/3$ del carico totale Q , ciò che poteva dedursi immediatamente considerando che la risultante di detto carico agisce all'ascissa $\xi = 2/3$.

c) *carico variabile con legge proporzionale all'ascissa $z' = l - z$.* Le formule relative a questo caso possono dedursi per simmetria dal caso precedente ovvero per

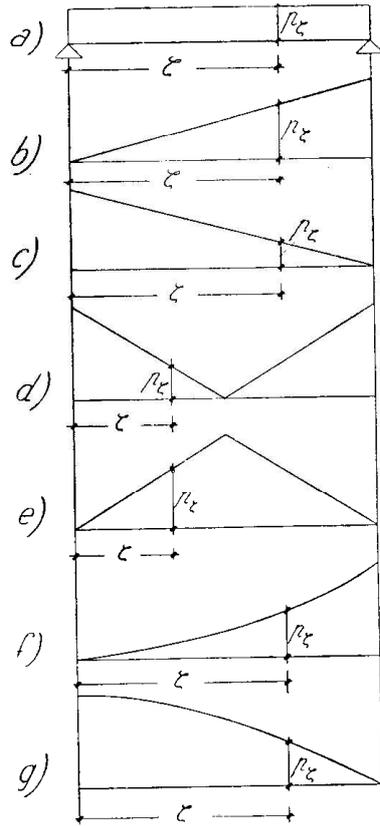


Fig. 75

sovrapposizione dei precedenti casi a) e — b) fig. 75 c):

$$(143-144) \quad \begin{cases} \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (-3x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 8x), \\ \varphi = \frac{pl^3}{360 EJ} (-15x^4 + 60x^3 - 60x^2 + 8), \end{cases}$$

$$(145-146) \quad M = \frac{pl^2}{6} x^3 - 3x^2 + 2x \quad , \quad T = \frac{pl}{6} (3x^2 - 6x + 2) .$$

È chiaro che le tangenti sugli appoggi e le reazioni hanno i valori che si ottengono scambiando tra loro quelli relativi al caso precedente; i mas-

simi d'inflexione e di momento flettente si producono nelle sezioni simmetriche di quelle ivi determinate, restandone inalterati i valori.

d) *carico simmetrico decrescente linearmente verso la mezzeria* (fig. 75 d).

L'equazione della linea elastica può dedursi sommando, per la mensola di lunghezza $\bar{l}=l/2$, le ordinate d'inflexione η_1 per il carico crescente linearmente da zero al valore p (n° 28 C, b) a quelle η_2 della stessa mensola per il carico $P = -pl/2$ agente all'estremo libero ($\xi=1$) (n° 28 B), detraendo tale somma dalla freccia \bar{f} corrispondente all'azione simultanea dei carichi suddetti e cambiando di segno. Essendo:

$$EJ \eta_1 = \frac{p\bar{l}^3}{120} (\bar{x}^5 - 10\bar{x}^3 + 20\bar{x}^2) \quad , \quad EJ \eta_2 = -\frac{p\bar{l}^3}{12} (3\bar{x}^2 - \bar{x}^3)$$

$$EJ \bar{\eta} = EJ (\eta_1 + \eta_2) = \frac{p\bar{l}^3}{120} (\bar{x}^5 - 10\bar{x}^3) \quad , \quad EJ \bar{f} = -\frac{9}{120} p\bar{l}^4$$

avremo:

$$EJ \eta = -EJ (\bar{f} - \bar{\eta}) = \frac{p\bar{l}^3}{120} (\bar{x}^5 - 10\bar{x}^3 + 9) \quad ,$$

Sostituendo poi $\bar{l}=l/2$ ed $\bar{x}=2(x-1/2)$ si ottiene:

$$EJ \eta = \frac{pl^3}{960} (16x^5 - 40x^4 + 40x^3 + 40x^2 + 25x - 1) \quad ,$$

equazione valevole nel tratto $1/2 \leq x \leq 1$, mentre quella per il tratto $0 \leq x \leq 1/2$, si ottiene ponendo in luogo di x il complemento $1-x$ in quella ultima scritta. Effettuata tale sostituzione e derivando successivamente, otteniamo infine:

$$(147) \quad \begin{cases} \eta = \frac{pl^3}{960 EJ} (-16x^4 + 40x^3 - 40x^2 + 15x) \quad , \\ f = \frac{3}{640} \frac{pl^3}{EJ} = \frac{3}{320} \frac{Ql^3}{EJ} \quad , \end{cases}$$

$$(148) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{192} \frac{pl^3}{EJ} (-16x^4 + 32x^3 - 24x^2 + 2) \quad , \\ \alpha = -\beta = \frac{1}{64} \frac{pl^3}{EJ} = \frac{1}{32} \frac{Ql^3}{EJ} \quad , \end{cases}$$

$$(149) \quad M = \frac{1}{12} pl^2 (4x^3 - 6x^2 + 3x) \quad , \quad M_c = \frac{pl^2}{24} = \frac{Ql}{12} \quad ,$$

$$(150) \quad T = \frac{pl}{4} (4x^2 - 4x + 1) \quad , \quad A = -B = \frac{pl}{4} = \frac{Q}{2} \quad ;$$

e) *carico simmetrico crescente linearmente verso la mezzeria* (fig. 75 e).
Per sovrapposizione dei precedenti casi a) e — d) otteniamo:

$$(151) \quad \eta = \frac{pl^4}{960 EJ} (16x^5 - 40x^3 + 25x), \quad f = \frac{pl^4}{120 EJ} = \frac{Ql^3}{60 EJ},$$

$$(152) \quad \varphi = \frac{pl^3}{192 EJ} (16x^4 - 24x^2 + 5), \quad \alpha = -\beta = \frac{5}{192} \frac{pl^3}{EJ} = \frac{5}{96} \frac{Ql^2}{EJ},$$

$$(153) \quad M = \frac{pl^2}{12} (3x - 4x^3), \quad M_c = \frac{pl^2}{12} = \frac{Ql}{6},$$

$$(154) \quad T = \frac{pl}{4} (1 - 4x^2), \quad A = -B = \frac{pl}{4} = \frac{Q}{2};$$

f) *carico crescente parabolicamente nell'ascissa z* ($k=2$, $a_2 = p/l^2$, figura 75 f):

$$(155-156) \quad \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (x^6 - 5x^3 + 4x), \quad \varphi = \frac{pl^3}{360 EJ} (6x^5 - 15x^2 + 4),$$

$$(157-158) \quad M = \frac{pl^2}{12} x(1 - x^3), \quad T = \frac{pl}{12} (1 - 4x^3),$$

$$(159-160) \quad A = \frac{pl}{12} = \frac{1}{4} Q, \quad -B = -\frac{pl}{4} = \frac{3}{4} Q.$$

g) *carico complementare del precedente* (sovrapposizione dei precedenti casi a) e — f), figura 75 g):

$$(161) \quad \eta = \frac{pl^4}{360 EJ} (-x^6 + 15x^4 - 25x^3 + 11x),$$

$$(162) \quad \varphi = \frac{pl^3}{360 EJ} (-6x^5 + 60x^3 - 75x^2 + 11),$$

$$(163-164) \quad M = \frac{pl^2}{12} (x^4 - 6x^2 + 5x), \quad T = \frac{pl}{12} (4x^3 - 12x + 5),$$

$$(165-166) \quad A = \frac{5}{12} pl = \frac{5}{8} Q, \quad -B = -\frac{3}{12} pl = -\frac{3}{8} Q.$$

h) *carico parabolico simmetrico*. La soluzione per un carico parabolico qualsiasi può ottenersi sommando le soluzioni che si traggono dalla (134) ponendovi successivamente (fig. 76 a):

$$\begin{aligned} k_0 = 0 & \quad , & k_1 = 1 & \quad , & k_2 = 2 & \quad , \\ \alpha_0 = p_a & \quad , & \alpha_1 = p' : l & \quad , & \alpha_2 = p'' : l^2 & \quad . \end{aligned}$$

In particolare per carico simmetrico i coefficienti valgono (fig. 76 b):

$$a_0 = p_a \quad , \quad a_1 = 4p_0 : l \quad , \quad a_2 = -4p_0 : l^2 ;$$

sostituendo nella (134) le singole coppie k , a_k , sommando e semplificando, avremo:

$$(167) \quad EJ \eta = \frac{l^4}{360} [15 p_a (x^4 - 2x^3 + x) - 4 p_0 (x^6 + 3x^5 + 5x^3 - 3x)]$$

e derivando due volte quest'ultima, dopo facili riduzioni:

$$(168) \quad EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = -M = \frac{l^2}{6} [3 p_a (x^2 - x) - 2 p_0 (x^4 - 2x^3 + x)] .$$

Per $x = 1/2$ le due ultime forniscono rispettivamente la freccia ed il momento flettente massimo:

$$(169-170) \quad f = \frac{l^4}{5760 EJ} (75 p_a + 61 p_0) \quad , \quad M_c = \frac{l^2}{48} (6 p_a + 5 p_0) .$$

È ovvio come mutando il segno di p_0 si ottengono le espressioni valevoli per il caso del carico decrescente verso la mezzeria (fig. 76 c).

30 — Rappresentazione delle linee elastiche con serie di funzioni.

Lo studio di molti problemi resta facilitato quando l'ordinata della linea elastica sia esprimibile in serie di funzioni:

$$\eta = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots ;$$

ciò è possibile quando le funzioni φ soddisfino alle condizioni di vincolo della trave e la loro serie sia convergente. I coefficienti a_i si determinano in base a considerazioni di elasticità.

Per la trave semplice si presta bene allo scopo la serie di seni; posto infatti:

$$EJ \eta = c_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} ,$$

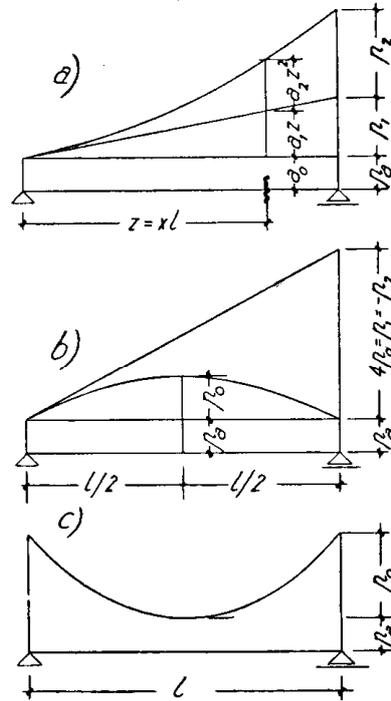


Fig. 76

con m intero positivo, è facile vedere che sono soddisfatte le condizioni (117) mentre, per la (59), dev'essere:

$$p_x = \frac{m^4 \pi^3}{l^4} c_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} .$$

Pertanto se il carico può porsi sotto la forma:

$$(171) \quad p_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} ,$$

il cui coefficiente generico vale, com'è noto:

$$(172) \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l p_x \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} dz ,$$

il momento flettente è rappresentato dalla serie di seni:

$$(173) \quad M_x = - \frac{l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l}$$

e la linea elastica dall'altra:

$$(174) \quad EJ \eta = \frac{l^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^4} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} .$$

Queste serie convergono in ogni caso molto rapidamente e perciò si prestano ottimamente al calcolo numerico. Geometricamente esse significano che le intensità di carico, i momenti flettenti e le inflessioni possono riguardarsi come somma algebrica delle ordinate di infiniti diagrammi sinoidali.

Se il carico p è esteso a tutta la trave ed uniformemente ripartito, dalla (99) risultano tutti nulli i coefficienti a_k per k dispari mentre per k pari è $a_k = 4p : k \pi$; sicchè la (171) diviene:

$$(175) \quad p = \frac{4p}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} ,$$

e conseguentemente la (173) e la (174) rispettivamente:

$$(176) \quad M_x = \frac{4p}{\pi^3} l^2 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} ,$$

$$(177) \quad EJ \eta = \frac{4p}{\pi^5} l^4 \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^5} \operatorname{sen} \frac{k \pi z}{l} .$$

Se il carico p_z non è distribuito con continuità, si ricorre alla teoria generale delle serie di Fourier.

Detta $p_i(\zeta)$ la funzione che rappresenta il carico tra le ascisse ζ_{i-1} e ζ_i che limitano l' i^{mo} degli n intervalli nei quali il carico varia con continuità, il coefficiente a_k dello sviluppo (98) è espresso dalla somma:

$$(178) \quad a_k = \frac{2}{l} \sum_{i=1}^n \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} p_i(\zeta) \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} dz.$$

Nel caso particolare di un carico uniforme compreso tra le ascisse ζ_1 e ζ_2 , essendo:

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &= 0 & (0 \leq \zeta < \zeta_1), \\ p_2(\zeta) &= p & (\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2), \\ p_3(\zeta) &= 0 & (\zeta_2 < \zeta \leq l), \end{aligned}$$

sarebbe:

$$(179) \quad a_k = \frac{2}{l} p \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} dz = \frac{2p}{k\pi} \left(\cos \frac{k\pi \zeta_1}{l} - \cos \frac{k\pi \zeta_2}{l} \right).$$

Il caso di un carico concentrato all'ascissa ζ_1 può dedursi dal precedente passando al limite per ζ_2 tendente a ζ_1 , rimanendo però invariabile $P = p(\zeta_2 - \zeta_1)$. Si ottiene così:

$$(180) \quad a_k = \frac{2}{l} P \operatorname{sen} \frac{k\pi \zeta_1}{l}.$$

* * *

In base alle (171) e (180) la funzione d'influenza d'inflessione di una trave semplice, già espressa dalle (149), prende la nuova forma:

$$(181) \quad v(x, \xi) = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \operatorname{sen} k\pi x \operatorname{sen} k\pi \xi,$$

valevole in tutto il campo di definizione. Da questa discende immediatamente lo sviluppo in serie relativo ad una distribuzione di carico tutto generale.

Ammessi che tale distribuzione consista in un carico ripartito $p(\xi)$ esprimibile mediante la (171) ed in n carichi concentrati P_i , avremo infatti:

$$\eta(x) = l \int_0^l v(x, \xi) p(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^n P_i v(x, \xi_i),$$

donde:

$$\eta(x) = \frac{2l^3}{EJ\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \left[l \int_0^l (\operatorname{sen} k\pi \xi \sum_{h=1}^{\infty} a_h \operatorname{sen} h\pi \xi) d\xi + \sum_{i=1}^n P_i \operatorname{sen} k\pi \xi_i \right] \operatorname{sen} k\pi x,$$

e finalmente, eseguendo l'integrazione (1):

$$(182) \quad \eta(x) = \frac{l^4}{EJ \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \left(a_k + \sum_{i=1}^n \frac{2 P_i}{l} \operatorname{sen} k \pi \xi_i \right) \operatorname{sen} k \pi x .$$

Per il momento flettente otterremo:

$$(183) \quad M(x) = \frac{l^4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(a_k + \sum_{i=1}^n \frac{2 P_i}{l} \operatorname{sen} k \pi \xi_i \right) \operatorname{sen} k \pi x$$

e per il corrispondente lavoro di deformazione:

$$(184) \quad \Phi_l = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2 EJ} = \frac{l^4}{2 EJ \pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} a_k + \sum_{i=1}^n \frac{2 P_i}{l} \operatorname{sen} k \pi \xi_i)^2 .$$

31 — Trave incastrata ad un estremo e poggiata all'altro.

Lo stato d'equilibrio elastico può in ogni caso ottenersi sovrapponendo nella trave liberata dall'appoggio, ridotta cioè ad una mensola, gli effetti del carico vero e proprio e della reazione X del vincolo soppresso.

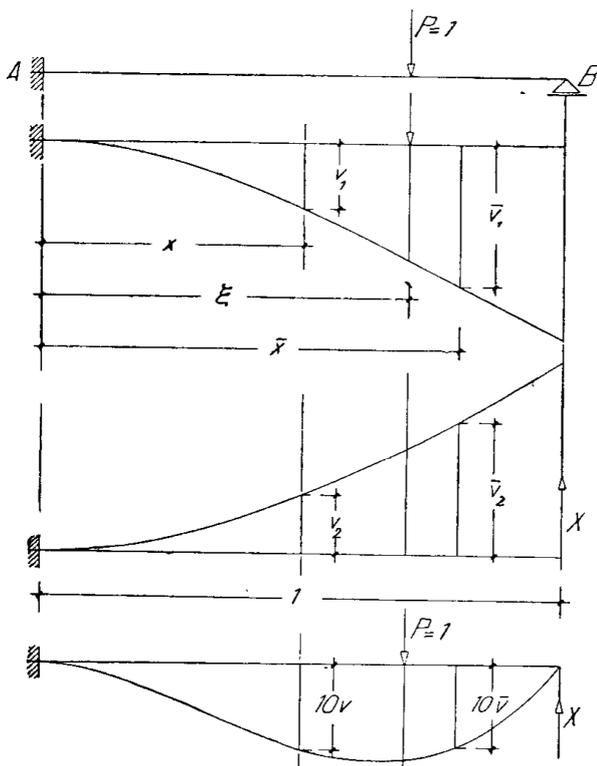


Fig. 77

A) FUNZIONE D'INFLUENZA.

Tenute presenti le (69) ed indicando coi numeri 1 e 2 le inflessioni corrispondenti ordinatamente negli effetti suddetti, avremo (fig. 77):

$$\begin{aligned} 6 EJ v_1 &= -l^3 x^2 (x - 3\xi) , \\ 6 EJ \bar{v}_1 &= -l^3 \xi^2 (\xi - 3x) , \\ 6 EJ v_2 &= X l^3 x^2 (x - 3) , \\ 6 EJ \bar{v}_2 &= X l^3 x^2 (x - 3) , \end{aligned}$$

e pertanto:

$$(185) \quad \begin{cases} 6 EJ v = -l^3 x^2 [(x - 3\xi) - X(x - 3)] , \\ 6 EJ \bar{v} = -l^3 [\xi^2 (\xi - 3x) - X x^2 (x - 3)] . \end{cases}$$

(1) Si ricordi che per h e k interi positivi, si ha:

$$\int_0^1 \operatorname{sen} h \pi \xi \operatorname{sen} k \pi \xi d\xi = \begin{cases} 0 & \text{per } h \neq k , \\ 1 & \text{» } h = k \neq 0 . \end{cases}$$

Supposto intanto rigido l'appoggio, dev'essere $(\bar{v})_{x=l} = 0$, donde:

$$(186) \quad X = -\frac{\xi^2}{2} (\xi - \beta).$$

Le (185) pertanto divengono:

$$(187) \quad \begin{cases} 12 EJ v = l^3 x^2 [2(\beta \xi - x) - \xi^2 (\beta - \xi) (\beta - x)], \\ 12 EJ \bar{v} = l^3 \xi^2 [2(\beta x - \xi) - x^2 (\beta - x) (\beta - \xi)]. \end{cases}$$

Analogamente per l'azione di coppie, partendo dalle (69'), otteniamo:

$$\begin{aligned} 6 EJ v_l = -\beta l^2 x^2 & \quad , & 6 EJ \bar{v}_l = -\beta l^2 \xi (2x - \xi) , \\ 6 EJ v = X l^3 x^2 (x - \beta) & \quad , & 6 EJ \bar{v}_x = X l^3 x^2 (x - \beta) ; \end{aligned}$$

quindi:

$$(185') \quad \begin{cases} 6 EJ v = -l^2 x^2 [\beta - X l (x - \beta)], \\ 6 EJ \bar{v} = -l^2 [\beta \xi (2x - \xi) - X l x^2 (x - \beta)]. \end{cases}$$

La condizione $(\bar{v})_{x=l} = 0$ importa ora:

$$(186') \quad X = -\frac{\beta}{2l} \xi (2 - \xi),$$

sicchè le (185') divengono:

$$(187') \quad \begin{cases} 12 EJ v = -l^2 x^2 [6 - \beta \xi (2 - \xi) (\beta - x)], \\ 12 EJ \bar{v} = -\beta l^2 \xi [2(2x - \xi) - x^2 (2 - \xi) (\beta - x)]. \end{cases}$$

B) CARICHI CONCENTRATI.

Per un sol carico P avremo:

le inflessioni:

$$(188) \quad \begin{cases} EJ \eta = \frac{P l^3 x^2}{12} [2(\beta \xi - x) - \xi^2 (\beta - \xi) (\beta - x)], \\ EJ \bar{\eta} = \frac{P l^3 \xi^2}{12} [2(\beta x - \xi) - x^2 (\beta - x) (\beta - \xi)]; \end{cases}$$

le inclinazioni:

$$(189) \quad \begin{cases} EJ \varphi = \frac{P l^2 x}{4} [2(2\xi - x) - \xi^2 (\beta - \xi) (2 - x)], \\ EJ \bar{\varphi} = \frac{P l^2 \xi^2}{2} [2 - x (2 - x) (\beta - \xi)]; \end{cases}$$

i momenti flettenti:

$$(190) \quad M = -\frac{Pl}{2} [2(\xi - \alpha) - \xi^2(\beta - \xi)(1 - \alpha)] \quad , \quad \bar{M} = \frac{Pl\xi^2}{2} (\beta - \xi)(1 - \alpha) ,$$

i tagli:

$$(191) \quad T = \frac{P}{2} [(\beta - \xi)\xi^2 - 2] \quad , \quad \bar{T} = -\frac{P}{2} (\beta - \xi)\xi^2 ,$$

È facile verificare che l'ascisa di massima inflessione (inclinazione nulla) vale:

$$(192-193) \quad x_c = 2\xi \frac{\xi(\beta - \xi) - 2}{\xi^2(\beta - \xi) - 2} \quad \text{ovvero:} \quad \bar{x}_c = 1 - \sqrt{\frac{1 - \xi}{\beta - \xi}} ,$$

secondochè $\xi \geq \approx 0,585$.

Il momento flettente assume all'incastro il valore minimo:

$$(194) \quad M_A = -\frac{Pl\xi}{2} [2 - \xi(\beta - \xi)] ,$$

sotto il carico il valore massimo:

$$(195) \quad M_C = \frac{Pl}{2} \xi^2 (\beta - \xi)(1 - \xi) .$$

C) AZIONE DI COPPIE.

Per la coppia di momento μ le (187') forniscono successivamente:

$$(196) \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \eta = -\frac{\mu l^2 x^2}{12} [6 - 3\xi(2 - \xi)(\beta - \alpha)] , \\ EJ \bar{\eta} = -\frac{\mu l^2 \xi}{4} [2(2\alpha - \xi) - x^2(2 - \xi)(\beta - \alpha)] , \end{array} \right.$$

$$(197) \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \varphi = -\frac{\mu l \alpha}{4} [4 - 3\xi(2 - \xi)(2 - \alpha)] , \\ EJ \bar{\varphi} = -\frac{\mu l \xi}{4} [4 - 3\alpha(2 - \alpha)(2 - \xi)] , \end{array} \right.$$

$$(198) \quad M = \frac{\mu}{2} [2 - 3\xi(2 - \xi)(1 - \alpha)] \quad , \quad \bar{M} = -\frac{3}{2} \mu \xi(2 - \xi)(1 - \alpha) ,$$

$$(199-200) \quad T = \bar{T} = \frac{3}{2l} \mu \xi(2 - \xi) \quad , \quad X = B = -\bar{T} = -\frac{3}{2l} \mu \xi(2 - \xi) .$$

D) CARICO DISTRIBUITO.

Per la solita legge di carico $p(\xi) = a_k l^k \xi^k$ e per la funzione d'influenza espressa dalle (187) la (66) fornisce:

$$(201) \quad \eta = \frac{4x^{k+4} - (k+2)(k+5)x^3 + (k+1)(k+6)x^2}{4EJ(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_k l^{k+4},$$

e derivando successivamente:

$$(202) \quad \varphi = \frac{4(k+4)x^{k+3} - 3(k+2)(k+5)x^2 + 2(k+1)(k+6)x}{4EJ(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_k l^{k+3}.$$

$$(203) \quad -M = \frac{2(k+3)(k+4)x^{k+2} - 3(k+2)(k+5)x + (k+1)(k+6)}{2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_k l^{k+2},$$

$$(204) \quad -T = \frac{2(k+2)(k+3)(k+4)x^{k+1} - 3(k+2)(k+5)}{2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} a_k l^{k+1}.$$

In particolare per un carico uniformemente ripartito ($k=0$, $a_0 = p$), otteniamo:

$$(205-206) \quad \eta = \frac{pl^4}{48EJ} (2x^4 - 5x^3 + 3x^2), \quad \varphi = \frac{pl^3}{48EJ} (8x^3 - 15x^2 + 6x)$$

$$(207-208) \quad M = -\frac{pl^2}{8} (4x^2 - 5x + 1) \quad , \quad T = -\frac{pl}{8} (8x - 5).$$

L'inflessione al centro vale:

$$(209) \quad (\eta)_{x=0,5} = \frac{pl^4}{192EJ} = \frac{Ql^3}{192EJ},$$

mentre quella massima, relativa all'ascissa $x_e = \approx 0,579$ che si ottiene dalle (206) ponendovi $\varphi = 0$, è:

$$(210) \quad f = \frac{25}{24} \frac{Ql^3}{192EJ}.$$

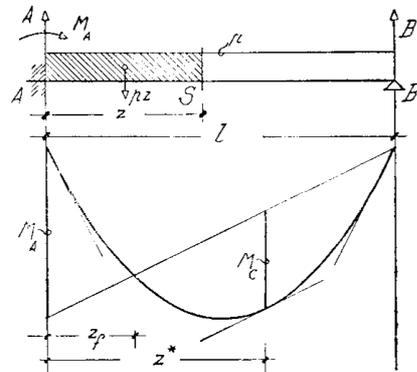


Fig. 78

Il momento flettente all'incastro ($x=0$) ed all'ascissa $x=5/8$ ($T=0$) assume rispettivamente i valori minimo e massimo (fig. 78):

$$(211-212) \quad M_A = -\frac{pl^2}{8} \quad , \quad M_C = \frac{9}{128} pl^2;$$

è nullo per:

$$(213) \quad x = \frac{5}{8} (1 \pm 0,6),$$

sicchè i flessi della linea elastica hanno le ascisse $x_{f_1} = 1/4$ ed $x_{f_2} = 1$.

Le reazioni degli appoggi valgono:

$$(214) \quad A = (T)_{x=0} = \frac{5}{8} pl = \frac{5}{8} Q, \quad B = -(T)_{x=1} = \frac{3}{8} pl = \frac{3}{8} Q.$$

E) IMPERFEZIONI DEI VINCOLI.

Una rotazione anelastica α dell'incastro A nella trave liberata dall'appoggio B dà luogo agli spostamenti rigidi $v_1 = \alpha lx$ forniti dalla (109) per $\eta_A = 0$. Poichè, d'altra parte, gli spostamenti elastici della stessa mensola caricata in B dalla forza X sono espressi dalla $v_2 = X l^3 \alpha^2 (x - 3) / 6EJ$, per sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\eta_c = v_1 + v_2 = \alpha xl + \frac{X l^3 \alpha^2}{6 EJ} (x - 3).$$

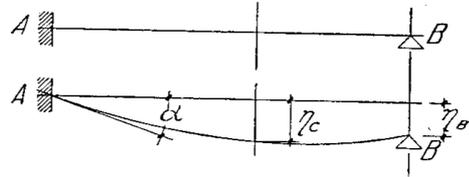


Fig. 79

Ma nel sistema effettivo lo spostamento dell'estremo B ($x=1$) ha il valore η_B nell'eventuale cedimento anelastico relativo tra l'appoggio stesso e l'incastro; dev'essere dunque (fig. 79):

$$\eta_B = \alpha l + \frac{X l^3}{3 EJ},$$

donde:

$$(215) \quad X = \frac{3 EJ}{l^3} (\eta_B - \alpha l).$$

L'equazione della linea elastica per le imperfezioni vincolari caratterizzate dai cedimenti α ed η_B è pertanto:

$$(216) \quad \eta_c = \alpha xl + \frac{\eta_B - \alpha l}{2} \alpha^2 (x - 3).$$

Derivando successivamente otteniamo:

le inclinazioni:

$$(217) \quad \varphi = \alpha + \frac{3x}{2l} (\eta_B - \alpha l) (x - 2),$$

i momenti flettenti:

$$(218) \quad M = - \frac{3 EJ}{l^2} (\eta_B - \alpha l) (x - 1),$$

il momento d'incastro ($x=0$):

$$(219) \quad M_A = -\frac{3EJ}{l^3}(\gamma_B - \alpha l),$$

il taglio:

$$(220) \quad T = A = -X = -\frac{3EJ}{l^3}(\gamma_B - \alpha l).$$

32 — Trave incastrata agli estremi.

A) FUNZIONE D'INFLUENZA.

Le condizioni di vincolo, in assenza di imperfezioni, importano:

$$(221) \quad \begin{cases} (v)_{x=0} = 0 & , & (\bar{v})_{x=l} = 0, \\ (v')_{x=0} = 0 & , & (\bar{v}')_{x=l} = 0, \end{cases}$$

e conseguentemente, per le (62), le costanti:

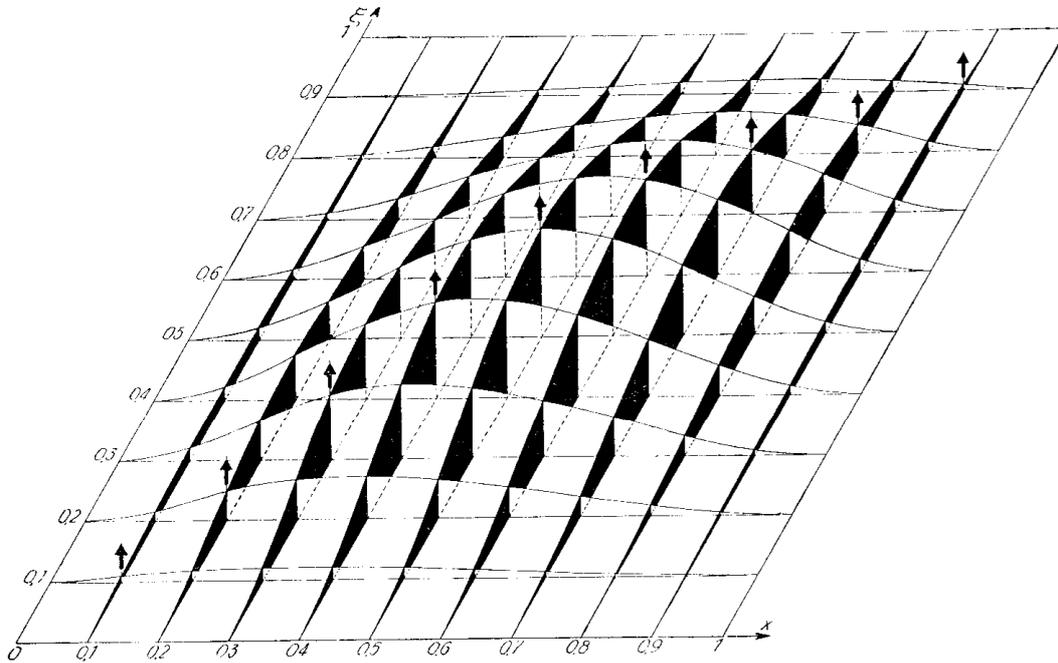


Fig. 80

$$\begin{aligned} C_0 + \frac{1}{12} = 0 & \quad , \quad C_1 - \frac{1}{4} = 0 & \quad , \quad C_2 + \frac{1}{4} = \frac{1 - \xi^2}{2} & \quad , \quad C_3 - \frac{1}{12} = \frac{\xi^2(3 - 2\xi) - 1}{6}, \\ C_0 - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} & \quad , \quad C_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} & \quad , \quad C_2 - \frac{1}{4} = -\frac{\xi(2 - \xi)}{2} & \quad , \quad C_3 + \frac{1}{12} = \frac{\xi^2(3 - 2\xi)}{6}. \end{aligned}$$