

L'INSTABILITÀ ELASTICA

94 — Generalità.

La teoria dell'elasticità si basa ordinariamente sulla considerazione di deformazioni talmente piccole da poter trascurare gli spostamenti rispetto alle dimensioni del sistema. L'equilibrio resta, di conseguenza, espresso da equazioni che non contengono tali spostamenti, *come se il sistema conservasse la sua configurazione iniziale*. La teoria stessa ammette poi la validità della legge di Hooke, in virtù della quale *gli spostamenti, le tensioni e le deformazioni sono proporzionali ai carichi*.

Per taluni sistemi resistenti le ipotesi semplificative ora ricordate sono peraltro inammissibili, perchè l'ordine di grandezza degli spostamenti è troppo elevato o, comunque, non diverso da quello delle dimensioni del sistema. D'altra parte, intervenendo gli spostamenti nelle dette equazioni, cessa la proporzionalità degli effetti ai carichi.

L'approssimazione dell'ordinaria teoria lineare può in tali casi ritenersi soddisfacente per carichi relativamente piccoli, spesso d'un ordine di grandezza assai inferiore a quello ch'essi hanno nella fase di servizio del sistema; mentre, al crescere del carico con una data legge, gli errori divengono via via più sensibili, dato che gli effetti crescono in realtà con legge più rapida.

Si restringe di conseguenza il campo dei valori ammissibili del carico; inoltre, modificandosi l'equilibrio al crescere del carico stesso, il sistema o parti di esso possono raggiungere *configurazioni instabili* e quindi particolarmente pericolose, in quanto basta appena perturbarle perchè il sistema le abbandoni allontanandosene indefinitamente. Si tratta, in campo elastico, di situazioni d'equilibrio analoghe, ad esempio, a quella d'un

pendolo rigido disposto col suo baricentro sulla verticale del centro di sospensione.

Esamineremo qui appresso, limitatamente alle travi, i casi più interessanti nei quali le deformazioni influiscono in modo non trascurabile sullo stato di sollecitazione.

95 — Trave caricata parallelamente all'asse.

Una trave prismatica ad asse rettilineo, per esempio incastrata ad un estremo e libera all'altro, sia cimentata da un carico P la cui retta di azione, parallela all'asse del prisma, ne incontri la sezione trasversale generica in un punto di uno degli assi principali d'inerzia, alla distanza δ dal baricentro. Ogni sezione del prisma è allora soggetta al momento flettente:

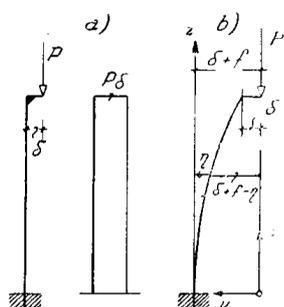


Fig. 191

$$(533) \quad M = P\delta,$$

ed il corrispondente diagramma è un rettangolo di ordinata $P\delta$ (fig. 191 a). La deformata dell'asse geometrico per la flessione è un arco circolare di raggio:

$$r = \frac{EJ}{M} = \frac{EJ}{P\delta},$$

di freccia:

$$f = \frac{l^2}{2} \frac{1}{r} = \frac{l^2}{2} \frac{M}{EJ} = \frac{P\delta l^2}{EJ}.$$

Ciò presuppone che le inflessioni della trave siano trascurabili rispetto a δ , come può ammettersi per una trave tozza; per conto, se le dimensioni trasversali sono esigue rispetto alla lunghezza, l'inflessione altera il braccio di leva della forza P per le diverse sezioni in misura non più trascurabile, e quanto più piccolo è δ .

In questo secondo caso occorre sostituire alla (533) l'altra:

$$M_z = -P(\delta + f - \eta),$$

per cui l'equazione differenziale della linea elastica diviene (fig. 191 b):

$$(534) \quad EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = P(\delta + f - \eta).$$

Posto:

$$(535) \quad -y = \delta + f - \eta,$$

con che risulta $d^2\eta/dz^2 = d^2y/dz^2$, ed introdotta la notazione:

$$(536) \quad a^2 = P/EJ ,$$

la (534) prende la forma:

$$(534') \quad \frac{d^2 h}{dz^2} + a^2 y = 0 ,$$

che è un'equazione differenziale del second'ordine lineare omogenea.

Poichè l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + a^2 = 0$$

ha le radici distinte:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array} \right\} = \pm a \sqrt{-1} = \pm i a ,$$

l'integrale generale della (534') si scrive:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 z} + C_2 e^{\lambda_2 z} = C_1 e^{iaz} + C_2 e^{-iaz} ,$$

ovvero, per le note relazioni di Eulero:

$$y = (C_1 + C_2) \cos(az) + i(C_1 - C_2) \sin(az) = A \cos(az) + B \sin(az) ,$$

donde, per la (535):

$$(537) \quad \eta = \delta + f + A \cos(az) + B \sin(az) .$$

Le costanti d'integrazione A e B restano determinate dalle condizioni ai limiti. Supposto l'incastro perfetto, avremo per $z=0$:

$$\eta = 0 \quad , \quad \cos(az) = 1 \quad , \quad \sin(az) = 0 \quad ,$$

e conseguentemente

$$A = -(\delta + f) ;$$

derivando poi la (537) rispetto a z :

$$\frac{d\eta}{dz} = -A a \sin(az) + B a \cos(az)$$

e posto $d\eta/dz=0$ per $z=0$, si trae $B=0$.

Con ciò la (537) diviene:

$$(537') \quad \eta = (\delta + f)[1 - \cos(az)] .$$

Siccome poi, per $z=l$ è $\eta=f$, avremo ancora:

$$f = (\delta + f)[1 - \cos(al)] = \delta + f - (\delta + f) \cos(al) ,$$

da cui:

$$(538) \quad \delta = (\delta + f) \cos(al) .$$

Finalmente dividendo membro a membro le (537') e (538), si ottiene:

$$(539) \quad \frac{\eta}{\delta} = \frac{1 - \cos(az)}{\cos(al)} .$$

che è l'equazione della linea elastica in termini finiti.

La sollecitazione massima è sopportata dalla sezione d'incastro, per la quale il braccio di leva del carico raggiunge il valore fornito dalla (538):

$$(538') \quad \delta + f = \frac{\delta}{\cos(al)} .$$

Ne derivano il momento flettente:

$$(540) \quad M_{max} = -P(\delta + f) = -\frac{P\delta}{\cos(al)} ;$$

e le corrispondenti tensioni massime:

$$\sigma' = -\frac{P}{A} + \frac{P\delta}{J \cos(al)} y' \quad , \quad \sigma'' = -\frac{P}{A} - \frac{P\delta}{J \cos(al)} y'' ,$$

ovvero:

$$(541) \quad \sigma' = -\frac{P}{A} + \frac{P\delta}{W' \cos(al)} \quad , \quad \sigma'' = -\frac{P}{A} - \frac{P\delta}{W'' \cos(al)} ,$$

nelle quali P va ora introdotto in valore assoluto.

Queste espressioni delle σ pongono bene in rilievo la diversità del caso attuale di sollecitazione dagli altri finora considerati: al contrario che in questi, infatti, le σ non variano più linearmente col carico P , ma sono funzioni trascendenti di esso, comparando al denominatore il $\cos(al)$ in cui, secondo la posizione (536), è:

$$a = \sqrt{P/EJ} .$$

La conseguenza di questo fatto è che le condizioni di stabilità al modo come sono poste dalle (403/I), imponendo cioè che le tensioni massime debbano semplicemente risultare inferiori ai carichi di sicurezza, non hanno ora più significato. Infatti, mentre per valori di P tali che al sia prossimo a zero e quindi $\cos(al)$, prossimo ad uno, le σ si mantenen-

gono quasi proporzionali a P , se P cresce e con esso al , $\cos(al)$ diminuisce dapprima lentamente, poi sempre più rapidamente, fino ad annullarsi per $al = \pi/2$; contemporaneamente allora le σ crescono con legge sempre più rapida tendendo all'infinito.

Possiamo dunque affermare che in questo caso di sollecitazione le tensioni unitarie crescono più rapidamente del carico sollecitante, per modo che se anche per un certo valore di P troviamo corrispondergli valori ammissibili di σ' e σ'' , può ben avvenire che un piccolo aumento di P porti dette tensioni a raggiungere i carichi di snervamento e anche ad oltrepassarli, non sussistendo più l'ordinario margine di sicurezza tra carico ammissibile e carico di snervamento dei casi in cui carico e tensioni sono legati linearmente. In altri termini, mentre nei casi in cui è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, le:

$$\sigma'(\nu P) \leq \sigma'_E \quad , \quad |\sigma''(\nu P)| \leq \sigma''_E \quad ,$$

assicurano che per passare dalle $\sigma(P)$ alla $\sigma(\nu P)$ occorre e basta moltiplicare per ν , così come si moltiplica per ν per passare da k a σ_E , ora non può più dirsi altrettanto: per un aumento di P anche molto inferiore a quello che corrisponde al fattore di sicurezza ν , le tensioni σ' e σ'' possono superare le corrispondenti tensioni σ_E .

Se vogliamo dunque che per un ampliamento del carico nel rapporto ν non siano superate le tensioni critiche di cedimento del materiale, ordinariamente i carichi di snervamento, dovremo porre le condizioni di stabilità nella forma:

$$(542) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma' = -\frac{\nu P}{A} + \frac{\nu P \delta}{W' \cos\left(\sqrt{\frac{\nu P}{EJ}} l\right)} \leq \sigma'_E \quad , \\ |\sigma''| = \left| -\frac{\nu P}{A} - \frac{\nu P \delta}{W'' \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EJ}} l\right)} \right| \leq \sigma''_E \quad . \end{array} \right.$$

Per il grado di sicurezza ν si assumono in questo calcolo gli stessi valori che indicheremo in appresso per le travi caricate di punta.

Analoga alla precedente è la trattazione della trave rappresentata in fig. 192. Osservando anzi che, per ragioni di simmetria, ciascuna metà si comporta come l'intera mensola studiata di sopra, si riconoscono valide le (542), purchè s'intenda per l la semilunghezza della trave.



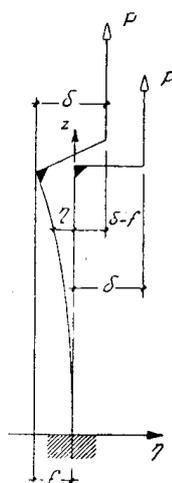
Fig. 192

* * *

Se il carico P anzichè di compressione è di trazione, la deformazione elastica favorisce la stabilità: il momento, dal valore $P\delta$ nella sezione estrema, va infatti diminuendo mentre si procede verso l'incastro, secondo la legge (fig. 193):

$$M_z = P(\delta - f + \eta) .$$

Introdotta quest'ultima nell'equazione differenziale della linea elastica, con procedimento analogo a quello seguito per la trave compressa, si giunge all'equazione in termini finiti:



(543)

$$\frac{\eta}{\delta} = - \frac{1 - \cosh(az)}{\cosh(al)} .$$

Poichè il momento massimo $P\delta$ non è influenzato dalla deformazione, la verifica di stabilità o il proporzionamento si effettua nel modo consueto, confrontando direttamente le tensioni estreme coi rispettivi carichi di sicurezza.

96 — Trave caricata di punta.

Le travi ad asse rettilineo relativamente snelle cementate da forze di compressione assiali, diconsi *caricate di punta*.

Se P è il carico assiale, A l'area della sezione trasversale minima, sappiamo già che l'equilibrio può sussistere indefinitamente purchè il rapporto $\sigma = P/A$ sia convenientemente limitato.

Si pone ora il seguente quesito: supposto che per una causa esterna qualunque, per esempio in seguito a vibrazioni od all'azione di carichi flettenti, si produca un'inflessione, sicchè lo sforzo di compressione non sia più baricentrico per la sezione generica, riprenderà la trave la configurazione iniziale rettilinea, conserverà l'inflessione o si infletterà maggiormente?

Cominciamo con l'osservare che la perfetta assialità del carico non può ammettersi che in via teorica: praticamente l'imperfetta omogeneità del materiale, le inevitabili imperfezioni di forma e di posa non permettono d'escludere una piccola eccentricità, che è però in ogni caso indeterminata sia in grandezza che in direzione.

Supposta, ad esempio, la trave prismatica, incastrata perfettamente ad un estremo e caricata da una forza assiale P all'altro, si può desu-

mere la trattazione del caso attuale di sollecitazione da quello studiato al n. 93, ponendo al limite il braccio di leva δ uguale a zero (fig. 194).

L'esame della (539) mostra che per $\delta=0$ possono verificarsi i due casi seguenti;

$\cos(al) \neq 0$, sicchè $\eta=0$ per qualunque valore che entri in $a^2=P/EJ$,

$\cos(al)=0$, ossia:

$$(544) \quad al = \frac{\pi}{2} (2n+1),$$

con n intero positivo arbitrario, sicchè dovremo scrivere:

$$(545) \quad \eta = A [1 - \cos(az)],$$

dove l'espressione A è necessariamente indeterminata, dato che il rapporto $\delta/\cos(al)$ non può tendere ad un limite determinato e finito al tendere a zero del numeratore e del denominatore, essendo queste variabili tra loro indipendenti. A tale espressione potrebbe quindi assegnarsi un qualunque valore ed in particolare lo zero.

I valori P_k di P che introdotti nell'espressione di a soddisfano alla (544) si dicono *carichi critici*.

I due casi che, come sopra si è visto, possono presentarsi al tendere a zero di δ , possono allora classificarsi anche così:

il carico P non è un carico critico: è sempre $\eta=0$, cioè l'unica configurazione d'equilibrio dell'asse della trave è quella rettilinea,

il carico P è un carico critico: le configurazioni d'equilibrio sono infinite, una coincidente con l'asse primitivo corrispondente al valore zero dell'espressione indeterminata, le altre, secondo la (545), coincidenti con sinusoidi d'ampiezza indeterminata A .

Poichè per $z=l$ è $\eta=f=A$, scriveremo la (545):

$$(545') \quad \eta = f [1 - \cos(az)].$$

Derivandola poi rispetto a z :

$$(546) \quad \frac{d\eta}{dz} = fa \operatorname{sen}(az),$$

e osservando che per $z=0$ è $d\eta/dz=0$, si costata che *all'incastro la sinusoida presenta sempre un ventre*.

Derivando una seconda volta, avremo:

$$(547) \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} = fa^2 \cos(az),$$

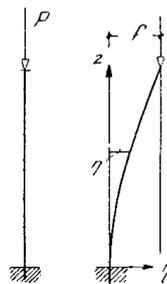


Fig. 194

poichè, per la (544), per $z=l$ è $d^2\eta/dz^2=0$, si conclude che all'estremo B la sinusoida presenta sempre un nodo.

Per $n=0$, cioè $al=\pi/2$, la (544) fornisce il primo carico critico o carico euleriano:

$$(548) \quad P_k = \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2},$$

cui corrisponde la linea elastica rappresentata in fig. 195 a, con un solo nodo all'estremo libero. Per $n=1$, cioè $al=3\pi/2$, si ottiene il secondo carico critico;

$$(549) \quad P_k = \frac{9 \pi^2 EJ}{4 l^2}.$$

Siccome oltre che per $z=l$, la (544) è ora soddisfatta anche per $az=\pi/2$, la linea elastica presenta un secondo nodo all'ascissa $z_1=l/3$ (fig. 195 b).

Per $n=2$, cioè $al=5\pi/2$ è ancora:

$$(550) \quad P_k = 25 \frac{\pi^2 EJ}{4 l^2},$$

e, annullandosi ora $\cos(az)$ per $az=\pi/2$ e $az=3\pi/2$, si desume che la linea elastica, oltre quello all'estremo libero, presenta altri due nodi alle ascisse $z_1=l/5$ e $z_2=3l/5$ (fig. 195 c).

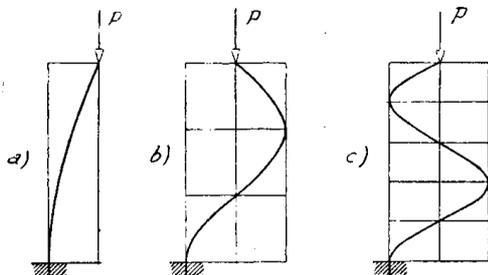


Fig. 195

Procedendo via via per i valori di n nella (544) maggiori di quelli già considerati, si ottengono le linee elastiche corrispondenti ai carichi critici superiori; si riconosce inoltre che tali carichi crescono come i quadrati dei numeri dispari della serie naturale.

Per esaminare più da vicino questi risultati analitici, immaginiamo intervenire una causa qualsiasi (vibrazioni elastiche, urti laterali ecc.) atta a spostare dalla sua posizione d'equilibrio ad asse rettilineo il prisma soggetto ad un certo carico di punta P .

La deformazione corrispondente a tale spostamento susciterà nel prisma reazioni elastiche tendenti a ripristinarne la configurazione rettilinea, mentre il carico assiale P , per effetto della deformazione ed al crescere di essa, produce momenti flettenti che tendono ad accentuarla.

Se allora P è minore del primo carico critico, per $\delta=0$ la (539) non può avere che la soluzione $\eta=0$, l'asse è rettilineo, ed allontanato da tale configurazione vi ritorna spontaneamente non appena cessi la causa defor-

matrice, perchè l'azione stabilizzatrice delle reazioni elastiche prevale su quella della flessione originata dalla deformazione: *in tal caso l'equilibrio è stabile.*

All'aumentare di P si va attenuando la suddetta prevalenza, e la trave è richiamata sempre meno energicamente alla posizione rettilinea, finchè, raggiunto il primo valore P_k , le reazioni elastiche per una forma opportuna dell'asse geometrico — il quarto d'onda di sinusoidi sopra esaminato — passano ad equilibrare i momenti flettenti dovuti alla deformazione (1).

Oltrepassato il primo valore P_k , prevale l'azione di P tendente ad ampliare l'inflessione, talchè il prisma, spostato accidentalmente dalla configurazione rettilinea, tende ad allontanarsene maggiormente: la configurazione iniziale sarà quindi ancora d'equilibrato, *ma d'equilibrio instabile.*

Praticamente questa instabilità teorica equivale ad una impossibilità di equilibrio, sicchè il primo valore critico P_k deve riguardarsi come carico massimo compatibile con l'equilibrio della trave. Poichè infine questo equilibrio limite si palesa come stato di transizione tra una condizione stabile ed una instabile, è da riguardarsi come *equilibrio indifferente.*

Si può controllare sperimentalmente il comportamento ora descritto, sollecitando la trave con sforzi di compressione crescenti e facendo contemporaneamente agire su di essa un carico flettente: al crescere di P la reazione opposta dalla trave all'inflessione diminuisce continuamente fino a diventare trascurabile quando P è vicino al valore critico: in questa condizione basta l'azione di forze trasversali piccolissime a produrre la flessione laterale.

Secondo già si è detto, i valori critici di P dopo il primo, ai quali corrispondono cioè linee elastiche con due o più flessi, sono privi di inte-

(1) È opportuno avvertire che questo risultato è legato all'approssimazione che si è adottata per la curvatura nello scrivere l'equazione differenziale della linea elastica. L'espressione esatta:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2 \eta}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{d \eta}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}},$$

fornirebbe una linea elastica determinata per ogni valore di P , e ciò prova che in realtà non esiste un carico critico a segnare una discontinuità tra i due stati suddetti del solido, ma che si passa invece con continuità dalla configurazione d'equilibrio stabile alle successive, fino alla rottura, per carichi P crescenti. In quest'ordine di considerazioni il valore $P_k = \pi^2 EJ/4l^2$ segnala unicamente il carico a partire dal quale le inflessioni esatte crescono molto rapidamente.

In pratica la distinzione perde di valore in quanto ciò che interessa conoscere è soltanto il carico limite per il quale comincia a prodursi nel solido l'inflessione laterale, e tale carico è evidentemente lo stesso sia che si consideri, come che si trascuri il termine $(d\eta/dz)^2$ nell'espressione della curvatura $1/r$, l'inclinazione essendo, entro quel limite, piccolissima.

resse pratico, a meno che non esistano, come vedremo in casi successivi, condizioni di vincolo tali da richiedere di prenderli in esame.

Praticamente, ripetiamo, il braccio di leva δ di P è da riguardarsi come piccolissimo ed indeterminato; la (339) avverte che all'avvicinarsi di al a $\pi/2$, ossia di P al primo carico critico P_k , le deformazioni crescono rapidamente, cioè η tende all'infinito per piccolo che sia δ . Poichè la formula non può essere applicata oltre quei valori piccolissimi delle deformazioni fino ai quali possono ritenersi validi i risultati della teoria dell'elasticità, si comprende come in pratica, quando P sta per raggiungere P_k , le deformazioni siano già molto più grandi di quelle ammissibili, le corrispondenti tensioni interne, date le usuali proporzioni degli organi resistenti, prossime ai limiti di snervamento o di rottura, e si arrivi quindi al cedimento della trave.

Tanto nel caso teorico ($\delta=0$), come in quello pratico (δ piccolissimo) si giunge perciò alla conclusione che il carico euleriano deve riguardarsi come *carico di rottura della trave*.

* * *

È evidente che l'inflessione si produce tanto più facilmente, ossia, come dalla (548), sotto un carico tanto minore, quanto minore è il momento d'inerzia J della sezione trasversale rispetto all'asse di flessione: questo, a parità d'asse, per sezioni appartenenti a solidi diversi; per una medesima trave poi, supposto che, per quanto riguarda le condizioni di vincolo, essa sia libera d'infietersi in tutti i piani per il suo asse, è logico altresì ammettere che l'inflessione si produrrà nel piano cui corrisponde il minimo momento d'inerzia J , ossia il minimo raggio d'inerzia:

$$\varrho_{min} = \frac{J_{min}}{A} . . .$$

In questa ipotesi, giacchè dal carico critico P_k si passa alla *tensione critica* o *euleriana* σ_k dividendo per A , questa potrà scriversi:

$$(551) \quad \sigma_k = \frac{P_k}{A} = \frac{\pi^2 E \varrho_{min}^2}{4 l^2} ,$$

e sarà da riguardarsi, analogamente a quanto si è detto dover fare per P_k , come *tensione di rottura*.

Se σ_k è allora inferiore al carico di schiacciamento del materiale costituente la trave, vorrà dire che causa della rottura è la flessione laterale

anzichè la compressione; la stabilità dipende in tal caso da una caratteristica nuova del materiale: il modulo d'elasticità normale E .

97 — **Influenza delle condizioni di posa.**

La (548) esprime il carico euleriano per la trave incastrata ad un estremo e libera all'altro. Si possono dedurre le espressioni dello stesso carico relative a condizioni di posa diverse, con riguardo alla sinusoide corrispondente, secondo la (544), ad uno dei carichi critici superiori.

Per un esame delle condizioni di vincolo più frequenti, si possono trarre le seguenti conclusioni:

a) *trave vincolata ad ambi gli estremi con cerniere sferiche prive d'attrito* (tali cioè da consentire all'asse geometrico d'infietersi in un qualsiasi piano per esso).

Il modo di deformazione più semplice ed il solo che interessa la

pratica, corrisponde al segmento di sinusoide compreso fra due nodi consecutivi (fig. 196 a); ciascuna metà della trave si comporta cioè come l'intera mensola esaminata precedentemente: il valore del primo carico critico si avrà pertanto ponendo nella (548) $l/2$ in luogo di l :

$$(551) \quad P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

a') *trave incastrata ad estremi cui sia consentito uno spostamento relativo normale all'asse.*

Il modo più semplice di deformazione è quello della fig. 196 a': metà della trave si comporta ancora, ma inversamente al caso a), come l'intera mensola; l'espressione del primo carico critico è perciò ancora la stessa del caso precedente.

b) *trave incastrata rigidamente agli estremi.*

L'asse del solido si deforma, nel modo più semplice, come indica la fig. 196 b: la quarta parte della trave si comporta cioè come l'intera trave del primo caso; si otterrà quindi il primo carico critico ponendo nella (548) $l/4$ in luogo di l :

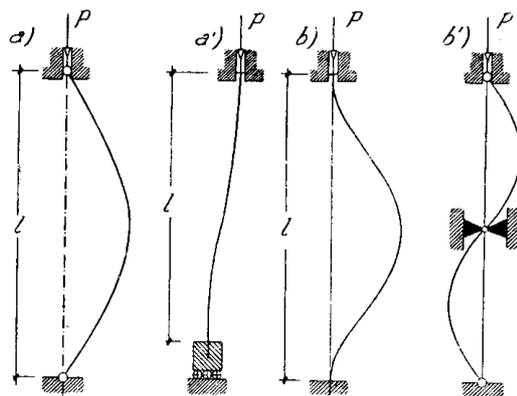


Fig 196

(552)
$$P_k = \frac{4 \pi^2 EJ}{l^2}$$

b) *trave incernierata agli estremi, con la mezzeria obbligata a rimanere sulla congiungente le due cerniere.*

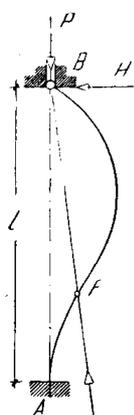


Fig. 197

È il caso identico, quanto ai risultati, a quello precedente, come prova la fig. 196 b' che dà il modo più semplice di deformazione dell'asse. L'espressione di P_k è dunque ancora la (552).

d) *trave incastrata ad un estremo e incernierata all'altro.*

È un caso intermedio tra i due sopra esaminati: il modo più semplice di deformazione è quello della fig. 197. Tale deformata non è però comparabile ad una porzione di senoide; si deve qui ammettere la presenza di una forza orizzontale H , reazione della guida che obbliga il punto B a restare sulla verticale AB del carico, di valore tale da equilibrare il momento del carico P nel punto di flesso F della linea elastica.

Sebbene il caso esiga una trattazione speciale, si può assumere come valore del carico critico, assai bene approssimato a quello esatto.

(553)
$$P_k = \frac{2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

98 — **Lunghezza libera di flessione.**

Possiamo distinguere i casi di vincolo sopra esaminati nel seguente modo:

1° caso: solido incastrato ad un estremo e libero all'altro;

2° caso: solido incernierato ai due estremi;

2° caso bis: solido vincolato ad incastri d'estremità liberi di subire spostamenti relativi perpendicolari all'asse;

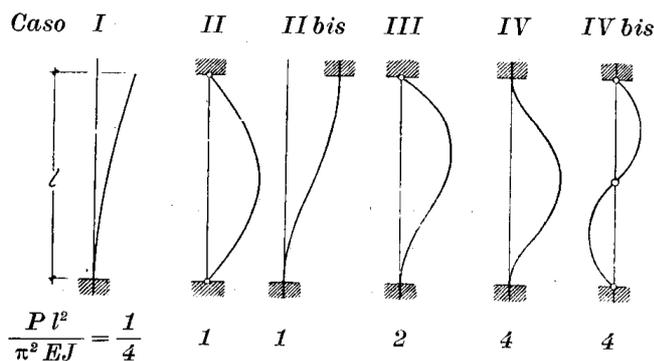


Fig. 198

3° caso: solido incastrato a un estremo ed incernierato all'altro;

4° caso: solido incastrato rigidamente ai due estremi;

4° caso bis: solido incernierato agli estremi, con la mezzeria vincolata a rimanere sulla verticale del carico.

Le deformate dell'asse ed i corrispondenti carichi critici sono ordinatamente raccolti in fig. 198.

Si usa esprimere nelle formole che danno i valori dei carichi critici la lunghezza l del solido in funzione della distanza l_1 fra due nodi consecutivi della corrispondente sinusoide, cui si dà il nome di *lunghezza libera di flessione della trave*.

Ora, come evidente, è rispettivamente:

per il caso:	I	II	III	IV
	$l = \frac{l_1}{2}$	l_1	$\frac{3}{2} l_1$	$2 l_1$

Le espressioni del primo carico critico corrispondenti ai vari casi possono con ciò essere compendiate nell'unica *formula di Eulero*:

$$(554) \quad P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l_1^2},$$

in cui è dunque da porre, rispettivamente:

nel caso:	I	II e II bis	III	IV e IV bis
	$l_1 = 2l$	l	$\frac{2}{3} l$	$\frac{l}{2}$

Praticamente, stante la difficoltà di realizzare incastri perfetti, l'effetto utile dell'incastro a ridurre la lunghezza libera di flessione è inferiore a quello sopra dichiarato; si suole per questo assumere per i casi III e IV rispettivamente: $l_1 = 0,8l$ ed $l_1 = 0,75l$.

99 — Carico di punta nel periodo elastico.

La formula di Eulero impone un minimo alla sezione resistente della trave, ovvero, se questa non è libera d'infllettersi secondo tutte le direzioni, al più piccolo tra i momenti d'inerzia J relativi agli assi intorno ai quali è consentito alla sezione trasversale di ruotare nell'inflessione dell'asse.

Per un dato valore P_k , al limite dell'equilibrio, la (554) fornisce:

$$(555) \quad J_{min} = \frac{P_k l_1^2}{\pi^2 E},$$

ma il carico P che una trave caricata di punta potrà sopportare in servizio, cioè senza pericolo, è una frazione del carico critico $P = P_k/\nu$, essendo ν il coefficiente di sicurezza per questo tipo di sollecitazione.

Tenuto conto di ciò, la (555), che limita il momento d'inerzia relativo al più probabile piano d'inflexione, diviene:

$$(556) \quad J_{min} = \frac{\nu P l_1^2}{\pi^2 E}$$

Si suole esprimere la pressione euleriana, fornita dalla (551), in funzione della *snellezza* della trave, intendendo per tale caratteristica il rapporto λ tra la lunghezza libera di flessione ed il raggio d'inerzia minimo della sezione retta; scriveremo cioè:

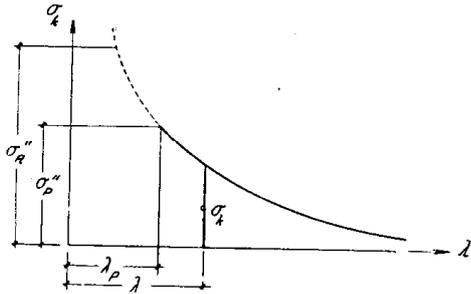


Fig. 199

$$(557) \quad \sigma_k = \pi^2 E : \left(\frac{l_1}{\rho_{min}} \right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

donde si rileva che la legge di dipendenza della pressione euleriana dalla snellezza è espressa da un'iperbole cubica

avente per asintoti gli assi — *l'iperbole di Eulero* — (fig. 199).

La formula di Eulero, provenendo dall'equazione differenziale della linea elastica, è una formula d'elasticità: è valida quindi finchè il modulo normale E conservi il suo significato, cioè finchè la pressione critica non superi il carico di proporzionalità σ_P . Ponendo questo valore in luogo di σ_k , la (557) dà modo di determinare la snellezza limite λ_P oltre la quale la formula è applicabile; per

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \sigma_P$$

si ottiene infatti il limite inferiore:

$$(558) \quad \lambda_P = \pi \sqrt{E/\sigma_P}$$

Per snellezze $\lambda < \lambda_P$ saranno da prevedere pressioni critiche σ_k inferiori a quelle corrispondenti all'andamento iperbolico definito dalla (557), cioè

Materiale	E t/cm ²	σ_P t/cm ²	σ_R t/cm ²	ν	λ_P		$J_{min} = \frac{\nu}{\pi^2 E} P l_1^2$ (P in t, l in m, J in cm ⁴)
					calco- lata	misu- rata	
Acciaio	2150	3,0	6,0	5,0	85	90	~ 2,40 P l ₁ ²
Acciaio dolce	2150	2,0	3,8	3,3	103	105	~ 1,65 »
Ferro saldato	2000	1,6	3,5	3,5	111	112	~ 1,75 »
Ghisa	1000	1,5	8,0	6,0	81	80	~ 6,00 »
Legno	100	0,1	0,28	3,5	99	100	~ 35,00 »

che d'altronde è pienamente confermato dai risultati sperimentali.

Nella tabella che precede sono riportati pei materiali più importanti le caratteristiche d'elasticità e resistenza, le snellezze limiti λ_p calcolate mediante la (357) e quelle determinate sperimentalmente, i valori usuali del coefficiente di sicurezza ν al carico di punta, e infine i valori del coefficiente $\frac{\nu}{\pi^2 E}$ che compare nella (356).

100 — Carico di punta nel periodo plastico.

Si tratta ora di stabilire come procedere alla verifica di una trave caricata di punta la cui snellezza λ sia inferiore al valore limite λ_p . In tal caso, l'inflessione laterale si produrrà nel periodo plastico del materiale, cioè per una pressione critica superiore al limite d'elasticità, sicchè il carico critico non potrà più calcolarsi con la formula di Eulero.

Quanto alla necessità di estendere lo studio del carico di punta al campo di snellezze $\lambda < \lambda_p$ non può esservi dubbio, dato che il carico critico è in ogni caso minore di quello di rottura per semplice compressione: è anzi proprio questa circostanza che avverte non essere applicabile la formula di Eulero nel campo suddetto, in quanto, per snellezze sotto un certo limite compreso fra zero e λ_p , essa fornirebbe pressioni critiche superiori al carico di schiacciamento, ciò che è manifestamente assurdo.

La teoria del carico di punta nel periodo plastico fu data dall'Engesser sin dal 1895; Kármán nel 1910 la completò e la verificò con numerose ed accurate esperienze.

Il concetto fondamentale della trattazione è lo stesso seguito nel procedimento di Eulero: quello cioè di stabilire sotto quali condizioni sia possibile una configurazione d'equilibrio della trave, diversa da quella rettilinea.

Supponiamo che la trave di snellezza $\lambda < \lambda_p$, assoggettata a carichi crescenti, conservi fino ad un certo valore del carico la sua configurazione iniziale ad asse rettilineo, e risulti fino allora uniformemente compressa in tutte le sue sezioni rette; raggiunto invece il carico un certo valore $P_k = \sigma_k A$, con σ_k già in campo plastico, essa s'infletta lateralmente: la pressione si accrescerà allora dalla parte della concavità della linea elastica, diminuirà dalla parte opposta.

Supposto tracciato il diagramma di deformazione (σ, ε) relativo alla prova di compressione, individuiamo in esso il punto K di ordinata σ_k , e per questo guidiamo, parallela alla OP , la KK_0 che notoriamente rappresenterebbe la fase di scarico ove seguisse quella di carico rappresen-

tata dal tratto OK ; al tratto di diagramma che segue il punto K , data la piccolezza degli incrementi che qui occorre considerare, sostituiamo la tangente in K (fig. 200 *a*).

Ciò premesso, ammettiamo:

che la dipendenza fra tensioni e deformazioni sia quella definita dagli andamenti rettilinei KT per la regione ove si producono incrementi, KK_0 , per quella ove ha luogo diminuzione della pressione;

che le sezioni rette della trave rimangano piane ⁽¹⁾, sicchè le dilatazioni varino linearmente nelle sezioni.

Queste ipotesi definiscono nella sezione generica della trave una retta lungo la quale la pressione σ_k non viene alterata dall'inflexione (figg. 200 *b*, *c*). Per gli elementi superficiali situati da una parte di es-

sa la pressione decresce secondo la legge definita dalla KK_0 , cui corrisponde il modulo d'elasticità normale:

$$E = \operatorname{tg} \alpha ;$$

talchè, detti $\Delta\sigma$ e $\Delta\varepsilon$ i decrementi della tensione e della dilatazione, sarà:

$$(559) \quad \Delta\sigma = E \Delta\varepsilon .$$

Per gli elementi della sezione situati dall'altra parte della retta citata, si producono invece incrementi di pressione secondo la legge definita dalla tangente K_0T ; se introduciamo il *modulo ausiliario*:

$$E_1 = \operatorname{tg} \beta = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right)_K ,$$

la relazione analoga alla (559) sarà:

$$(560) \quad \Delta\sigma = E_1 \Delta\varepsilon .$$

Il diagramma delle tensioni nella sezione viene così ad essere limitato da una bilatera BNC , col vertice N corrispondente alla retta $\sigma = \sigma_k$.

(1) Quest'ipotesi, già convalidata dalle esperienze di E. Meyer e poi rimessa in dubbio in seguito ad ulteriori ricerche del Grüning, potrà essere sempre ammessa con grande approssimazione, data l'estrema piccolezza delle inflessioni che si considerano in questa teoria.

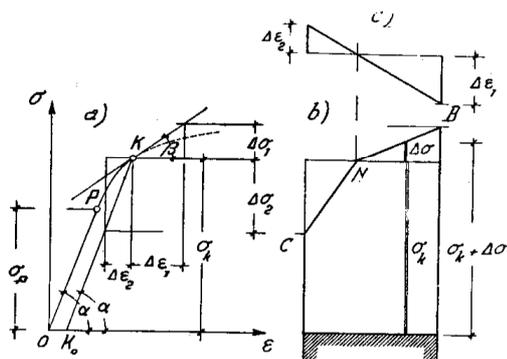


Fig. 200

Le condizioni d'equilibrio danno:

$$(561) \quad \int \sigma dA = P \quad , \quad \int \sigma v dA = P \eta \quad ,$$

nelle quali sono: v le distanze degli elementi della sezione dalla retta separatrice, η lo scostamento di questa configurazione iniziale dell'asse, ed è da porre:

$$\sigma = \sigma_k + \Delta\sigma \quad .$$

Con le notazioni della figura avremo:

$$\Delta\sigma_1 = E_1 \Delta\varepsilon_1 \quad , \quad \Delta\sigma_2 = E \Delta\varepsilon_2 \quad ,$$

nelle quali, considerando la deformazione d'un tronco di lunghezza unitaria, al posto delle dilatazioni potremo porre con grande approssimazione (fig. 201):

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{h_1}{r} \quad , \quad \Delta\varepsilon_2 = \frac{h_2}{r} \quad ,$$

sicchè:

$$(562) \quad \Delta\sigma_1 = E_1 \frac{h_1}{r} \quad , \quad \Delta\sigma_2 = E \frac{h_2}{r} \quad .$$

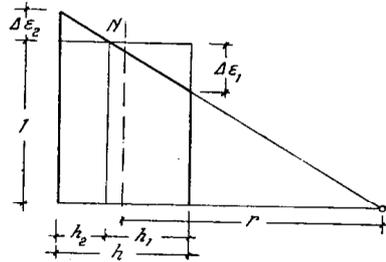


Fig. 201

Nel caso di sezione rettangolare la prima delle (561) esprime l'equivalenza dei due triangoli che formano il diagramma delle tensioni dovute alla flessione, ciò che porta alla condizione:

$$(563) \quad E_1 h_1^2 = E h_2^2 \quad .$$

Posto pertanto $h = h_1 + h_2$, avremo:

$$(564) \quad h_1 = \frac{h \sqrt{E}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E}} \quad , \quad h_2 = \frac{h \sqrt{E_1}}{\sqrt{E_1} + \sqrt{E}} \quad .$$

La seconda delle (417), avuto riguardo alle (421), può scriversi:

$$(565) \quad M = \frac{b \Delta\sigma_1 h_1}{2} \frac{2}{3} h = \frac{bh}{4} \frac{E_1}{r} h_1^2 = \frac{bh^3}{3} \frac{EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} \frac{1}{r} \quad ;$$

ed osservando che è $J = \frac{1}{12} bh^3$:

$$M = \frac{J}{r} \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} \quad ;$$

e infine, con :

$$(566) \quad T = \frac{4EE_1}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_1})^2} :$$

$$(567) \quad M = \frac{TJ}{r} \quad (1)$$

Si riconosce così ancora valida, per il carico di punta nel periodo plastico, l'equazione fondamentale della flessione, purchè s'introduca il modulo T fornito dalla (566) al posto del modulo di Young. Accettando l'approssimazione usuale, l'equazione differenziale della linea elastica sarà ancora della forma :

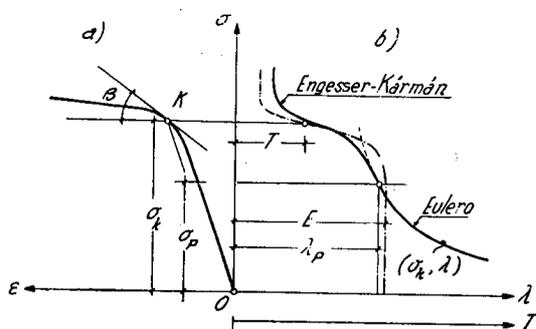


Fig. 202

$$(568) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} + \frac{P}{TJ} \eta = 0 ,$$

e risulteranno quindi :

il carico critico :

$$(569) \quad P_k = \frac{\pi^2 TJ}{l_1^2} ,$$

la pressione critica :

$$(570) \quad \sigma_k = \frac{\pi^2 T}{\lambda^2} ,$$

espressioni diverse dalle (554) e (557) soltanto perchè vi compare T in luogo di E .

Il calcolo delle pressioni critiche σ_k in funzione delle snellezze $\lambda < \lambda_p$ viene effettuato nel seguente modo: si tracci il diagramma di deformazione (σ, ϵ) , se ne consideri la tangente nel suo punto generico K del periodo plastico, e si calcoli (fig. 202 a):

$$E_1 = \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)_K = \operatorname{tg} \beta ;$$

si determini infine, mediante la (566), il modulo T e lo si porti come ascissa in corrispondenza dell'ordinata σ_k di K (fig. 202 b); si ottiene così il diagramma che dà il modulo T corrispondente ad una qualunque tensione critica $\sigma_k > \sigma_p$; naturalmente per $\sigma_k < \sigma_p$ è $T = E = \text{costante}$.

(1) Si dimostra facilmente che, per una sezione di forma qualsiasi, è:

$$T = E_1 \frac{J_1}{J} + E \frac{J_2}{J} .$$

dove J_1 e J_2 sono i momenti d'inerzia rispetto all'asse neutro n delle aree in cui questo divide la sezione, J il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse baricentrico parallelo ad n

Potremo ora calcolare le snellezze λ corrispondenti alle coppie di valori σ_k, T , mediante la (570) e costruirne il relativo diagramma come è stato fatto in fig. 202 b.

La rispondenza fra questo metodo di calcolo ed i risultati sperimentali è assai soddisfacente. Contrariamente a quanto si ritenne in passato, sussiste pure l'accordo con l'esperienza per snellezze $\lambda < 30$ - per le quali veramente il carico di punta cessa di presentare interesse pratico - purchè si abbia riguardo all'effettivo andamento del diagramma di deformazione nel periodo che segue lo snervamento.

Secondo una recente osservazione dell'Hartmann, in questo periodo, lo stesso valore di E_1 , e quindi di T , corrisponde a tre punti A, B, C , diversi del diagramma (fig. 203 a); si avranno quindi nel diagramma (λ, σ_k) i corrispondenti punti A_1, B_1, C_1 , caratterizzati da una medesima λ (fig. 203 b). Nel punto (O, σ_S) la curva rappresentativa delle pressioni si spezza in due rami separati dalla retta $\sigma = \sigma_S$, che può riguardarsi come tangente cuspidale alla curva in quel punto.

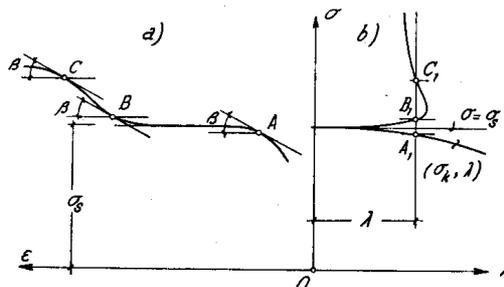


Fig. 203

101 — Le formule empiriche sul carico di punta.

Molto usate ancor oggi per il calcolo del carico di punta nel periodo plastico sono le *formule empiriche di Tetmajer* riportate nella seguente tabella.

Pressioni critiche σ_k in t/cm².

Materiale	Periodo plastico (Tetmajer)		Periodo elastico (Eulero)	
	λ	σ_k	λ	σ_k
Acciaio	$\lambda < 89$	$\sigma_k = 3,35 - 0,0062 \lambda$	$\lambda > 89$	$\sigma_k = 22210 : \lambda^2$
Acciaio dolce	$\lambda < 105$	$\sigma_k = 3,10 - 0,0114 \lambda$	$\lambda > 105$	$\sigma_k = 21220 : \lambda^2$
Ferro saldato	$\lambda < 112$	$\sigma_k = 3,03 - 0,013 \lambda$	$\lambda > 112$	$\sigma_k = 19740 : \lambda^2$
Ghisa	$\lambda < 80$	$\sigma_k = 7,76 - 0,12 \lambda + 0,00053 \lambda^2$	$\lambda > 80$	$\sigma_k = 9870 : \lambda^2$
Legno	$\lambda < 100$	$\sigma_k = 0,293 - 0,00194 \lambda$	$\lambda > 100$	$\sigma_k = 987 : \lambda^2$

Per ferro, acciaio e legno esse legano linearmente le pressioni critiche alla snellezza; per la ghisa, invece, la legge di variazione è parabolica.

Nella tabella stessa sono pure indicate le espressioni di σ_k nel periodo

elastico, ottenute introducendo nella formula di Eulero i moduli d'elasticità E spettanti ai vari materiali.

Si deve avvertire che le formule vennero ricavate per materiali rispondenti a caratteristiche ben definite, e non possono quindi esser ritenute senz'altro valide al mutare di quelle caratteristiche.

Nei pilastri di muratura si ritiene esclusa la possibilità d'inflexione laterale fino a $\lambda=50$; per snellezze superiori possono servire tabelle e grafici proposti dallo stesso Tetmajer.

* * *

Talvolta, come usano specialmente gli Autori inglesi, si suppone che la forza di compressione agisca con un braccio iniziale δ uguale al valore massimo della *tolleranza di lavorazione*; si ammette cioè che la trave soggetta ad azione di punta presenti quelle imperfezioni massime di lavorazione e di montaggio che consentono ancora di accettarla al collaudo. La pressione massima si calcola allora applicando la seconda delle (341), ponendovi δ uguale alla tolleranza ammessa; avremo così:

$$\sigma'' = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{\delta}{\cos(al)} \frac{y''}{\rho^2} \right).$$

Se la tolleranza non è stabilita con precisione, si può ricorrere alla *formula semiempirica di Rankine*, detta anche di Schwarz, la quale ha il vantaggio d'essere applicabile per qualunque valore del rapporto di snellezza.

Essa si basa sull'ipotesi arbitraria che la forza di compressione agisca con l'eccentricità:

$$\delta = \beta l_1^2 / y'',$$

essendo β una costante dipendente dalle proprietà del materiale, l_1 la lunghezza libera di flessione, y'' la distanza dell'asse della fibra maggiormente compressa.

Ponendo $\delta = e$, $P = N$, $y'' = r_1''$ nella seconda delle (347/I) avremo:

$$\sigma'' = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{\delta y''}{\rho^2} \right)$$

o anche:

$$\sigma'' = \frac{P}{A} (1 + \beta \lambda^2).$$