

CAPITOLO X

LINEE D' INFLUENZA

87 — Superficie e linea d'influenza.

Supponiamo che un carico unitario si muova sopra una costruzione mantenendo la sua retta d'azione parallela ad una direzione fissa, e si calcoli, per ogni posizione del carico, un dato parametro η del tensore degli sforzi o di quello della deformazione o del vettore spostamento in un punto M del sistema, o anche un dato parametro della reazione in quel punto, se trattasi d'un punto vincolato.

Se a partire da una superficie di riferimento arbitraria, per esempio un piano, portiamo come ordinata sulla retta d'azione del carico un segmento che in una scala prefissata misuri il parametro η , il luogo dell'estremità di tale ordinata è una superficie, che viene detta *superficie d'influenza del parametro η per il carico agente nella direzione data*.

Supponiamo per ora che η sia una determinata componente dello spostamento di M secondo una certa direzione m (fig. 173). Facciamo agire la forza 1 in M nella direzione m , e determiniamo le componenti η_{nm} degli spostamenti nella direzione n di tutti i punti della superficie sulla quale il carico si sposta; ciò equivale a costruire la deformata di detta superficie con ordinate valutate nella direzione n . Per il teorema di Maxwell è infatti:

$$\eta_{nm} = \eta_{mn} ;$$

ma le η_{mn} sono le ordinate, valutate nella direzione n dei carichi, della

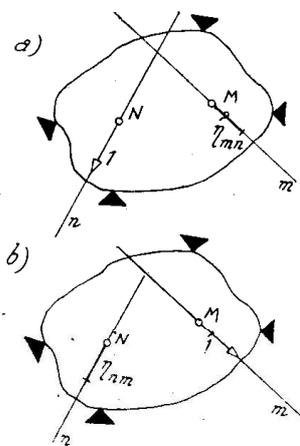


Fig. 173

deformata della superficie luogo dei punti d'applicazione del carico per il sistema caricato nel punto M e nella direzione m : questa deformata coincide dunque con la superficie d'influenza cercata.

Nelle travi e nelle travature piane il carico, anzichè su di una superficie, si sposta lungo una linea contenuta in un piano; la superficie d'influenza viene perciò sostituita dalla

linea d'influenza. Il parametro η relativo ad un dato punto d'una sezione generica, oltrechè dalle coordinate di questo nella sezione, dipende da due coordinate (fig. 174):

la ζ , che definisce la posizione del carico,

la z , che definisce la posizione della sezione.

Tracciamo il diagramma spaziale:

$$\eta = \eta(\zeta, z)$$

portando l'ordinata η , per esempio,

normalmente al piano ζz . È noto (cap. V) che le sezioni 1 del diagramma:

$$\eta = \eta(\zeta_0, z),$$

eseguite con piani $\zeta = \zeta_0 = \text{cost.}$ danno la legge di variazione del parametro η nelle diverse sezioni per una posizione fissa del carico, definita dalla coordinata ζ_0 , ossia il *diagramma della η* ; le sezioni 2:

$$\eta = \eta(\zeta, z_0)$$

danno invece la legge con cui varia η nella sezione definita dalla coordinata z_0 al mutare della posizione del carico, ossia la *linea d'influenza di η* per la sezione detta.

Le linee d'influenza d'impiego più frequente riguardano:

- spostamenti di punti,
- reazioni d'appoggio,
- caratteristiche della sollecitazione,
- tensioni normali o tangenziali.

Esse possono ottenersi come deformate della linea sulla quale il carico si sposta, corrispondenti a condizioni di carico molto semplici, che si determinano applicando il primo oppure il secondo principio di reciprocità.

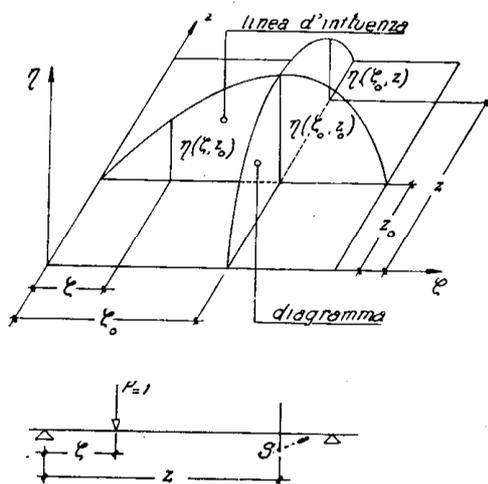


Fig. 174

88 — Spostamenti di punti e reazioni di vincoli.

La linea d'influenza dello spostamento in una data direzione m d'un punto M d'una travatura si ottiene come *deformata dell'asse della trave sulla quale il carico si sposta per il sistema caricato da una forza concentrata in M , nella direzione m , valutandone le ordinate nella direzione secondo la quale il carico agisce* (fig. 175). Infatti, come si è visto, se η_{mn} è lo spostamento di M nella direzione m quando il carico occupa la generica N tra le posizioni ch'esso può assumere nell'ipotesi che, mantenendosi la sua retta d'azione parallela ad una direzione fissa n , il suo punto d'applicazione percorra, ad esempio, la traiettoria $AA'BB'$, ed η_{nm} lo spostamento del punto N nella direzione n per il carico applicato in M nella direzione m , per il teorema di Maxwell è $\eta_{mn} = \eta_{nm}$.

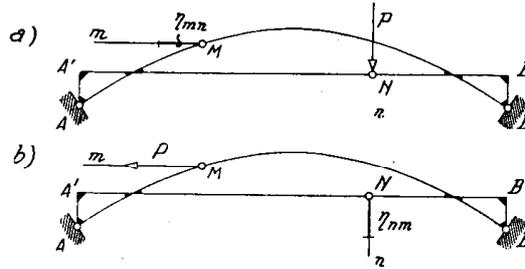


Fig. 175

Supponiamo ora si tratti di costruire la linea d'influenza della reazione d'un vincolo.

Rimosso il vincolo che sviluppa la reazione incognita X , valutiamo, nella direzione della reazione stessa, gli spostamenti del punto già vincolato (fig. 176):

η_{CA} , prodotto dal carico quando questo occupa la generica delle posizioni sulla traiettoria del suo punto d'applicazione (fig. 176 a),

η_{AA} , prodotto da una forza $X = -1$ (fig. 176 b). Avremo allora:

$$0 = \eta_{AC} - \eta_{AA} X,$$

da cui:

$$(524) \quad X = \frac{\eta_{AC}}{\eta_{AA}}.$$

Poichè η_{AA} è una costante, la reazione risulta proporzionale allo spostamento η_{AC} ; e pertanto *la linea d'influenza della reazione X coincide con quella dello spostamento cui il vincolo si oppone, quando si assuma come unità di forza lo spostamento η_{AA} .*

Se il vincolo, anzichè rigido, è cedevole, avremo:

$$\eta + X\varepsilon = \eta_{AC} - \eta_{AA} X,$$

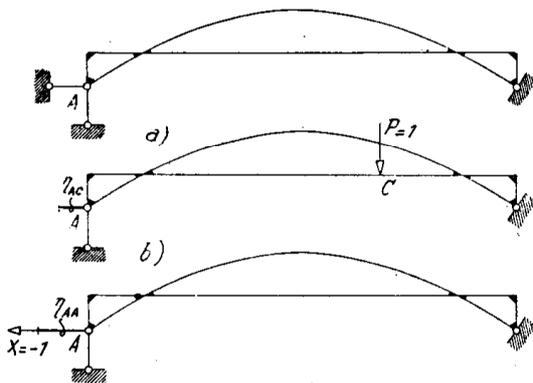


Fig. 176

da cui, posto $\eta'_{AA} = \eta_{AA} + \varepsilon$.

$$(524') \quad X = \frac{\eta_{AC} - \eta}{\eta'_{AA}} = \frac{\eta_{AC}}{\eta'_{AA}} - \frac{\eta}{\eta'_{AA}}.$$

Se vi è soltanto cedimento elastico ($\eta=0$), basta modificare la scala nella quale si leggono le ordinate (unità di forza $\eta'_{AA} = \eta_{AA} + \varepsilon$); se vi è pure un cedimento anelastico η , si deve sottrarre la costante corrispondente al secondo termine della (524'), ciò che equivale a spostare parallelamente a sè stessa, ed in senso opportuno, la fondamentale della linea d'influenza del segmento che misura tale termine.

89 — Caratteristiche della sollecitazione.

Tracciate le linee d'influenza delle reazioni dei vincoli, è facile dedurre quelle delle caratteristiche della sollecitazione per una sezione generica, che sono combinazioni lineari delle reazioni e dei carichi. È possibile

tuttavia ottenere queste linee direttamente, applicando il secondo principio di reciprocità; il quale metodo ha il pregio di fornire subito un'idea intuitiva della forma e dell'andamento delle linee stesse.

Siano:

P il generico dei carichi concentrati agenti sul sistema,

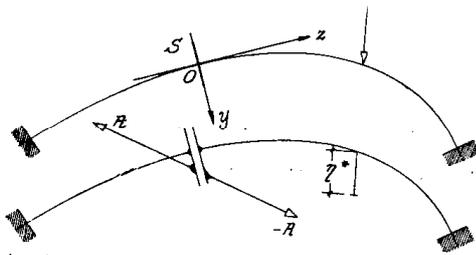


Fig. 177

191

η^* lo spostamento che il punto d'applicazione di P subisce nella deformazione dovuta ad una distorsione di Volterra praticata in corrispondenza d'una certa sezione S del sistema, spostamento valutato secondo la linea d'azione della stessa P . Supposto poi trattarsi d'una travatura (fig. 177), colleghiamo la terna trirettangola x, y, z di riferimento con l'origine nel baricentro O della sezione S e gli assi x ed y coincidenti con gli assi principali d'inerzia della sezione. Siano ancora $\gamma_{ix}^*, \gamma_{iy}^*, \gamma_{iz}^*$, le tre caratteristiche già indicate con a_i^* ; $\varphi_x^*, \varphi_y^*, \varphi_z^*$, le rimanenti tre già indicate con b al secondo membro della (83/I).

Osservando che, per il riferimento scelto, le caratteristiche del sistema di tensioni interne t_i che figurano nell'equazione ricordata coincidono con le usuali caratteristiche della sollecitazione $N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_o$, nella sezione S , l'equazione stessa può ora scriversi:

$$(525) \quad \sum P \eta^* = T_x \gamma_{ix}^* + T_y \gamma_{iy}^* + N \eta_z^* + M_x \varphi_x^* + M_y \varphi_y^* + M_o \varphi_z^*.$$

e nel caso particolare dei sistemi piani, che qui vogliamo trattare:

$$\Sigma P \eta^* = T \eta_y^* + N \eta_z^* + M \varphi_x^* ,$$

in particolare per un solo carico concentrato d'intensità unitaria:

$$(526) \quad 1 \eta^* = T \eta_y^* + N \eta_z^* + M \varphi_x^* .$$

Le caratteristiche arbitrarie M^* , N^* , T^* , del sistema di forze distorcenti possono scegliersi tali che le corrispondenti caratteristiche della distorsione abbiano valori assegnati. Posto successivamente:

$$\begin{aligned} \eta_{yy}^* = 1 & \quad , & \quad \eta_z^* = \varphi_x^* = 0 & , \\ \eta_z^* = 1 & \quad , & \quad \eta_{yy}^* = \varphi_x^* = 0 & , \\ \varphi_x^* = 1 & \quad , & \quad \eta_{yy}^* = \eta_z^* = 0 & , \end{aligned}$$

la (526) fornisce ordinatamente:

$$(527) \quad \begin{cases} 1 \eta^* = 1 T , \\ 1 \eta^* = 1 N , \\ 1 \eta^* = 1 M . \end{cases}$$

Resta così dimostrato come la linea d'influenza di una data caratteristica della sollecitazione nella sezione S d'una travatura, si possa ottenere come linea elastica della trave sulla quale il carico si sposta, quando si imponga alla sezione S la distorsione di Volterra che abbia diversa da zero ed uguale all'unità la sola caratteristica corrispondente alla caratteristica della sollecitazione che si considera. È poi ovvio che nei tre casi possibili contemplati dalle (527) il sistema di forze distorcenti si riduce ad un taglio T^* nel primo caso, ad una forza normale N^* nel secondo caso, ad un momento M^* nel terzo.

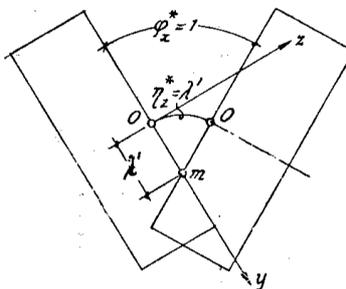


Fig. 178

Se nella (526) poniamo (fig. 178):

$$\eta_y^* = 0 \quad , \quad \eta_z^* = \lambda' \quad , \quad \varphi_x^* = 1 \quad ,$$

ove λ' indichi uno dei raggi di nocciolo della sezione, se in altri termini imponiamo alle due faccie del taglio una rotazione unitaria intorno all'asse normale al piano del sistema che ha per traccia su questo il punto di nocciolo m , avremo:

$$1 \eta^* = N \lambda' + 1 M \quad ,$$

ovvero, in funzione del momento di nocciolo M_m :

$$(528) \quad 1 \eta^* = 1 M_m \quad ;$$

otteniamo così la linea d'influenza del momento di nocciolo M_m , che, per le (352/I), è affine a quella della tensione massima σ' .

Può darsi che effettuato il taglio in corrispondenza della sezione S , le porzioni di travatura separate dal taglio stesso non restino sufficientemente vincolate. In tal caso le caratteristiche N , M , T , non possono più essere arbitrarie, perchè debbono soddisfare all'equilibrio dei tronchi insufficientemente vincolati. Ma, data l'insufficienza dei vincoli, è possibile dare alle due porzioni deformate del sistema un moto rigido relativo tale che gli spostamenti risultanti permettano di soddisfare le (527).

In particolare se la travatura era staticamente determinata, lo spostamento voluto delle due faccie del taglio si può realizzare con un sistema nullo di forze distorcenti; gli spostamenti sono allora esclusivamente quelli corrispondenti al moto relativo rigido delle due porzioni, e le linee d'influenza constano di tanti tratti rettilinei quanti sono gli elementi cinematicamente indeformabili che costituiscono il sistema.

Sul metodo di deduzione delle linee d'influenza come linee elastiche sono basati certi apparecchi, tra i quali l'*influenzografo* del Colonnetti, atti al tracciamento meccanico di dette linee, ed alcuni procedimenti, come quello di Beggs, che servono ad ottenerle sperimentando su modelli.

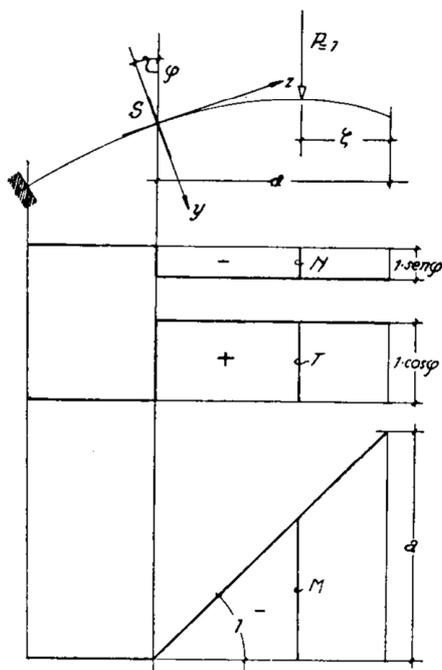


Fig. 179

90 — Sistemi isostatici.

a) MENSOLA.

In fig. 179 sono disegnate le linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione per la sezione generica S d'una mensola percorsa da un carico verticale. Trattandosi d'un sistema staticamente determinato, tutte queste linee constano, per le ragioni già dette, di tratti rettilinei. Si osservi che se la trave fosse ad asse rettilineo ed orizzontale, lo spostamento η_z avrebbe proiezione nulla sulla verticale (direzione del

carico), mentre lo spostamento η_y sarebbe verticale; quindi sarebbe $N=0$ per qualunque posizione del carico, $T=1$, per il carico agente fra la sezione e l'estremità libera.

Una conferma degli andamenti trovati si ha subito osservando che per un carico alla sinistra della sezione considerata ($\zeta > a$), sono nulle

tutte le caratteristiche della sollecitazione nella sezione stessa, perchè è nulla la risultante delle forze alla destra. Per il carico alla destra ($\zeta < a$) le caratteristiche N e T sono le proiezioni $1 \sin \varphi$, $1 \cos \varphi$ del carico sugli assi z ed y , proiezioni che restano immutate al variare di ζ in tutto l'intervallo $(0, a)$; la caratteristica M vale il prodotto $-1(a - \zeta)$, varia cioè proporzionalmente alla distanza $a - \zeta$ del carico dalla sezione.

b) TRAVE SEMPLICE E CON SBALZI.

La linea d'influenza per carichi flettenti della reazione d'uno degli appoggi d'una trave semplice è rappresentata in fig. 180 a, mentre le figg. 180 b, c, rappresentano le linee d'influenza del taglio e del momento flettente nella sezione generica S della trave.

Per una trave con sbalzi dette linee hanno gli andamenti indicati in fig. 181, che non abbisognano di spiegazioni.

Molto semplice è anche il tracciamento nel caso d'una trave Gerber: nell'esempio della fig. 182 sono state disegnate le linee d'influenza delle reazioni:

d'un appoggio di estremità fig. 182 a),
 un appoggio intermedio fig. 182 b);
 e quelle delle caratteristiche della sollecitazione:

per una sezione S_1 in una campata priva di cerniere (figg. 182 c, d),

per una sezione S_2 in un segmento di trave sorretto da due cerniere (figg. 182 e, f),

per una sezione S_3 scelta in un segmento di trave compreso tra una cerniera e l'appoggio ed essa più vicino (figg. 182 g, h).

c) ARCO ISOSTATICO.

Supposto il sistema percorso da un carico verticale (fig. 183), la linea d'influenza della componente verticale A della reazione R_1 dell'imposta sinistra è limitata dalla retta $A'_1 B'_1$, (fig. 183 a):

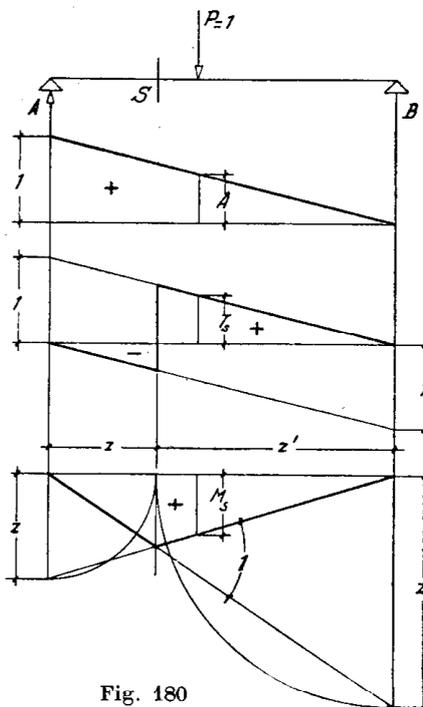


Fig. 180

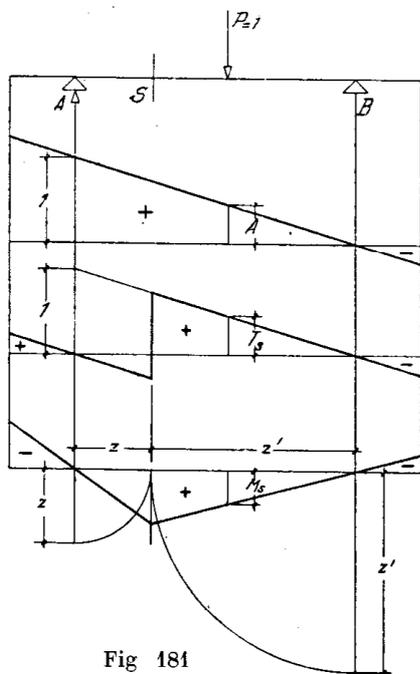
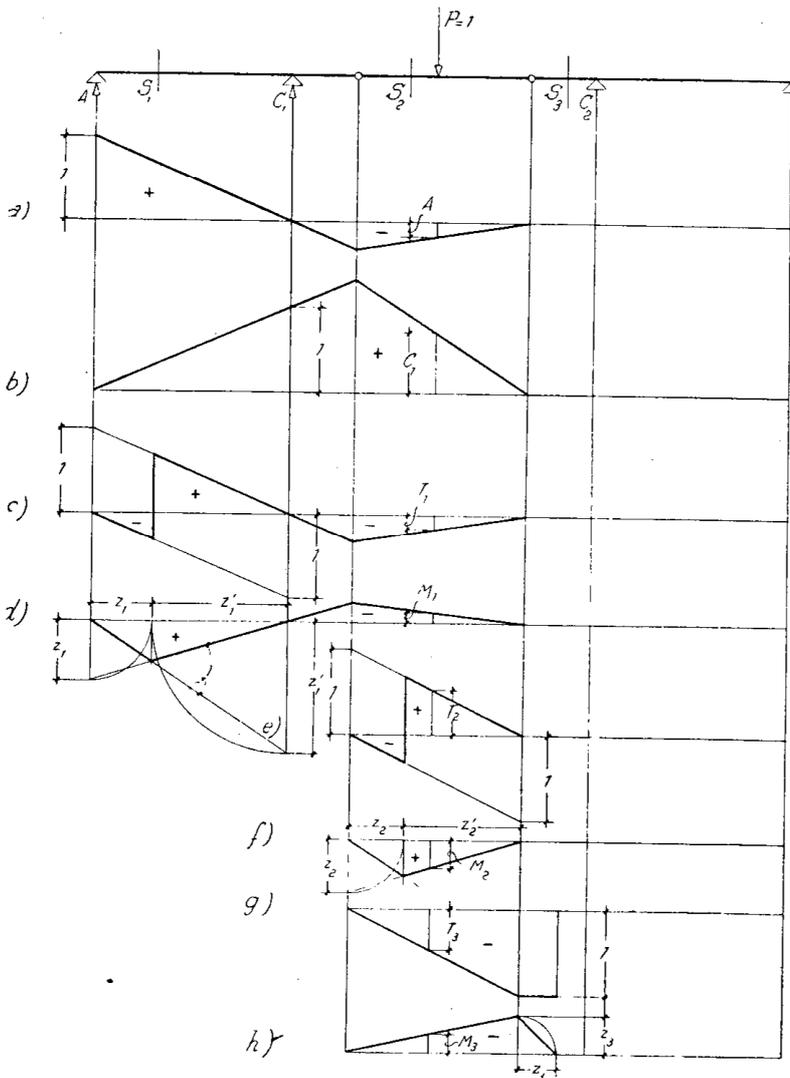


Fig. 181

è uguale all'unità l'ordinata sulla verticale dell'imposta A , nulla l'ordinata sulla verticale dell'imposta B .

La linea d'influenza della componente orizzontale della R_1 si ottiene dando all'imposta uno spostamento orizzontale unitario, ciò che implica una rotazione simultanea del punto V intorno ad A e B .

Determinato col diagramma degli spostamenti il punto v corrispondente



alla nuova posizione del vertice V dell'arco, si misura la componente verticale (direzione dei carichi) dello spostamento di questo punto, che sarà la ordinata h della linea d'influenza sulla corrispondente verticale (fig. 183 c). Dette rispettivamente f_1 ed f_2 le altezze del vertice V sulle cerniere d'imposta A e B , essendo $h = al_1/f_1 = \beta l_2/f_2$, e perciò $h \left(\frac{f_1}{l_1} + \frac{f_2}{l_2} \right) = 1$, avremo:

$$h = \frac{l_1 l_2}{l_2 f_1 + l_1 f_2} .$$

e se l'arco è simmetrico ($l_1 = l_2 = l/2$, $f_1 = f_2 = f$):

$$h = \frac{l}{4f} .$$

Fig. 182

Il segmento \overline{oa} rappresenta l'unità di forza.

La linea d'influenza di uno dei momenti di nocciolo della sezione generica S è disegnata in fig. 183 d. Supposta inserita nella sezione la sconnessione $M=0$, si può dare al punto m uno spostamento arbitrario \overline{os} sulla normale al raggio che lo unisce alla cerniera d'imposta A (fig. 183 e);

conseguentemente resta individuato lo spostamento del vertice V , perchè questo punto deve mantenersi simultaneamente sulle normali ai raggi Vm a VB . Condotte quindi rispettivamente da s e da o le normali suddette, si completa il diagramma degli spostamenti, dopo di che si effettua il tracciamento della linea d'influenza, com'è indicato in figura. Per verifica, la

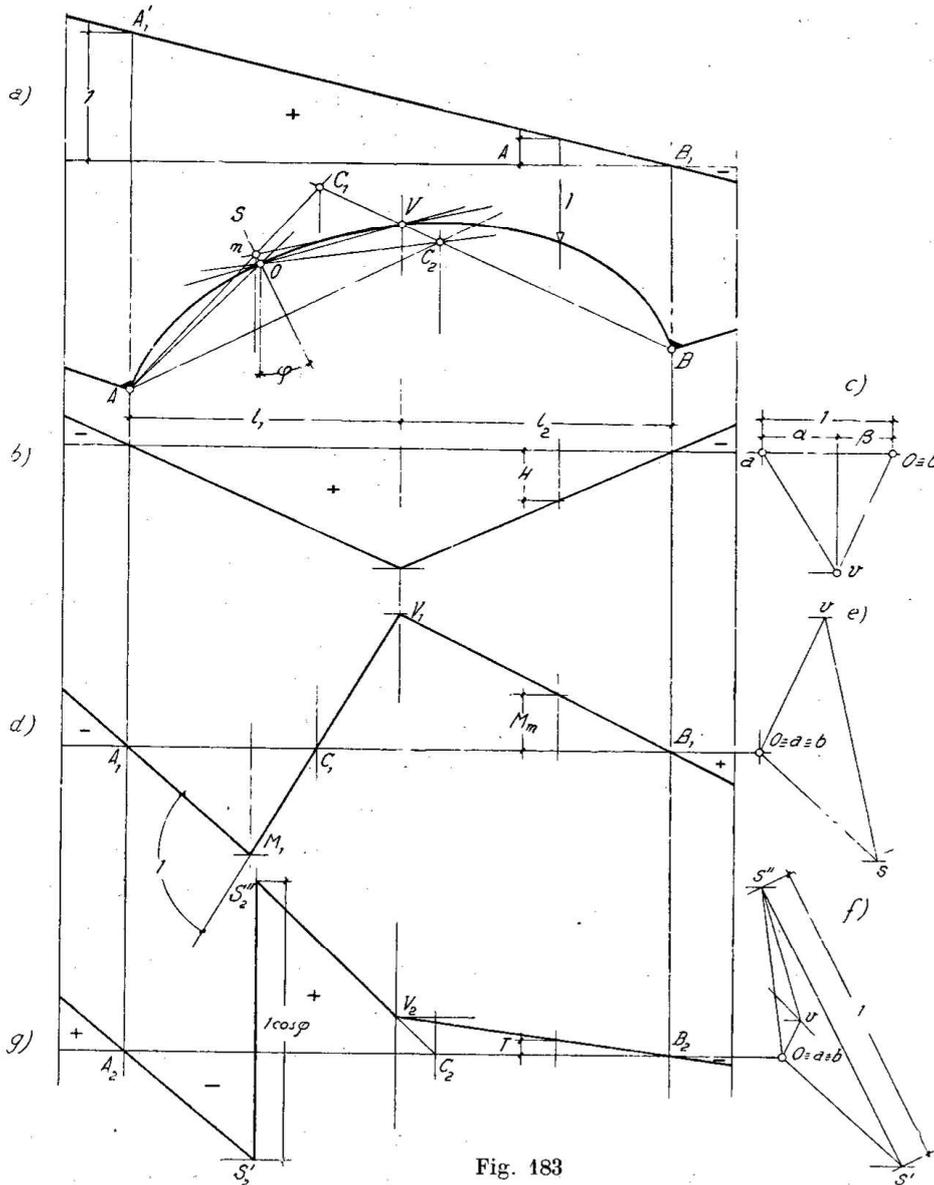


Fig. 183

verticale di separazione dei carichi, ossia la retta parallela alla direzione dei carichi che incontra la linea d'influenza nel punto C_1' di ordinata nulla (punto di passaggio), deve passare per il punto C_1 in cui si intersecano le semirette Am e BV ; questo punto è infatti il centro d'istantanea rotazione del segmento mV di arco.

In modo analogo si procede alla costruzione della linea d'influenza

del taglio. Inserita nella sezione di cui si tratta la sconnessione $T=0$, si dia alla faccia sinistra del taglio lo spostamento arbitrario $\overline{os'}$ che deve prodursi nella direzione normale alla congiungente il baricentro O della sezione coll'imposta A (fig. 183 *f*). Il centro d'istantanea rotazione del tronco OV di arco è ora il punto C_2 (intersezione della normale per A al piano della sezione e di quella per B allo spostamento di V); lo spostamento relativo $\overline{s's''}$ delle due faccie del taglio resta pertanto determinato conducendo da o la normale os'' alla congiungente OC_2 ; per determinare poi lo spostamento di V , basta condurre da s'' e da o le normali rispettivamente alle OV e VB .

Nota il diagramma degli spostamenti, si traccia, col procedimento solito, la linea d'influenza (fig. 183 *g*).

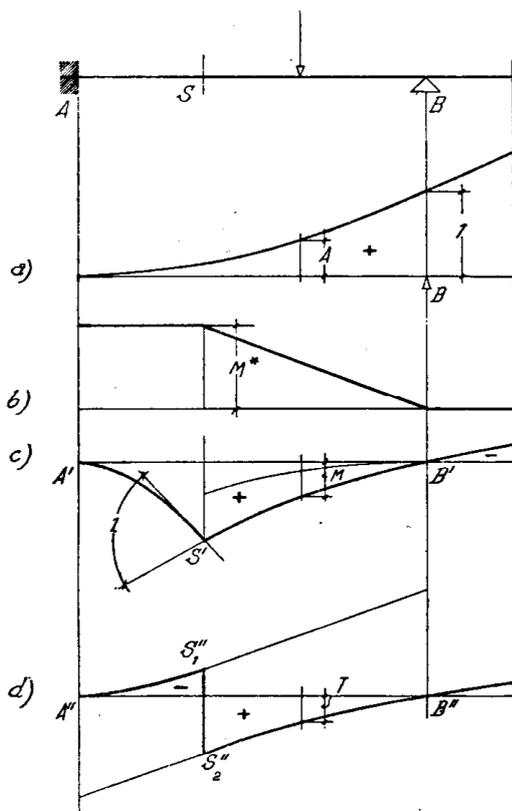


Fig. 184

91 — Sistemi iperstatici.

a) TRAVI.

La linea d'influenza per carichi verticali della reazione d'appoggio B della trave rappresentata in fig. 184, è affine alla linea elastica della trave stessa caricata esclusivamente da una forza B arbitraria (fig. 184 *a*). Se i vincoli sono rigidi, per leggere le ordinate d'influenza basta assumere come unità di forza il segmento intercetto sulla verticale dell'appoggio B .

Volendo la linea d'influenza d'una caratteristica della sollecitazione per una sezione generica S , per esempio quella del momento flettente, inseriamo in S la sconnessione $M=0$, appli-

chiamo alle due faccie del taglio un momento arbitrario, e costruiamo la linea elastica della trave tenendo presente che l'ordinata in S deve essere unica per i due tronchi separati dalla sconnessione, e quella in B dev'essere nulla (fig. 184 *b*); costruita preventivamente la deformata del tronco AS e determinato così il punto S' si può tracciare la deformata dell'altro tronco, che deve passare per i punti S' e B' (fig. 184 *c*).

Analogamente si procederebbe nel caso della linea d'influenza del taglio, nel qual caso la configurazione deformata del tronco insufficien-

temente vincolato resterebbe definita ancora dal punto B e dalla tangente in S'_1 , che deve risultare parallela a quella che l'altro tronco presenta sulla stessa verticale (fig. 184 d).

Per la trave continua rappresentata in fig. 185, supposta percorsa da carichi verticali, sono state tracciate le linee d'influenza:

della reazione dell'appoggio A (fig. 185 a),

della reazione dell'appoggio C_1 (fig. 185 b),

del taglio e del momento flettente in una sezione S_1 della prima campata (figg. 185 c, d),

del momento flettente sull'appoggio C_1 (fig. 185 e).

b) ARCO CON CERNIERE D'IMPOSTA.

La linea d'influenza della componente orizzontale della reazione d'una imposta coincide con la deformata dell'asse dell'arco corrispondente all'azione d'una forza H capace di produrre una traslazione orizzontale relativa unitaria delle cerniere.

Costruiamo detta deformata supponendo dapprima il sistema incastrato in B (fig. 186). L'ordinata relativa al punto generico F dell'asse potremo ottenerla applicando

la teoria dell'ellisse di elasticità, come prodotto della H per il momento centrifugo rispetto alla linea d'azione della H ed alla parallela per F alla direzione v dei carichi, dei pesi elastici della porzione BF d'arco. Appliciamo pertanto orizzontalmente ai baricentri elastici dei tronchi in cui immaginiamo suddiviso l'arco, i corrispondenti pesi elastici w , colleghiamoli con un poligono funicolare (non indicato in figura) e prolunghiamo i lati di questo fino ad intersecare la retta d'azione z della H ; otterremo così su questa retta i momenti statici w' dei pesi elastici, detti anche *pesi elastici del second'ordine riferiti alla z* . Questi, applicati poi parallela-

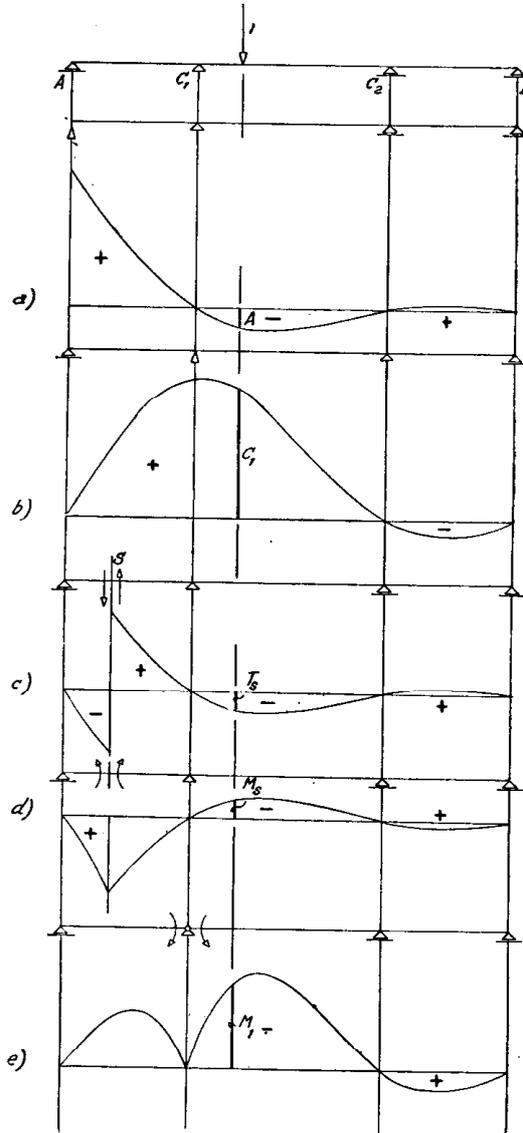


Fig. 185

mente alla v , agli antipoli della z rispetto alle ellissi d'elasticità dei singoli tronchi, si connettono con un altro poligono funicolare, le cui ordinate η' , lette nella direzione v a partire dal primo lato, daranno le inflessioni nell'ipotesi d'incastro in B .

Essendo invece il sistema incernierato in B , bisognerà sommare algebricamente alle inflessioni ottenute, gli spostamenti dovuti ad una rotazione rigida φ intorno a B , tale da annullare la componente verticale $\eta_{zy} = HJ_{zy}$ dello spostamento di A . Avremo perciò:

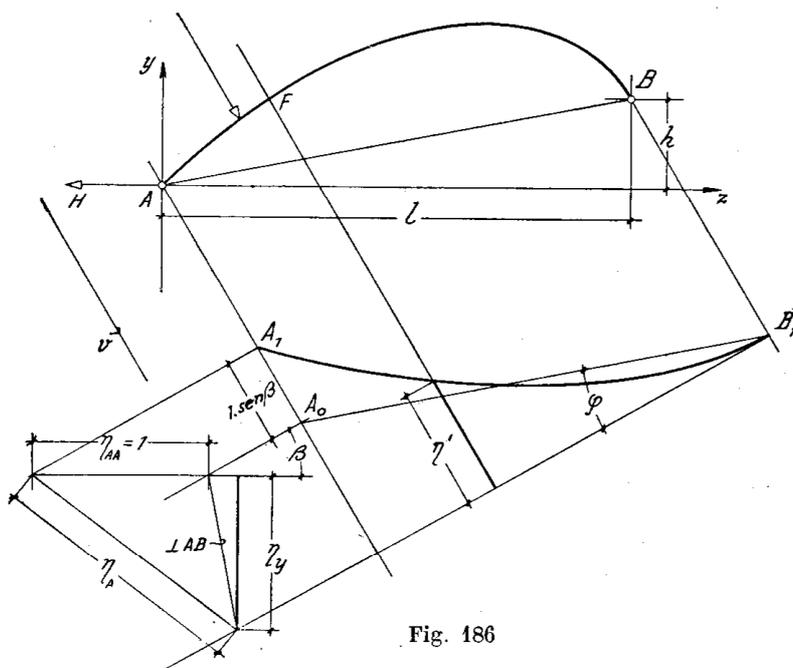


Fig. 186

$HJ_{zy} + \varphi l = 0$,

da cui si deduce l'angolo di cui deve essere ruotata la fondamentale di riferimento intorno a B_1 :

$$\varphi = -H \frac{J_{zy}}{l}.$$

Lo spostamento orizzontale residuo, che misura l'unità di forza, vale:

$$\eta_{AA} = HJ_{xy} + \varphi h,$$

e la sua proiezione $\eta_{AA} \sin \beta$, ortogonale alla direzione v dei carichi, che è l'ordinata d'influenza per il carico agente in A , si annulla quando la v è verticale; in tal caso la fondamentale coincide con la congiungente i punti $A_1 B_1$, in cui la funicolare dei pesi elastici del second'ordine w' incontra le verticali delle imposte.

c) ARCO SENZA CERNIERE.

Il sistema principale che si considera di regola nello studio di quest'arco è la mensola che si ottiene sopprimendo uno degli incastri d'estremità.

Supposta rimossa l'imposta A , conviene ridurne la reazione R_A al centro elastico O relativo all'imposta medesima (fig. 187); gli spostamenti secondo gli assi z, y , e la rotazione di detto centro, indicati con M, A ed H i parametri di una forza R_A arbitraria, prendono allora la forma (482), o quella (483), se gli assi z ed y coincidono cogli assi dell'ellisse.

La *linea d'influenza del parametro M* si ottiene come deformata dell'asse, supposto il sistema principale cimentato da un momento M arbitrario, valutandone al solito le ordinate nella direzione v dei carichi, con unità di misura uguale alla rotazione che il centro O subisce nella deformazione (fig. 187 a).

La *linea d'influenza del parametro A* si ottiene come deformata dell'asse geometrico dell'arco, per l'azione di una forza capace di produrre una pura traslazione verticale del centro elastico O , (centro improprio della rotazione) ossia per una forza F_A applicata a questo in direzione coniugata all'orizzontale (figura 187 b). Analogamente la *linea d'influenza del parametro H* si ottiene come linea elastica del sistema principale, per l'azione di una forza F_H agente in O nella direzione coniugata alla verticale (fig. 187 c). Per entrambe queste ultime linee, l'unità di forza è rappresentata dallo spostamento che in ciascun caso assume il baricentro elastico.

Le linee d'influenza delle caratteristiche della sollecitazione, quando non vogliamo dedurci da quelle dei parametri della reazione iperstatica (procedimento in generale più comodo) possono ottenersi direttamente applicando il secondo principio di reciprocità.

Si voglia ad esempio la linea relativa al momento di nocciolo M_m in una data sezione. Supponiamo nota l'ellisse d'elasticità degli spostamenti relativi, notoriamente coincidente con l'ellisse d'elasticità terminale (fig. 188). Inserita la sconnessione $M_m=0$, si determina subito, come antipolare di m rispetto all'ellisse d'elasticità, la retta d'azione u della risultante R delle forze distorcenti atte a produrre una rotazione relativa intorno ad m . Ciò posto determiniamo le deformate delle due porzioni d'arco valutandone le ordinate nella direzione dei carichi, supposta qui verticale.

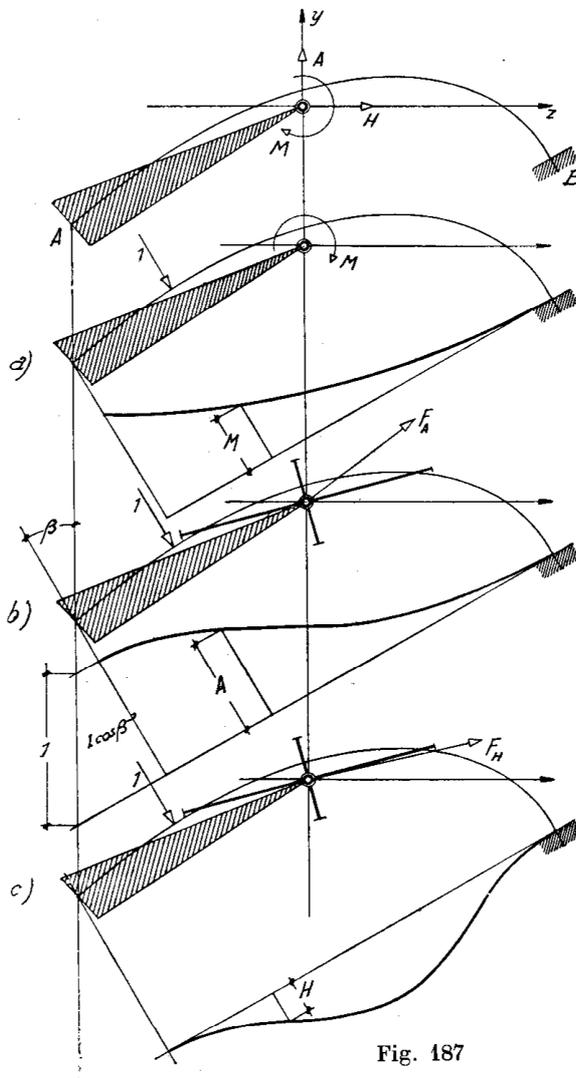


Fig. 187

Lo spostamento del punto generico F vale notoriamente il prodotto della R per il momento centrifugo del peso elastico della porzione BF di arco rispetto alla linea d'azione della forza ed alla retta v secondo cui si valuta lo spostamento. Se si opera graficamente, conetteremo i pesi elastici dei tronchi Δs applicati parallelamente alla u , ai rispettivi baricen-

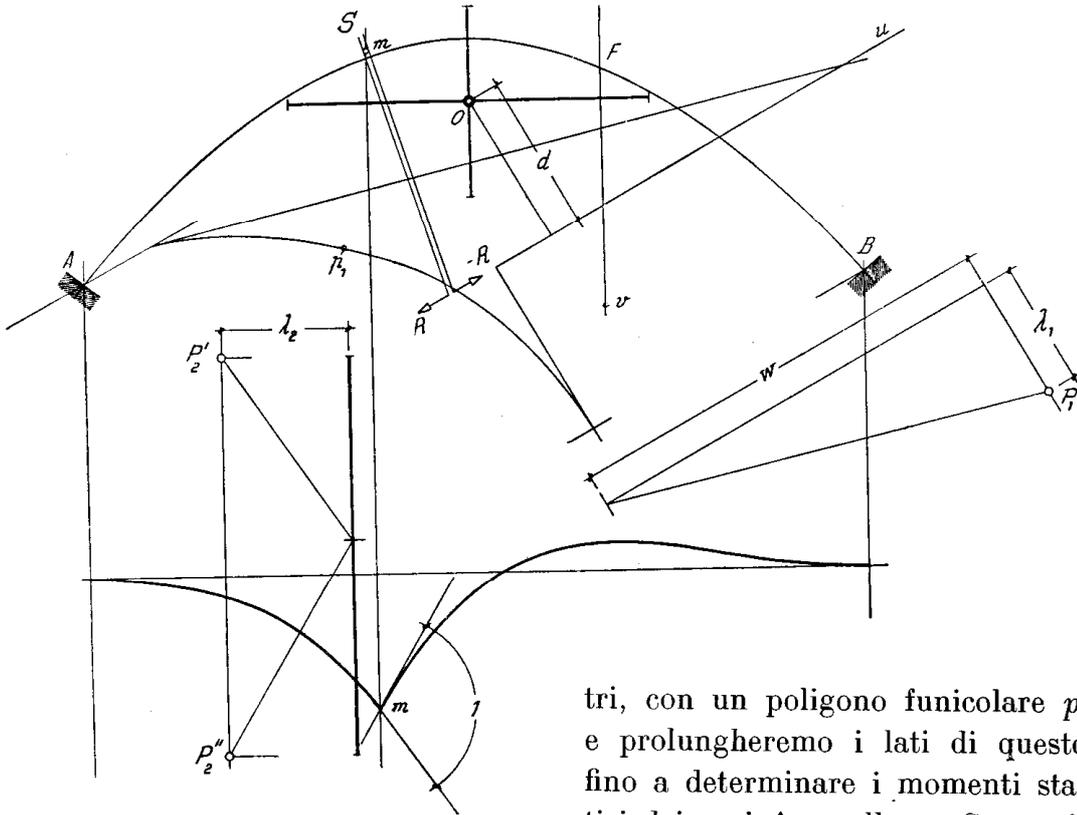


Fig. 188

tri, con un poligono funicolare p_1 e prolungheremo i lati di questo fino a determinare i momenti statici dei pesi Δw sulla u . Successivamente applicheremo nella dire-

zione v questi momenti statici riguardati come forze, agli antipoli della u rispetto alle ellissi d'elasticità dei singoli tronchi e li collegheremo con due poligoni funicolari di ugual distanza polare λ_2 , scegliendo i poli P_2' e P_2'' in modo che le deformate delle due porzioni d'arco separate dalla sezione S soddisfino alle condizioni di vincolo ed abbiano sulla parallela alla v per il punto m ordinate uguali. L'angolo compreso tra le tangenti alla cuspide in m' è l'unità nella quale si debbono leggere le ordinate; d'altronde si può fare in modo che tale angolo risulti uguale all'unità scegliendo $\lambda_2 = P_2' P_2''$.

92 — Sistemi reticolari.

Le linee d'influenza dei sistemi reticolari si tracciano sostanzialmente cogli stessi criteri già indicati per le travature a parete piena. Alla defor-

mata dell'asse geometrico, traiettoria del punto d'applicazione del carico mobile, si sostituisce qui il poligono d'inflessione del corrente della trave che il carico percorre. Potremo in questa determinazione valerci dei metodi generali basati sul principio dei lavori virtuali, dei diagrammi di Williot, del metodo dei pesi elastici di Müller-Breslau o, infine, del metodo dell'elisse d'elasticità.

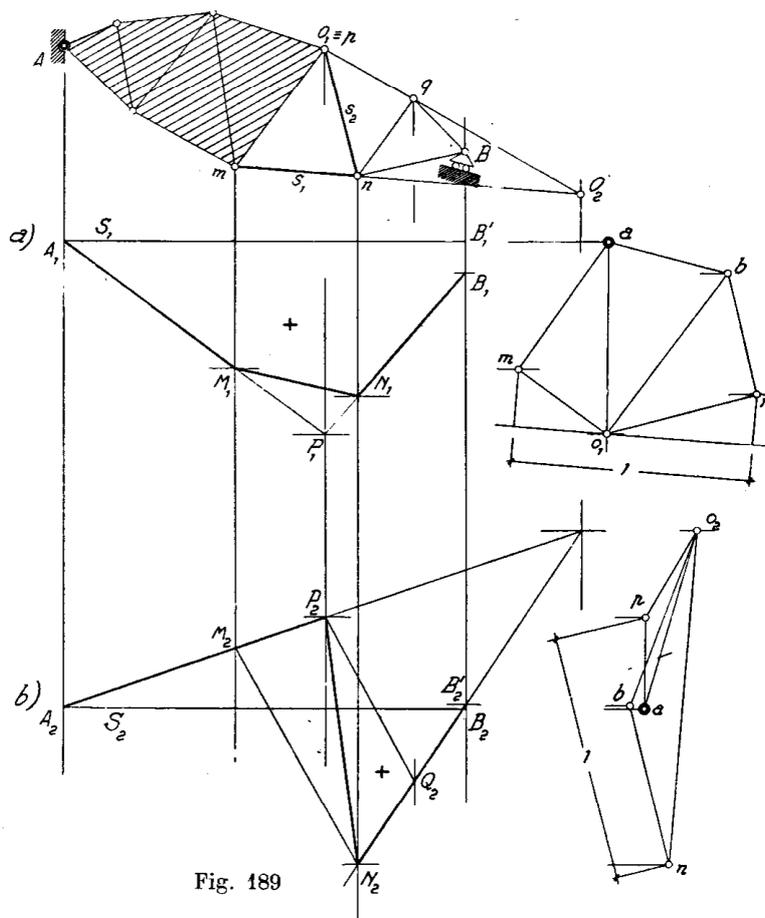
La linea d'influenza dello sforzo S in un'asta si ottiene come poligono d'inflessione del corrente caricato, quando si inserisca nel sistema la sconnessione $S=0$

e si applichino alle due faccie del taglio forze S tali da produrre uno spostamento assiale unitario. Come già sappiamo, le linee degenerano in poligonali se il sistema è isostatico.

In figura 189 sono rappresentate le linee d'influenza per carico verticale degli sforzi in un'asta di corrente ed in un'asta di parete di una trave a generazione triangolare, semplicemente appoggiata alle estremità. I

punti O_1 e O_2 , rispettivamente coincidenti coi poli delle aste s_1 ed s_2 , sono i centri intorno ai quali si compie la rotazione rigida relativa delle due porzioni di travatura adiacenti alle aste considerate. Le linee sono dedotte dai diagrammi degli spostamenti col solito procedimento, proiettando i singoli spostamenti sulle parallele alla direzione dei carichi per i punti corrispondenti. L'unità di forza è uguale alla proiezione sulla direzione dell'asta considerata dello spostamento relativo dei nodi estremi dell'asta medesima.

Per l'asta di corrente s_1 la linea d'influenza è la spezzata $A_1P_1B_1B_1'$ se il carico percorre il corrente superiore, è invece l'altra spezzata A_1M_1



$N_1 B_1 B_1'$ se il carico percorre il corrente inferiore; similmente per l'asta di parete s_2 vale la spezzata $A_2 P_2 Q_2 B_2 B_2'$ nel primo, la spezzata $A_2 M_2 N_2 B_2 B_2'$ nel secondo caso. La $A_2 P_2 N_2 B_2 B_2'$ sarebbe la linea d'influenza dello sforzo S_2 quando il carico percorresse la traiettoria $A p n B$.

Il segno dello sforzo si determina supponendo che lo spostamento relativo delle faccie del taglio corrisponda ad un aumento di lunghezza dell'asta, lo sforzo distorcente sia cioè una trazione (nulla nel caso del-

l'esempio di sopra); saranno allora ordinate positive della linea d'influenza, ossia trazioni, quelle che misurano spostamenti equiversi ai carichi, ordinate negative le altre. Per l'asta di corrente s_1 si hanno sempre sforzi di trazione; lo sforzo nell'asta di parete s_2 subisce invece inversione di segno al passaggio del carico.

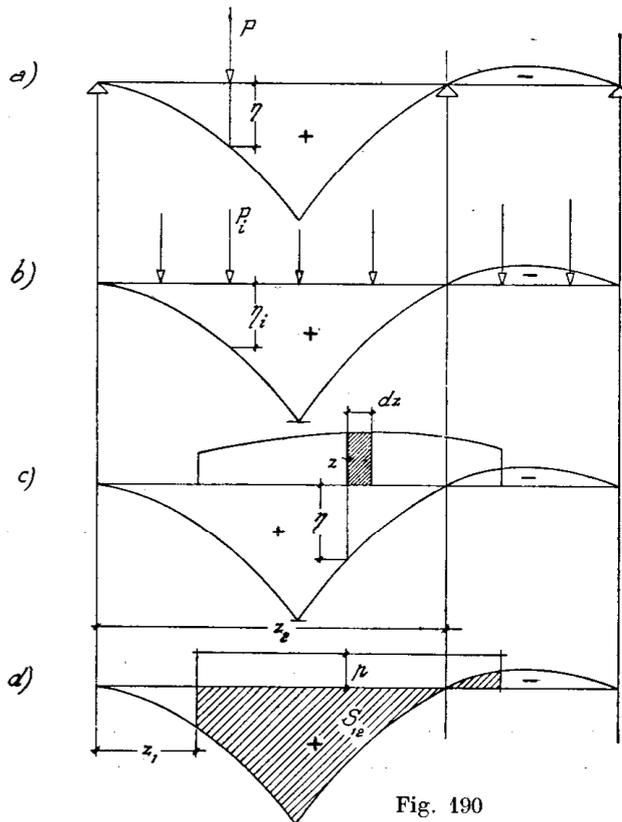


Fig. 190

93 — Utilizzazione delle linee d'influenza.

L'ordinata generica η di una linea d'influenza fornisce il valore che assume la caratteristica μ cui la linea si riferisce, quando il carico uni-

tario agisce in corrispondenza dell'ordinata medesima. Se, anzichè unitaria, l'intensità P del carico è arbitraria, per il principio di sovrapposizione degli effetti la caratteristica in questione vale (fig. 190 a):

$$(529) \quad \mu = \eta P ;$$

se invece d'un solo carico ne agiscono n in altrettante posizioni, avremo (fig. 190 b):

$$(530) \quad \mu = \sum_{i=1}^n \eta_i P_i ,$$

essendo P_i il generico dei carichi, η_i l'ordinata della linea d'influenza in corrispondenza di esso.

Se poi il sistema è soggetto ad un carico distribuito (fig. 190 c), per

l'elemento $p_z dz$ di esso, applicando la (529), si ottiene:

$$d\mu = \eta_z dz ;$$

sicchè per tutto il carico, supposto esteso tra le ascisse z_1 e z_2 , sarà:

$$(531) \quad \mu = \int_{z_1}^{z_2} \eta p_z dz .$$

Infine se il carico è distribuito uniformemente ($p_z = p = \text{cost.}$), la caratteristica prende l'espressione (fig. 190 d):

$$(532) \quad \mu = p \int_{z_1}^{z_2} \eta dz = p S_{12} ,$$

ove S_{12} sta ad indicare l'area della superficie d'influenza compresa fra le ordinate di ascisse z_1 e z_2 .

Naturalmente tanto le ordinate η nelle (529) e (530), come le aree S nella (532), debbono essere computate in valore e segno. Di conseguenza quando si cerchi il massimo od il minimo effetto prodotto da carichi mobili, si deve limitare il carico alle sole ordinate od aree positive, ovvero a quelle negative, sempre che siano probabili le condizioni di carico che ne risultano.
