

CAPITOLO III

ANALISI DELL'EQUILIBRIO DEI SOLIDI ELEMENTARI

9 — Tensioni interne.

Consideriamo un corpo elastico in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne.

Supposto eseguito un taglio attraverso una certa superficie S , tale da dividere il corpo in due porzioni A_1 , A_2 , (fig. 4), è chiaro che l'equilibrio d'una porzione, per esempio la A_1 , non può in generale sussistere con riguardo alle sole forze esterne ad essa applicate. Possiamo però ristabilirlo, e al tempo stesso ripristinare esattamente le condizioni primitive della porzione stessa, facendo anche agire su di essa, come forze esplicite, le azioni che prima del taglio vi esercitava l'altra porzione attraverso ciascun elemento della superficie S .

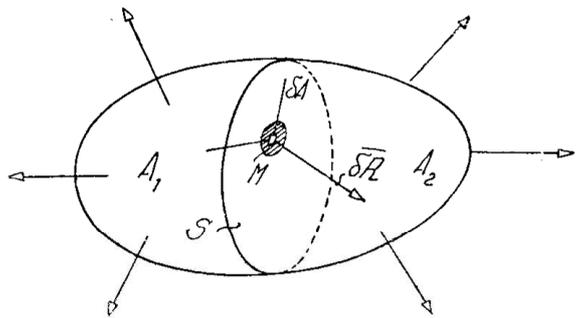


Fig. 4

Non faremo alcuna ipotesi circa la natura di queste azioni; ammetteremo però che le forze che le costituiscono — che diremo *interne* — siano distribuite con continuità sulla superficie S . Detto poi δA un elemento di area scelto su S nell'intorno di un certo punto M , e $\delta \mathbf{R}$ la risultante delle forze interne che si trasmettono attraverso δA , ammetteremo pure che quando l'intorno δA di M tende a zero, il rapporto $\delta \mathbf{R}/\delta A$ tenda ad un limite finito \mathbf{p}_n ed il momento di $\delta \mathbf{R}$ rispetto ad M tenda a zero.

Al vettore \mathbf{p}_n si dà il nome di *tensione* o *sforzo nel punto M della se-*

zione S ; il valore scalare p_n del vettore \mathbf{p}_n fornisce l'intensità di questa tensione per unità di area.

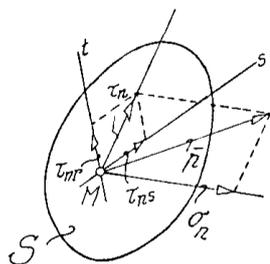


Fig. 5

Della tensione \mathbf{p}_n considereremo in generale (fig. 5):

la componente σ_n diretta secondo la normale in M alla superficie S , che diremo brevemente *tensione normale*;

la componente τ_n giacente nel piano tangente in M alla superficie S , che diremo *tensione tangenziale*. In luogo della τ_n considereremo più spesso le sue componenti τ_{nr} e τ_{ns} secondo una coppia di rette r, s , tra loro ortogonali ed appartenenti al detto piano tangente.

10 — Tensore degli sforzi.

Diremo noto lo *stato di tensione* nel punto generico M interno al corpo elastico quando si possa determinare la tensione \mathbf{p}_n sopra un elemento piano qualunque passante per esso. Dimosteremo che tale determinazione è possibile quando siano note le tensioni \mathbf{p}_i che agiscono su tre elementi superficiali mutuamente ortogonali passanti per M .

Risolviamo il vettore \mathbf{p}_i , tensione agente sull'elemento normale all'asse y_i , nelle sue tre componenti secondo gli assi: una normale e due tangenziali; sicchè, applicando le convenzioni fatte, decomporremo (fig. 6) ⁽¹⁾:

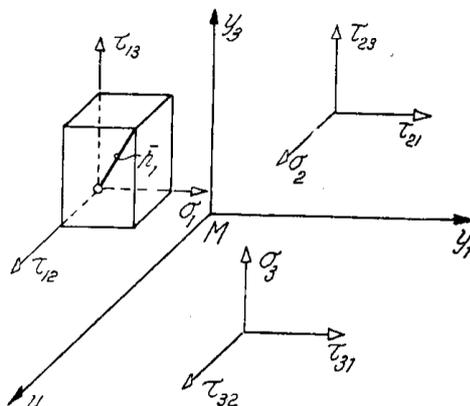


Fig. 6

\mathbf{p}_1 , ossia la tensione agente *sull'elemento superficiale normale all'asse y_1* , nella *tensione normale* σ_1 e nelle *tensioni tangenziali* τ_{12}, τ_{13} ;

\mathbf{p}_2 , ossia la tensione agente *sull'elemento normale all'asse y_2* , nella *tensione normale* σ_2 , e nelle *tensioni tangenziali* τ_{21}, τ_{23} ;

\mathbf{p}_3 , ossia la tensione agente *sull'elemento superficiale normale all'asse y_3* , nella *tensione normale* σ_3 e nelle *tensioni tangenziali* τ_{31}, τ_{32} .

(1) - La decomposizione è indicata in figura fuori del punto M per la necessaria chiarezza del disegno. Si tenga presente anche in seguito tale avvertenza.

Le nove componenti:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \sigma_2 & \tau_{21} & \tau_{23} \\ \sigma_3 & \tau_{31} & \tau_{32} \end{array} \right.$$

la generica delle quali indicheremo con σ_{ik} , con la convenzione di porre:

$$\sigma_{ii} = \sigma_i \quad , \quad \sigma_{ik} = \tau_{ik} \quad ,$$

sono i parametri di un tensore doppio, cui si dà il nome di *tensore degli sforzi*.

Per stabilire il segno delle σ_{ik} ci riferiremo sempre all'azione che su ciascun elemento superficiale esercita la porzione di solido collocata dalla parte degli assi positivi, convenendo di riguardare come positive le componenti spiranti nel senso positivo degli assi.

11 — Reciprocità delle tensioni tangenziali.

Consideriamo un parallelepipedo elementare avente tre faccie coincidenti con gli elementi superficiali per M considerati di sopra e collocato dalla parte degli assi positivi (fig. 7). Siano dy_i le lunghezze dei suoi spigoli.

Potremo supporre isolato questo elemento, e studiarlo a sè applicandogli, oltre alle eventuali *forze di massa* cui era soggetto nell'intero solido, anche le forze che, attraverso le sue faccie elementari, vi esercitava la parte rimanente.

Alle tre faccie coincidenti con gli elementi superficiali per M bisognerà dunque applicare le azioni che vi esercitava la porzione di solido posta dalla parte degli assi negativi, ossia *azioni uguali ed opposte* a quelle (fig. 6) — alle quali abbiamo convenuto di riferirci in ogni caso — che sugli stessi elementi esercitava la porzione di solido posta dalla parte degli assi positivi. Sulla faccia normale all'asse y_i (fig. 7) agiranno quindi le tensioni $-\sigma_{ik}$.

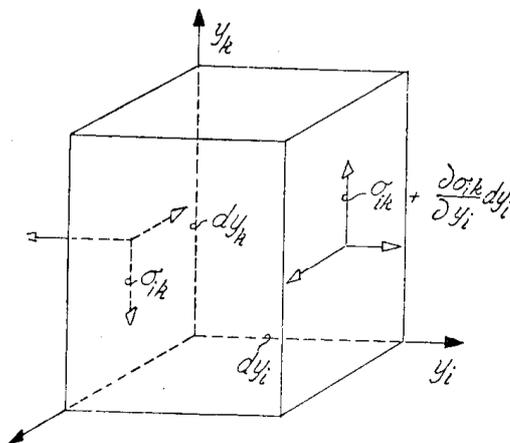


Fig. 7

Sulla faccia opposta alla precedente le componenti di tensione dovranno invece riguardarsi come positive, perchè rappresentano l'azione esercitata dalla porzione di solido collocata dalla parte degli assi positivi. Passando poi dalla faccia per M alla faccia opposta, le componenti di tensione subiranno incrementi proporzionali alla distanza dy_i tra le faccie; cosicchè, ammesso che dette componenti siano continue e derivabili rispetto alle coordinate, le tensioni agenti sulla faccia per A saranno:

$$\sigma_{ik} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_i} dy_i .$$

Noti i valori delle componenti di tensione per unità di area, si possono dedurre le componenti della tensione totale su ciascuna faccia moltiplicando ciascuna componente unitaria che vi agisce per l'area della

faccia stessa: indicheremo con dA_i l'area delle faccie normali all'asse y_i .

Indicate poi con Y_i le componenti delle forze di massa per unità di volume (forze di gravità, ad esempio), dovremo ancora immaginare applicate al baricentro del parallelepipedo le forze $Y_i dV$, essendo dV il volume dell'elemento.

Poichè il solido elastico è in equilibrio, anche il parallelepipedo dovrà essere in equilibrio sotto l'azione del complesso di forze sopra considerato.

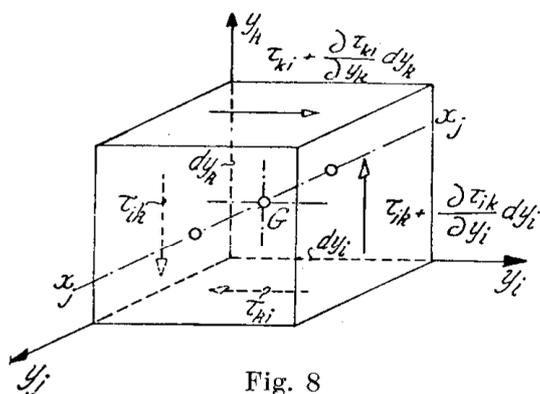


Fig. 8

Imponiamo intanto l'equilibrio alla rotazione intorno a tre assi arbitrari, per esempio intorno agli assi x_i paralleli agli assi coordinati e passanti per il baricentro G del parallelepipedo (fig. 8). Per l'equilibrio intorno all'asse x_i , per esempio, dovrà essere nulla la somma dei momenti rispetto ad esso di tutte le forze agenti. Osservando che tra queste hanno momento nullo tutte quelle le cui linee d'azione incontrano l'asse x_i (e precisamente le forze di massa, tutte le forze normali e tangenziali agenti sulle faccie normali ad x_i e le forze normali agenti sulle altre quattro faccie), e che è parimenti nullo il momento delle tensioni tangenziali spiranti parallelamente all'asse x_j , la condizione detta si scrive:

$$-\left(\tau_{ik} + \tau_{ik} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial y_i} dy_i\right) dA_i \frac{dy_i}{2} + \left(\tau_{ki} + \tau_{ki} + \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial y_k} dy_k\right) dA_k \frac{dy_k}{2} = 0 .$$

Dividendo tutto per dV e trascurando i termini di ordine superiore, si deduce:

$$(27) \quad \tau_{ik} = \tau_{ki}.$$

Con ciò vengono ridotte a sei le nove componenti speciali di tensione e pertanto, come quello della deformazione, *il tensore degli sforzi è un tensore doppio simmetrico.*

Essendo poi arbitraria la scelta degli assi di riferimento, le (27) dichiarano anche che *sugli elementi superficiali appartenenti alle faccie di un diedro rettangolo qualunque, le componenti delle tensioni tangenziali valutate ortogonalmente allo spigolo del diedro hanno versi simmetrici rispetto a questo e sono uguali in intensità.*

12 — Equazioni indefinite di equilibrio.

Oltre all'equilibrio alla rotazione, dovrà sussistere per lo stesso elemento parallelepipedo l'equilibrio alla traslazione, dovrà perciò essere nulla la somma di tutte le forze parallele al generico degli assi y_k , ciò che si traduce nell'equazione:

$$\sum_i \left[-\sigma_{ik} dA_i + \left(\sigma_{ik} + \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_i} dy_i \right) dA_i \right] + Y_k dV = 0.$$

Da questa, con ovvie semplificazioni, si ottengono le *equazioni indefinite d'equilibrio o di Cauchy*:

$$(28) \quad \sum_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial y_i} + Y_k = 0,$$

le quali esprimono l'equilibrio dei punti interni al solido elastico. Ricordando la simmetria del tensore degli sforzi e osservando che le σ_{ki} sono le componenti della tensione totale \mathbf{p}_k sull'elemento superficiale normale all'asse y_k , le (28) si possono anche porre sotto la forma:

$$(29) \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_k + Y_k = 0.$$

Se poi il corpo elastico, anzichè in riposo, trovasi in movimento, avuto riguardo alle forze d'inerzia ed al principio di D'Alembert, in luogo delle (29) valgono ad ogni istante le altre equazioni:

$$(30) \quad \operatorname{div} \mathbf{p}_k + Y_k - \rho \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} = 0,$$

ove ρ è la densità — massa dell'unità di volume — nel punto generico.

13 — Equazioni ai limiti.

Supposto noto il tensore degli sforzi nel punto M interno al solido elastico, ci proponiamo di determinare la tensione agente sopra un elemento superficiale generico passante per M e comunque orientato.

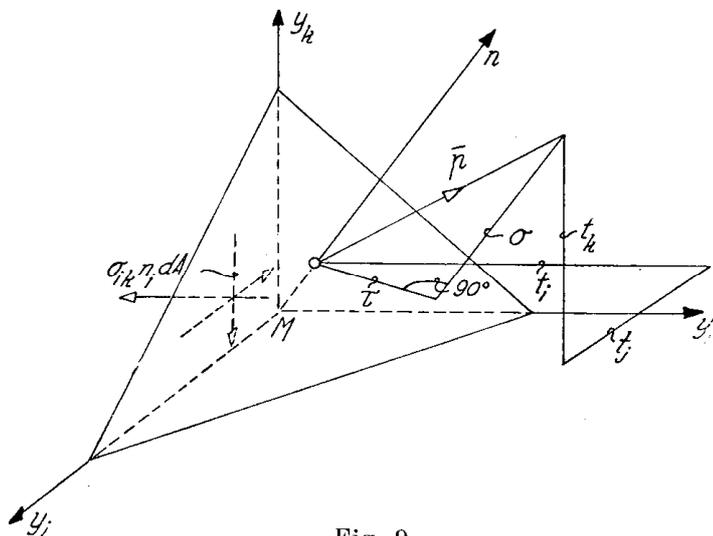


Fig. 9

A tale scopo consideriamo un tetraedro elementare avente tre facce parallele ai piani coordinati e passanti per M , e la quarta faccia con orientamento generico definito dai coseni direttori n_i della sua normale n (fig. 9).

Se indichiamo con dA_i , dA , le aree delle quattro facce ordinatamente normali alle direzioni y_i , n , sarà evidentemente $dA_i = n_i dA$.

Tra le forze agenti sulle tre facce per M , quelle spiranti parallelamente all'asse y_k avranno allora i valori:

$$- \sigma_{ik} n_i dA .$$

Sulla quarta faccia agirà invece una certa tensione unitaria \mathbf{p}_n di cui indichiamo con t_i le tre componenti secondo gli assi coordinati; vi agiranno in conseguenza le tre forze $t_i dA$.

Trascurando le forze di massa (infinitesimi del 3° ordine) rispetto alle forze superficiali (infinitesimi del 2° ordine), l'equilibrio alla traslazione del tetraedro, secondo il generico degli assi y_k , fornisce le equazioni:

$$(31) \quad t_k = \sum_i \sigma_{ik} n_i ,$$

le quali risolvono il problema che ci eravamo proposto.

In particolare per gli elementi della superficie che limita il solido, la \mathbf{p}_n può ritenersi in generale risultare dalla forza esplicita $\mathbf{F}(F_i)$ e dalla reazione di vincolo $\mathbf{R}(R_i)$ per unità di area, nel qual caso le (31) prendono la forma:

$$(32) \quad \sum \sigma_{ik} n_i = F_k + R_k ;$$

i coseni direttori n_i essendovi valutati per la normale n all'elemento della superficie limite direttaverso l'esterno.

Le (32), che devono essere soddisfatte in tutti i punti della superficie costituente il contorno del corpo, vengono dette *equazioni ai limiti*. Insieme con le (28), ovvero con le (29) nel caso dell'equilibrio dinamico, forniscono le condizioni d'equilibrio per tutti i punti del solido elastico.

Poichè sono in numero di tre le equazioni dell'equilibrio disponibili per la determinazione delle sei componenti σ_{ik} nel punto generico, *lo stato di tensione si presenta in generale triplamente iperstatico*.

14 — Tensione normale e tangenziale sopra un elemento superficiale comunque orientato.

Supponiamo ora nuovamente il punto M interno al solido elastico.

La tensione $\mathbf{p}_n(t_i)$ agente sulla faccia obliqua del tetraedro elementare sopra considerato ammetterà in generale una componente normale σ , la quale può ottenersi proiettando la \mathbf{p}_n , o anche le sue tre componenti, sulla normale n , e cioè sarà:

$$(33) \quad \sigma_n = \sum_k t_k n_k,$$

e con riguardo alle (31) ed alla reciprocità delle tensioni tangenziali:

$$(34) \quad \sigma_n = \sum_{ik} \sigma_{ik} n_i n_k.$$

La stessa \mathbf{p}_n ammetterà pure una componente tangenziale τ_n , la cui componente τ_{nv} secondo una retta $v(v_i)$ (sempre giacente sulla faccia obliqua del tetraedro), può ottenersi proiettando su questa le componenti t_i , e vale perciò:

$$\tau_{nv} = \sum_k t_k v_k,$$

o ancora, per le (31):

$$(35) \quad \tau_{nv} = \sum_{ik} \sigma_{ik} n_i v_k.$$

Per la reciprocità delle tensioni tangenziali è poi $\tau_{nv} = \tau_{vn}$.

Le (34) e (35), analoghe alle (6) e (7), determinano dunque rispettivamente:

la tensione normale sopra un elemento superficiale per M , definito in direzione dai coseni direttori n_i della sua normale n ;

la tensione tangenziale che si sviluppa su due elementi superficiali per M , ortogonali tra loro e definiti in direzione dalle terne n_i, v_i , dei coseni direttori delle loro normali.

15 — Rappresentazione dello stato di tensione.

Posto il secondo membro della (34) uguale a zero, ossia:

$$(36) \quad \sum_{ik} \sigma_{ik} n_i n_k = 0 ,$$

si ottiene, in coordinate omogenee nella stella di rette di centro M , la equazione d'un cono quadrico col vertice in M , luogo delle normali agli elementi superficiali sui quali è nulla la tensione normale.

Assumendo provvisoriamente il riferimento agli assi di questo cono ed indicando con m_i i nuovi coseni direttori della normale n , con s_i le tensioni normali relative ai nuovi piani coordinati, l'equazione (36) viene ridotta alla forma canonica:

$$(36') \quad \sum_i s_i m_i^2 = 0 ,$$

la quale, come è noto, manca dei termini rettangolari, contenenti i prodotti $m_i m_k$ per $i \neq k$.

In conseguenza saranno nulle le componenti speciali di tensione s_{ik} con indici distinti, ossia le tensioni tangenziali, e le (31), applicate alla ricerca delle componenti q_i della tensione \mathbf{p}_n sull'elemento obliquo di normale $n(m_i)$, si semplificano nel nuovo riferimento nelle espressioni monomie:

$$(37) \quad q_i = m_i s_i .$$

Nell'ipotesi che la normale n sia una generatrice del cono definito dalla (36), sostituendo in questa ai coseni m_i le espressioni che si traggono dalla (37), si ottiene l'equazione:

$$(38) \quad \sum_i \frac{q_i^2}{s_i} = 0 ,$$

la quale, interpretandovi le q_i come coordinate di punti, rappresenta un secondo cono quadrico, col vertice sempre in M , involuppo degli elementi piani sui quali è nulla la tensione normale, cioè a dire dei piani ortogonali alle generatrici del primo cono e passanti per M .

Questo secondo cono è reale se una delle s_i ha segno opposto alle

altre due, nel quale caso divide lo spazio angolare intorno ad M in due regioni: gli elementi superficiali immersi in una di queste subiscono tutti tensioni di un segno (per esempio trazioni), gli elementi immersi nell'altra regione sopportano tutti tensioni di segno contrario (per esempio compressioni).

Il cono in discorso ha invece generatrici immaginarie se le tre s_i hanno il medesimo segno, giacchè non si può allora soddisfare alla (38) con valori reali diversi da zero delle componenti q_i . Ciò significa che gli elementi superficiali passanti per M sopportano tutti tensioni del medesimo segno.

Consideriamo ora quest'altra superficie:

$$(39) \quad \sum_i \frac{z_i^2}{s_i} = \pm 1 ,$$

scegliendovi il segno al secondo membro in modo che la superficie risulti reale in tutte le regioni dello spazio, cioè che sia sempre incontrata in due punti reali da una retta condotta per l'origine.

Se le tre s_i hanno il medesimo segno, ossia se il cono (38) è immaginario, attribuiremo tal segno anche alla costante, e l'equazione (39) rappresenterà un ellissoide. In caso contrario, ossia se il cono (38) è reale, prenderemo il segno positivo in una delle due regioni indicate, il segno negativo nell'altra, e si avrà in una regione un iperboloide ad una falda, nell'altra un iperboloide a due falde, aventi entrambi il cono (38) per cono asintotico.

In ogni caso la superficie che ne risulta viene denominata *superficie direttrice*, perchè basta conoscerla per determinare la direzione della tensione sopra un elemento piano generico.

Infatti se z_i sono le coordinate d'uno dei punti in cui il vettore tensione \mathbf{p}_n sopra un dato elemento di normale $n(m_i)$ incontra la superficie (39), k' un opportuno fattore di proporzionalità, si può scrivere:

$$z_i = k' q_i .$$

D'altra parte i coseni direttori ρ_i della normale alla detta superficie nel punto considerato sono proporzionali alle derivate parziali del primo membro della (39) rispetto alle coordinate; essendo k'' una costante opportuna, è in altri termini:

$$(40) \quad \rho_i = k'' \frac{z_i}{s_i} ,$$

o anche, sostituendo a z_i l'espressione trovata di sopra, e posto $k = k'k''$:

$$\rho_i = k \frac{q_i}{s_i} .$$

I coseni di direzione della normale alla (39) sono dunque proporzionali a quelli $m_i = \frac{q_i}{s_i}$ della normale n all'elemento, essendo $k = \frac{\rho_i}{m_i}$ il fattore di proporzionalità.

Segue da ciò che la normale all'elemento considerato e la normale

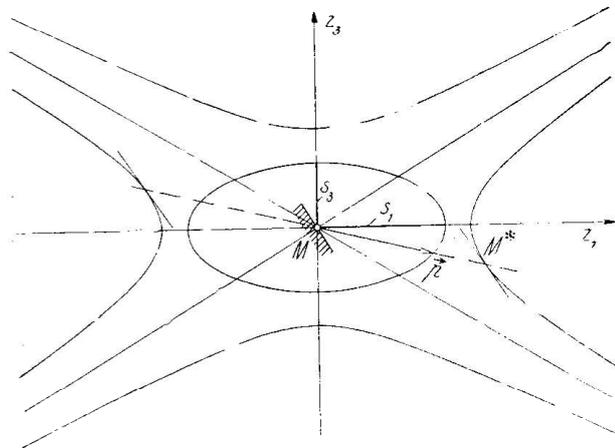


Fig. 10

alla superficie (39) nel punto in cui questa è incontrata dal vettore \mathbf{p}_n sono parallele. Risultando allora anche paralleli il piano dell'elemento e il piano tangente alla superficie direttrice nel punto M^* in cui questa è incontrata dal vettore \mathbf{p}_n , resta provato che il piano dell'elemento e la linea d'azione della tensione \mathbf{p}_n agente su di esso sono coniugati rispetto alla quadrica direttrice (fig. 10).

16 — Ellissoide delle tensioni. Tensioni principali.

Poichè rispetto alla nuova terna z_i di assi ortogonali i coseni direttori della normale all'elemento su cui si esercita la tensione $\mathbf{p}_n(q_i)$ hanno i valori dati dalle (37), segue immediatamente:

$$(41) \quad \sum_i \left(\frac{q_i}{s_i} \right)^2 = 1 .$$

Se interpretiamo ancora le q_i come coordinate di punti, la (41) è la equazione dell'*ellissoide di Lamé*, avente gli stessi assi z_i delle quadriche direttrici e semiassi uguali alle tensioni s_i (fig. 10). I valori assoluti delle tensioni $\mathbf{p}_n q_i$ nell'intorno del punto M , sugli elementi superficiali della stella di piani con centro in questo punto, variano dunque come i semidiametri d'un ellissoide, che pertanto costituisce il diagramma polare delle intensità dei vettori \mathbf{p}_n .

Le direzioni degli assi z_i diconsi *direzioni principali*: gli elementi superficiali ad esse ortogonali non sopportano tensioni tangenziali, ma esclusivamente le tensioni normali s_i . Queste ultime, in grado di estremo essendo misurate dai semiassi dell'ellissoide di Lamé, diconsi *tensioni principali*: esse sono una massima, una minima, una stazionaria.

Gli altri elementi sopportano in generale tensioni oblique. Dato il piano d'uno di essi, il diametro che gli è coniugato rispetto alla quadrica direttrice individua, come si è detto, la direzione della relativa tensione \mathbf{p}_n ; il segmento che su questa direzione taglia l'ellissoide di Lamé, ne fornisce l'intensità.

17 — Ricerca delle direzioni e delle tensioni principali.

Possiamo ricercare i valori massimi della tensione normale σ sopra un elemento obliquo al variarne della giacitura con lo stesso procedimento seguito per la ε nello studio della deformazione.

Resa omogenea la (34) scrivendola:

$$\Psi(n_i) = (\sigma_1 - \sigma) n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma) n_2^2 + (\sigma_3 - \sigma) n_3^2 + 2 n_1 n_2 \tau_{12} + 2 n_1 n_3 \tau_{13} + 2 n_2 n_3 \tau_{23} = 0,$$

uguagliamone a zero le derivate parziali prime ordinatamente rispetto ad n_1, n_2, n_3 ; avremo:

$$(42) \quad \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma) n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 &= 0, \\ \tau_{21} n_1 + (\sigma_2 - \sigma) n_2 + \tau_{23} n_3 &= 0, \\ \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 + (\sigma_3 - \sigma) n_3 &= 0. \end{aligned}$$

Poichè non possono essere nulli contemporaneamente tutti i coseni, dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$(43) \quad \begin{vmatrix} (\sigma_1 - \sigma) & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & (\sigma_2 - \sigma) & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & (\sigma_3 - \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

Le tre radici, necessariamente reali, di questa equazione cubica forniscono i valori s_i delle tensioni principali. Sostituendo poi ciascuno di questi valori nelle (42), risolvendo ogni volta il sistema e tenendo pre-

sente la condizione $\sum_i n_i^2 = 1$, si ottengono le tre terne di coseni che individuano le direzioni principali.

Se le tre radici sono distinte, a ciascuna di esse corrisponde una ed una sola terna n_i , ossia una direzione determinata. Se la (43) ha radici coincidenti, si verificano gli stessi casi d'indeterminazione che si hanno nella ricerca delle direzioni principali d'una quadrica.

Con due radici coincidenti, l'ellissoide di Lamé diventa un ellissoide di rotazione, talchè riescono indeterminate le due direzioni principali normali all'asse di simmetria. Se tutte le radici coincidono, l'ellissoide si trasforma in una sfera e rimangono indeterminate tutt'e tre le direzioni principali: su qualunque elemento piano si esercita cioè la stessa tensione, sempre diretta ortogonalmente all'elemento, come accade nei fluidi in riposo (principio di Pascal).

Diremo *spaziale* uno stato di tensione caratterizzato da tensioni principali tutte diverse da zero. Se una delle tre tensioni principali, per esempio la s_3 , è nulla, scelto uno degli assi di riferimento coincidente con z_3 , le componenti di tensione non nulle risultano al più:

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \tau_{12};$$

esse caratterizzano uno stato di tensione *biassiale* o *piano*, perchè le tensioni \mathbf{p} su *tutti* gli elementi per il punto sono contenute nel piano principale normale a z_3 : l'ellissoide di Lamé si riduce ad una ellisse contenuta in tale piano.

Diremo infine *monoassiale* uno stato di tensione caratterizzato da una sola tensione principale diversa da zero.

18 — Linee isostatiche.

Salvo i casi d'indeterminazione sopra esaminati, in ciascun punto del solido si possono individuare tre piani, tra loro ortogonali — *piani principali* — sui cui elementi superficiali, nell'intorno del punto considerato, agiscono esclusivamente tensioni normali.

Supposte messe in evidenza, in ciascun punto del corpo le tre direzioni principali, perpendicolari ai piani suddetti, inviluppano, per ragioni di continuità, tre famiglie di linee mutuamente ortogonali, le quali possono riguardarsi come linee di forza dei tre campi vettoriali costituiti dalle tensioni principali.

Esse prendono il nome di *linee isostatiche* o *traiettorie delle tensioni principali*.

Secondo queste linee la materia è semplicemente tesa o compressa, e le singole linee d'una stessa famiglia non trasmettendosi lateralmente alcuna azione, potrebbero immaginarsi isolate le une dalle altre senza che ne restasse alterato il regime degli sforzi nell'intero solido. Il materiale condensato lungo queste linee verrebbe allora a costituire una specie di tessuto fibroso, il cui comportamento rispetto alle azioni esterne sarebbe identico a quello proprio del corpo continuo.

Questa concezione teorica trova riscontro nella costituzione delle ossa del corpo umano. Il tessuto spugnoso che costituisce gli ingrossamenti terminali (*epifisi*) delle ossa lunghe ha infatti un'architettura informata all'andamento delle isostatiche. Si cita come esempio caratteristico quello della epifisi superiore del femore, le cui trabecole ossee, come ha rilevato un notevole studio comparativo del Culmann, presentano andamento sensibilmente concordante con le traiettorie delle tensioni principali. A questa circostanza si deve attribuire la grande resistenza che le ossa presentano alle sollecitazioni esterne, pur essendo esiguo il peso di materia resistente che le costituisce.

Lo stesso concetto trova applicazioni più o meno approssimate nella realizzazione di strutture reticolari o cellulari, con elementi esclusivamente tesi o compressi, e nella disposizione dei ferri delle strutture di cemento armato.

19 — Rappresentazione delle tensioni sugli elementi superficiali d'un fascio.

La rappresentazione spaziale dello stato di tensione mediante le superfici direttrici e l'ellissoide di Lamé è poco adatta alle applicazioni pratiche; più comoda è quella basata sui *circoli di Mohr*, la quale riduce al piano la rappresentazione degli sforzi, e più generalmente quella d'un tensore doppio simmetrico qualunque.

Vediamo dapprima come tale metodo si applichi al caso particolare in cui si tratti di rappresentare le tensioni sugli elementi piani d'un fascio avente come sostegno una delle direzioni principali in un dato punto M del corpo elastico.

Consideriamo un elemento superficiale per M appartenente al fascio di piani che ha per sostegno l'asse y_3 , che supporremo coincidente col l'asse principale z_3 (fig. 11).

Tenendo presente che la normale n all'elemento è anche normale al-

l'asse y_3 risultando in conseguenza $n_3 = 0$ ed osservando che $n_2^2 = 1 - n_1^2$, la (34) può scriversi:

$$(44) \quad \sigma = \sigma_2 + [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2\tau_{12} n_2] n_1.$$

Analogamente, la (35), applicata all'elemento superficiale in discorso, ove la retta v giaccia nel piano $y_1 y_2$, talchè sia $v_1 = -n_2$, $v_2 = n_1$, diviene:

$$(45) \quad \tau_{nv} = \tau_{12} - [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2\tau_{12} n_2] n_2.$$

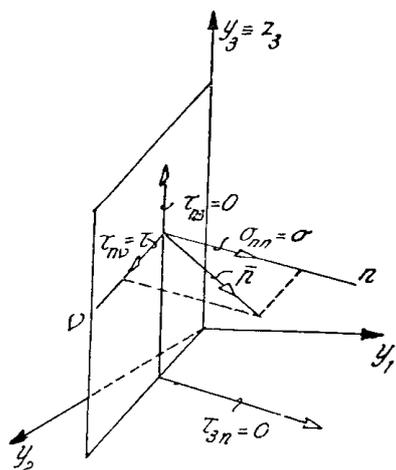


Fig. 11

Per brevità indicheremo semplicemente con τ questa tensione: essa spira ortogonalmente all'asse y_3 ed è *tutta* la tensione tangenziale agente sull'elemento considerato. Ammessa infatti l'esistenza d'una componente non nulla τ_{n3} diretta secondo z_3 , per la reciprocità delle tensioni tangenziali essa dovrebbe essere uguale alla sua coniugata τ_{3n} , la quale è nulla perchè il piano normale all'asse y_3 è, per ipotesi, principale.

Le tensioni σ e τ sono pertanto le sole componenti della tensione \mathbf{p} sull'elemento generico del fascio, e questa appartiene, come le sue componenti, al piano $y_1 y_2$ ortogonale a z_3 .

Le (44) e (45) si prestano alla seguente rappresentazione grafica della legge di variazione delle tensioni $\mathbf{p}(\sigma, \tau)$ sugli elementi superficiali del fascio considerato.

Assumiamo come asse delle σ un asse parallelo ad y_1 ed orientato nello stesso modo, come asse delle τ un asse parallelo ad y_2 , ma orientato in senso opposto

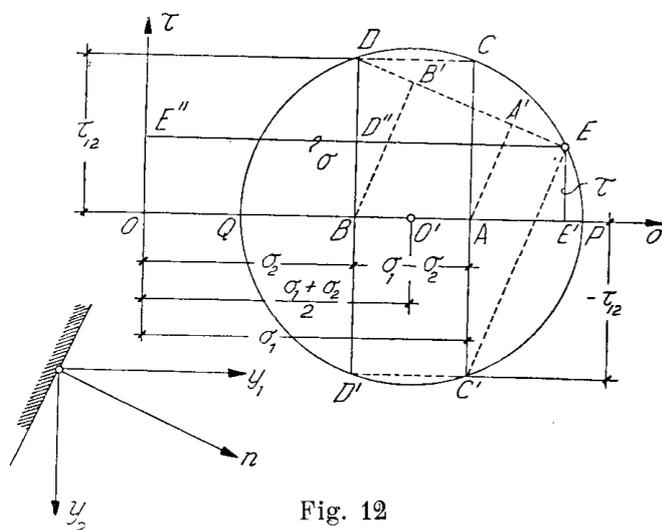


Fig. 12

(fig. 12). Siano C e D rispettivamente i punti di ascisse:

$$\overline{OA} = \sigma_1, \quad \overline{OB} = \sigma_2,$$

e di ordinate:

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \tau_{12}.$$

La circonferenza con centro nel punto medio O' del segmento \overline{AB} , di ascissa:

$$\overline{OO'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2},$$

e che passa per C , passerà evidentemente anche per D e per i punti D' e C' simmetrici dei punti C e D rispetto all'asse σ . Il suo raggio sarà:

$$r = \sqrt{\overline{O'A}^2 + \overline{AC}^2},$$

cioè:

$$r = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tau_{12}^2}.$$

Dimostreremo che la parallela alla traccia v dell'elemento superficiale appartenente ad un dato piano del fascio di sostegno z_3 , condotta dal punto C' , interseca la circonferenza in un punto E avente per coordinate le tensioni σ e τ agenti su quell'elemento.

Infatti, congiungendo E con D e proiettando su tale congiungente parallelamente alla EC' i punti A e B in A' e B' , risulta:

$$\overline{ED} = \overline{EA'} + \overline{A'B'} + \overline{B'D};$$

ma per essere D il simmetrico di C' rispetto a O' , la ED è perpendicolare alla EC' ; essa è quindi parallela alla normale all'elemento superficiale, ed ha, per conseguenza, rispetto agli assi σ e τ , gli stessi coseni direttori n_1 ed n_2 della normale medesima rispetto agli assi y_1 ed y_2 .

Potremo dunque scrivere:

$$\overline{ED} = \overline{AB} n_1 + (\overline{AC'} + \overline{BD}) n_2,$$

ovvero:

$$\overline{ED} = (\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2 \tau_{12} n_2;$$

inoltre:

$$\overline{ED}'' = \overline{ED} n_1 = [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2 \tau_{12} n_2] n_1,$$

$$\overline{DD}'' = \overline{ED} n_2 = [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2 \tau_{12} n_2] n_2.$$

Come avevamo affermato, tenute presenti le (44) e (45), è quindi:

$$\overline{E''E} = \overline{E''D''} + \overline{D''E} = \sigma_2 + [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2 \tau_{12} n_2] n_1 = \sigma,$$

$$\overline{EE'} = \overline{BD} - \overline{D''D} = \tau_{12} - [(\sigma_1 - \sigma_2) n_1 + 2 \tau_{12} n_2] n_2 = \tau.$$

Il punto E determina dunque le tensioni cercate; la circonferenza

sulla quale esso è collocato chiamasi *cerchio delle tensioni*. Il punto C' dal quale si debbono condurre le parallele alle traccie dei piani degli elementi superficiali per individuare il corrispondente punto E , costituisce il *polo della rappresentazione*: esso ha l'ordinata $-\tau_{i2}$ e l'ascissa uguale a quella delle due tensioni σ_1 o σ_2 parallelamente alla quale è stato scelto l'asse delle σ .

Dalla figura si rileva che la tensione normale varia tra un massimo \overline{OP} ed un minimo \overline{OQ} , essendo P e Q i punti in cui la circonferenza taglia l'asse delle σ ,

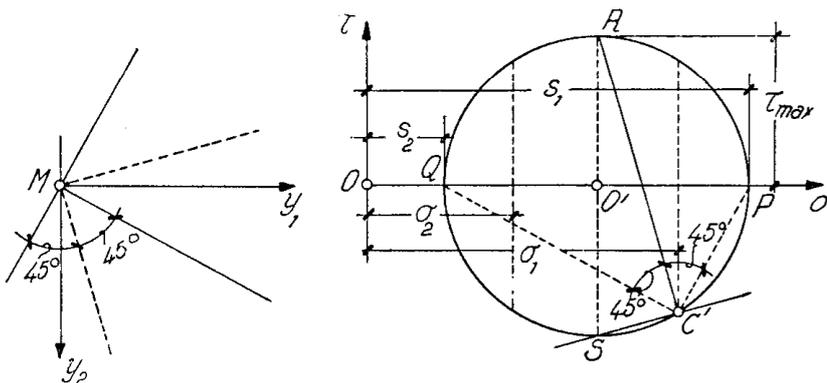


Fig. 13

mentre la componente tangenziale, perpendicolare all'asse del fascio, varia tra valori opposti, uguali entrambi in valore assoluto al raggio del cerchio.

I segmenti \overline{OP} ed \overline{OQ} (fig. 13) mi-

surano le tensioni principali s_1 ed s_2 che si sviluppano sugli elementi mutuamente ortogonali del fascio paralleli alle congiungenti $C'P$ e $C'Q$ e valgono:

$$(46) \quad \begin{cases} s_1 = \overline{OO'} + \overline{O'P} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_{i2}^2}, \\ s_2 = \overline{OO'} - \overline{O'Q} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_{i2}^2}. \end{cases}$$

Le tensioni tangenziali massime si esercitano invece sugli elementi, pure tra loro ortogonali, paralleli alle congiungenti il polo C' con gli estremi R ed S del diametro verticale del cerchio, ed il loro valore assoluto è uguale al raggio:

$$(47) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_{i2}^2}.$$

Poichè l'angolo $\widehat{QC'R}$ vale la metà dell'angolo $\widehat{QC'P}$, si può ancora dire che *gli elementi* (paralleli a $C'R$ e $C'S$) *sui quali agiscono le tensioni tangenziali massime sono inclinati a 45° sugli elementi* (paralleli a $C'P$ e $C'Q$) *sui quali agiscono le tensioni normali massime.*

20 — **Rappresentazione generale dello stato di tensione in un punto. I tre cerchi di Mohr.**

Col riferimento agli assi principali z_i nel punto M , la (34), esprime nel riferimento agli assi generici y_i la tensione normale sopra l'elemento definito dai coseni n_i della sua normale diviene:

$$(48) \quad \sigma = \sum_i s_i m_i^2,$$

essendo m_i i coseni direttori della normale stessa rispetto alla terna z_i .

Indicando poi con τ tutta la tensione tangenziale, ed applicando le (37), la tensione totale sull'elemento sarà:

$$(49) \quad p^2 = \sigma^2 + \tau^2 = \sum_i q_i^2 = \sum_i m_i^2 s_i^2.$$

Scriviamo per disteso le due espressioni precedenti ponendovi $m_3^2 = 1 - (m_1^2 + m_2^2)$:

$$\sigma = s_1 m_1^2 + s_2 m_2^2 + s_3 - s_3 (m_1^2 + m_2^2) = (s_1 - s_3) m_1^2 + (s_2 - s_3) m_2^2 + s_3,$$

$$\sigma^2 + \tau^2 = s_1^2 m_1^2 + s_2^2 m_2^2 + s_3^2 - s_3^2 (m_1^2 + m_2^2) = (s_1^2 - s_3^2) m_1^2 + (s_2^2 - s_3^2) m_2^2 + s_3^2,$$

e sottraiamo la prima dalla seconda dopo averla moltiplicata per $s_2 + s_3$; avremo:

$$\sigma^2 + \tau^2 - \sigma (s_2 + s_3) = (s_1 - s_3) (s_1 - s_2) m_1^2 - s_2 s_3,$$

la quale, introducendovi le costanti:

$$s_2 + s_3 = 2 a_1, \quad (s_1 - s_3) (s_1 - s_2) = b_1, \quad s_2 s_3 = c_1:$$

diviene:
$$\sigma^2 + \tau^2 - 2 a_1 \sigma = b_1 m_1^2 - c_1,$$

e infine sommando a_1^2 ad ambo i membri:

$$(\sigma - a_1)^2 + \tau^2 = a_1^2 + b_1 m_1^2 - c_1.$$

Se per un dato valore di m_1 interpretiamo σ e τ come coordinate ortogonali d'un punto (fig. 14), l'equazione precedente rappresenta la circonferenza di raggio:

$$(50) \quad r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1 m_1^2 - c_1}$$

e centro sull'asse σ , nel punto O_1 di ascissa:

$$(51) \quad a_1 = \frac{s_2 + s_3}{2}.$$

Posto $m_1 = \cos \alpha_1 = \text{costante}$, questa circonferenza è dunque il luogo dei punti che rappresentano le tensioni sugli elementi piani che inviluppano il cono rotondo di vertice M , asse z_1 ed apertura $90^\circ - \alpha_1$.

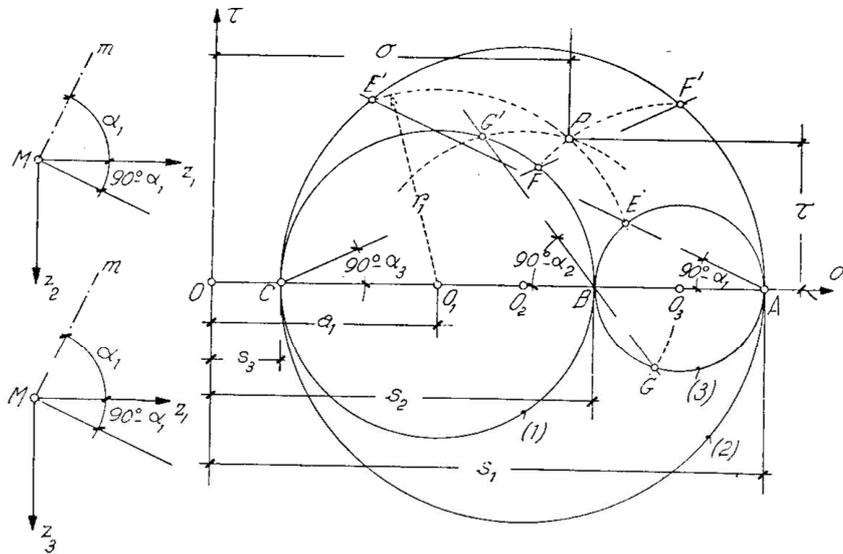


Fig. 14

che inviluppano il cono con vertice in M , asse z_2 ed apertura $90^\circ - \alpha_2$ è una circonferenza avente un certo raggio r_2 [definito da una relazione analoga alla (50)] e centro O_2 all'ascissa:

$$a_2 = \frac{s_1 + s_3}{2};$$

che per $m_2 = \cos \alpha_2 = \text{costante}$, il luogo dei punti rappresentativi delle tensioni sugli elementi tangenti al cono con vertice sempre in M , asse z_3 ed apertura $90^\circ - \alpha_3$ è una circonferenza avente un certo raggio r_3 e centro O_3 all'ascissa:

$$a_3 = \frac{s_1 + s_2}{2}.$$

Poichè l'elemento superficiale assegnato è contemporaneamente tangente ai tre coni ora definiti, il punto rappresentativo che cerchiamo dovrà essere comune ai tre cerchi ad essi relativi.

Potremmo tracciare tali cerchi dopo averne determinati i raggi mediante la (50) e le analoghe, ma vi riusciremo in modo più semplice.

Consideriamo all'uopo il primo cerchio, ed osserviamo che variando m_1 , ossia l'apertura $90^\circ - \alpha_1$ del cono inviluppo di asse z_1 , rimane invariato il centro O_1 definito dalla (51), mentre ne varia il raggio r_1 in dipendenza della (50). In particolare al valore $m_1 = 0$, ossia ad un'apertura

Con analogo ragionamento, sempre partendo dalle (48) e (49), si dimostra:

che per $m_2 = \cos \alpha_2 = \text{costante}$, il luogo dei punti rappresentativi delle tensioni sugli elementi

che inviluppano il cono con vertice sempre in M , asse z_3 ed apertura $90^\circ - \alpha_3$ è una circonferenza avente un certo raggio r_3 e centro O_3 all'ascissa:

ra nulla del cono involuppo, corrisponde il cerchio delle tensioni sugli elementi superficiali del fascio di sostegno z_1 , di raggio:

$$r'_1 = \frac{s_2 - s_3}{2}.$$

Tracciamo questo cerchio e gli altri due analoghi rappresentativi delle tensioni sugli elementi superficiali dei fasci di assi z_2 e z_3 , ed indichiamoli ordinatamente coi numeri 1, 2, 3. Guidando dal punto A , polo dei cerchi 2 e 3, una retta inclinata dell'angolo $90^\circ - \alpha_1$ all'asse delle σ , determineremo sui detti cerchi due punti E ed E' i quali rappresentano le tensioni sopra due elementi superficiali appartenenti il primo al fascio di sostegno z_3 , il secondo al fascio di sostegno z_2 , entrambi inclinati dell'angolo $90^\circ - \alpha_1$ all'asse z_1 . Ma questi elementi sono tangenti al primo dei coni sopra definiti: dunque il cerchio con centro in O_2 , corrispondente a questo cono, deve passare per E e per E' ; abbiamo cioè più di quanto basta ad individuarlo.

Similmente si dimostra che il cerchio di centro O_2 , relativo al secondo cono, passa per i punti G e G' dei cerchi 3 e 1, situati sulla retta per B inclinata all'asse delle σ dell'angolo $90^\circ - \alpha_2$; e che il cerchio con centro in O_3 , relativo al terzo cono, passa per i punti F ed F' dei cerchi 1 e 2, situati sulla retta per C inclinata all'asse delle σ dell'angolo $90^\circ - \alpha_3$.

Basta ovviamente tracciare due soli dei tre cerchi relativi ai coni definiti dai coseni direttori m_i , per individuare, nella loro intersezione P , il punto rappresentativo della tensione $\mathbf{p}(\sigma, \tau)$ sull'elemento assegnato.

Oltre al punto P i cerchi suddetti hanno a comune il punto simmetrico del precedente rispetto all'asse delle σ : la rappresentazione fornisce quindi le σ in valore e segno, le τ in valore assoluto.

Emerge ancora dalla costruzione che i punti P rappresentativi delle tensioni sugli elementi superficiali della stella per M sono tutti nella regione compresa — da una parte o dall'altra dell'asse delle σ indifferentemente — fra il maggiore dei cerchi e i due cerchi minori.

21 — Reazioni dei vincoli.

Diciamo che un punto M della superficie del solido possiede un *vincolo semplice*, se è obbligato a muoversi sopra una superficie priva di attrito e per conseguenza atta ad esercitare reazioni d'intensità e senso arbitrari, ma dirette esclusivamente secondo la sua normale.

Supporremo che i vincoli agiscano su porzioni finite della superficie

del solido; cosicchè essendo le reazioni ripartite su dette porzioni, diremo *reazioni in un punto* un vettore \mathbf{R} sempre normale alla superficie vincolante, e nel resto perfettamente analogo al vettore \mathbf{p} a suo tempo definito.

Siano:

$$f_s(y_i) = 0$$

le equazioni delle superfici di tre vincoli semplici imposti al punto M della superficie del solido, e siano λ_s tre coefficienti indeterminati dipendenti dai valori delle corrispondenti reazioni.

Le componenti secondo gli assi della reazione normale alla superficie $f_s(y_i) = 0$ potranno allora esprimersi nella forma:

$$\lambda_{sk} = \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k},$$

d'onde risultano proporzionali ai coseni direttori della normale medesima.

Le componenti della reazione totale nel punto vincolato sono pertanto:

$$(52) \quad R_k = \sum_s \lambda_{sk} = \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k}.$$

Consideriamo ora il determinante dei coefficienti delle (52):

$$\left\| \frac{\partial f_s}{\partial y_k} \right\|$$

ed osserviamo che esso può dedursi, scambiando le linee con le colonne, da quello (16) relativo alle equazioni di compatibilità.

Sappiamo già che possono verificarsi i casi seguenti:

il determinante è diverso da zero (punto fisso). I piani tangenti alle tre superfici sono allora distinti e non appartengono al medesimo fascio, quindi è anche escluso che le tre normali siano complanari. Per opportuni valori delle λ_s il vincolo può reagire secondo tutte le possibili direzioni (vincolo triplo);

il determinante ha caratteristica 2 (punto vincolato ad una linea fissa). I piani tangenti sono distinti, ma appartengono ad un medesimo fascio; le normali sono tutte nel piano per M normale all'asse del fascio. Comunque variino le λ_s il vincolo non può fornire reazioni che nel piano normale alla linea di vincolo (vincolo doppio);

il determinante ha caratteristica 1 (punto vincolato ad una superficie fissa). I tre piani tangenti coincidono e così pure le normali. Variando

comunque le λ_s , il vincolo non può reagire che secondo la normale alla superficie vincolante (vincolo semplice);

il determinante ha caratteristica zero (punto libero). Comunque variino le λ_s , le R_k sono nulle e quindi anche la reazione è nulla (assenza di vincolo).

22 — Condizioni d'equilibrio di un solido elastico.

Le equazioni di Cauchy (28) costituiscono le condizioni d'equilibrio per un punto generico interno al solido elastico; le equazioni ai limiti (32) esprimono le analoghe condizioni per un punto generico della superficie. Se esse sono soddisfatte in tutti i punti del solido, questo si troverà in equilibrio; e poichè è certamente in equilibrio il sistema delle forze interne, dovrà pure sussistere l'equilibrio fra tutte le forze esterne: forze esplicite e reazioni dei vincoli.

Osservando che nei punti interni agiscono le forze di massa, di componenti Y_i per unità di volume, e che nei punti della superficie agiscono le forze di componenti $F_i + R_i$ per unità di area, l'equilibrio alla traslazione secondo i tre assi ed alla rotazione intorno agli assi medesimi conduce alle sei equazioni:

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_V Y_i dV + \int_S (F_i + R_i) dS = 0 \\ \int_V (Y_i y_k - Y_k y_i) dV + \int_S [(F_i + R_i) y_k - (F_k + R_k) y_i] dS = 0 \end{array} \right.$$

nelle quali gl'integrali di volume sono estesi a tutto il volume, gli integrali superficiali a tutta la superficie del solido.

Le equazioni ora scritte, le quali erano già implicite nelle (28) e (32), sono le stesse che impongono l'equilibrio ad un corpo rigido. Esse devono anche essere verificate per l'equilibrio d'un sistema elastico; sono cioè necessarie. Può darsi che esse bastino a determinare le reazioni dei vincoli suscitate dalle forze attive, ed allora le reazioni sono staticamente determinate. In generale esse non sono sufficienti; le reazioni dei vincoli sono allora staticamente indeterminate.