

CAPITOLO II

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

1 — Deformazione dell'intorno infinitesimo d'un punto.

La configurazione C dei punti M d'un solido elastico, riferito alla terna trirettangola $O(y_i)$ ($i=1,2,3$) ⁽¹⁾, passi, quando si attribuisca ad ogni punto uno spostamento \mathbf{v} , alla configurazione $C+dC$ dei punti $M+\mathbf{v}$, infinitamente prossima a quella iniziale. Le componenti v_i del vettore \mathbf{v} siano perciò quantità infinitesime: le supporremo funzioni del punto M continue, monodrome e derivabili quanto occorre, in particolare dotate di derivate prime a loro volta continue e infinitesime tutte dello stesso ordine.

Le componenti dello spostamento d'un punto $M+\delta M=M(y_i+\delta y_i)$ appartenente alla configurazione C dell'intorno del punto $M(y_i)$, a meno d'infinitesimi di ordine superiore rispetto a quello tra i δy_i che sia eventualmente di ordine minore, potranno allora scriversi:

$$v_i(M+\delta M) = v_i(M) + \sum_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right)_M \delta y_k .$$

Da queste, dette η_i le coordinate dei punti nella configurazione $C+dC$, e osservando che è:

$$v_i(M+\delta M) - v_i(M) = (\eta_i + \delta \eta_i) - (y_i + \delta y_i) - (\eta_i - y_i) ,$$

si trae:

$$(1) \quad \delta \eta_i = \delta y_i + \sum_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right)_M \delta y_k .$$

⁽¹⁾ - Indicheremo di regola le coordinate con y_1, y_2, y_3 , anzichè, come d'uso corrente, con x, y, z ; parimenti gli indici $1, 2, 3$, serviranno a designare le componenti d'un vettore secondo i tre assi; gli indici i, k, j, h , ecc., si intende assumano sempre i valori $1, 2, 3$.

La dipendenza lineare delle $\delta\eta_i$ dalle δy_i espressa da queste relazioni mostra che la deformazione dell'intorno infinitesimo del generico punto M è un'omografia affine, cioè un'operazione che trasforma una figura qualsiasi in una figura affine. In quell'intorno un elemento rettilineo si conserverà tale nella deformazione, un elemento piano rimarrà piano, una sfera infinitesima si muterà in un ellissoide, elementi rettilinei e piani inizialmente paralleli si trasformeranno in elementi rettilinei e piani pure paralleli.

Ciò posto, per formarci un'idea chiara della deformazione, è sufficiente studiare come si deforma un parallelepipedo elementare i cui spigoli siano orientati parallelamente agli assi coordinati; anzi, poichè gli spigoli del parallelepipedo dovranno rimanere rettilinei e le faccie piane e parallele, basterà determinare le alterazioni di lunghezza degli spigoli e degli angoli formati dagli spigoli stessi.

2 — Tensore di deformazione.

Consideriamo spiccati da M due elementi lineari $\delta s, \Delta s$, definiti in direzione, rispettivamente, dalle terne dei coseni:

$$n_i = \frac{\delta y_i}{\delta s} \quad , \quad v_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta s}$$

e comprendenti l'angolo ϑ notoriamente legato ai coseni precedenti dalla relazione:

$$\cos \vartheta = \sum_i n_i v_i = \sum_i \frac{\delta y_i}{\delta s} \frac{\Delta y_i}{\Delta s} .$$

Scriviamo quest'ultima nella forma:

$$\delta s \Delta s \cos \vartheta = \sum \delta y_i \Delta y_i$$

ed esprimiamo, differenziando, la variazione che i due membri subiscono quando si passa dalla configurazione C a quella $C + dC$ caratterizzata dagli spostamenti v ; avremo:

$$[\delta s d(\Delta s) + \Delta s d(\delta s)] \cos \vartheta - \delta s \Delta s \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta = \sum_i [\delta y_i d(\Delta y_i) + \Delta y_i d(\delta y_i)] .$$

Tenuto presente che, in virtù della (1), è:

$$d(\delta y_i) = \delta(d y_i) = \delta v_i = \sum_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right) \delta y_k$$

e analogamente:

$$d(\Delta y_i) = \Delta(dy_i) = \Delta v_i = \sum_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right) \Delta y_k,$$

la variazione del secondo membro può scriversi successivamente:

$$\sum_i \delta y_i \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \Delta y_k + \sum_i \Delta y_i \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \delta y_k = \sum_{ik} \delta y_i \Delta y_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \sum_{ik} \Delta y_i \delta y_k \frac{\partial v_i}{\partial y_k},$$

e ancora, scambiando gl'indici nell'ultima sommatoria:

$$\sum_{ik} \delta y_i \Delta y_k \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right).$$

Dividendo ambo i membri per il prodotto $\delta s \Delta s$, avremo:

$$\left[\frac{d(\Delta s)}{\Delta s} + \frac{d(\delta s)}{\delta s} \right] \cos \vartheta - \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta = \sum_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right) n_i v_k,$$

e infine colle posizioni:

$$(2) \quad \frac{d(\Delta s)}{\Delta s} = \varepsilon_v, \quad \frac{d(\delta s)}{\delta s} = \varepsilon_n,$$

$$(3) \quad -d\vartheta = \gamma_{nv},$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right) = \varepsilon_{ik},$$

anche:

$$(5) \quad (\varepsilon_n + \varepsilon_v) \cos \vartheta + \gamma_{nv} \operatorname{sen} \vartheta = 2 \sum_{ik} \varepsilon_{ik} n_i v_k.$$

Daremo ad ε_n il nome di *coefficiente di dilatazione lineare dell'elemento* δs ; ε_v sarà allora lo stesso coefficiente per l'elemento Δs ; la variazione $-d\vartheta = \gamma_{nv}$ subita dall'angolo ϑ formato dai due elementi la diremo *scorrimento mutuo* secondo le direzioni n, v .

Le quantità ε_{ik} sono le nove componenti cartesiane — di cui però soltanto sei distinte, perchè come si rileva dalla (4), è $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ — di un *ten-*

sore doppio simmetrico ⁽⁴⁾: un ente il quale, come ora vedremo, caratterizza completamente la deformazione del solido nel passaggio dalla configurazione C a quella $C + dC$, e che perciò dicesi *tensore di deformazione*.

Poniamo $\mathfrak{S} = 0$, facciamo in altri termini coincidere i due elementi; dalla (5) si trae allora:

$$(6) \quad \varepsilon_n = \sum_{ik} \varepsilon_{ik} n_i n_k :$$

si prova così che *il coefficiente di dilatazione lineare d'un elemento uscente dal punto generico M è funzione lineare ed omogenea delle componenti del tensore di deformazione in quel punto e funzione quadratica ed omogenea dei coseni direttori dell'elemento*.

Posto invece $\mathfrak{S} = \pi/2$, scelti cioè due elementi fra loro ortogonali, la (5) prende la forma:

$$(7) \quad -d\mathfrak{S} = \gamma_{nv} = 2 \sum \varepsilon_{ik} n_i v_k ,$$

la quale dichiara che *lo scorrimento mutuo di due elementi fra loro ortogonali uscenti dal punto generico M è funzione lineare delle componenti del tensore di deformazione in quel punto e funzione bilineare dei coseni direttori degli elementi*.

Dalla (6), scritta per l'elemento parallelo all'asse y_i , cioè per $n_i = 1$ e gli altri coseni nulli, si ottiene poi:

$$(8) \quad \varepsilon_n = \varepsilon_i = \varepsilon_{ii} ;$$

cioè: le componenti del tensore di deformazione caratterizzate da indici

(4) - Un tensore n^{plo} dipende da 3^n parametri che possiamo pensare ciascuno caratterizzato da un gruppo di n indici, tanti quante sono le disposizioni con ripetizione degli indici 1, 2, 3, ad n ad n .

Si può riguardare una grandezza scalare come un tensore di ordine zero ($n = 0$), un vettore come un tensore semplice ($n = 1$). Il tensore di deformazione, che dipende da nove parametri, è un tensore doppio ($n = 2$).

Se dei 3^n parametri d'un tensore n^{plo} risultano identici quelli che differiscono soltanto per l'ordine degli indici, il tensore dicesi simmetrico; in tal caso i suoi parametri distinti sono nel numero delle combinazioni con ripetizione ad n ad n degli indici 1, 2, 3:

$$\left(\frac{n+2}{n} \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} .$$

Il tensore di deformazione è appunto un tensore doppio simmetrico; le sue componenti distinte si riducono perciò a sei.

uguali sono i coefficienti di dilatazione lineare degli elementi orientati parallelamente agli assi coordinati.

Infine scrivendo la (7) per l'elemento δs parallelo all'asse y_i e per quello Δs parallelo all'asse y_k , ponendovi cioè $n_i = 1$, $v_k = 1$ e annullandovi gli altri coseni, si ottiene:

$$(8) \quad \gamma_{nv} = \gamma_{ik} = 2 \varepsilon_{ik},$$

la quale mostra che le componenti del tensore di deformazione caratterizzate da indici distinti valgono la metà degli scorrimenti mutui dei tre elementi paralleli agli assi coordinati, presi due a due.

3 — Condizioni per il moto rigido.

Se il corpo elastico si muove rigidamente, il coefficiente di dilatazione lineare ε_n deve essere nullo in ogni suo punto, per qualunque direzione n ; in virtù della (6) dovranno allora annullarsi tutte le componenti del tensore di deformazione. Dalle (4) si traggono dunque le:

$$(10) \quad \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} = 0$$

come condizioni necessarie per la rigidità del moto.

Inversamente, se le (10) sono ovunque soddisfatte, per le (6) e le (7) devono essere nulle le dilatazioni ε_n in tutte le direzioni, e gli scorrimenti γ_{nv} per qualsiasi coppia di direzioni; restano cioè invariate tutte le distanze e tutti gli angoli. Ciò significa che il corpo non si deforma, e perciò il suo movimento non può essere che rigido.

* * *

Possiamo ora dimostrare che due deformazioni caratterizzate dagli stessi valori delle componenti di deformazione in tutti i punti del sistema non differiscono che per un moto rigido del corpo.

Siano infatti v'_i e v''_i le componenti di spostamento corrispondenti rispettivamente alla prima e alla seconda deformazione. Per ipotesi le ε_{ik} in ciascun punto abbiano valori uguali per entrambe le deformazioni; sia in altri termini:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial y_i} = \frac{\partial v''_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v''_k}{\partial y_i}.$$

Se consideriamo gli spostamenti $v_i = v'_i - v''_i$, risulta evidentemente:

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} = 0;$$

ma queste sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè gli spostamenti v_i caratterizzino un movimento rigido; si deve dunque poter passare dalla configurazione deformata corrispondente al primo sistema di spostamenti a quella relativa al secondo mediante un semplice moto rigido del solido.

Una deformazione è perciò pienamente determinata quando si conoscano le componenti del tensore di deformazione in ogni punto del corpo.

4 — Equazioni di congruenza.

Ci domandiamo ora se, inversamente, a sei funzioni ε_{ik} dalle coordinate assegnate ad arbitrio corrisponda una deformazione possibile del solido; se, in altri termini, esistano tre funzioni v_i dalle quali le ε_{ik} assegnate scendano secondo le (4).

È facile dimostrare che l'arbitrarietà di scelta delle funzioni è limitata da certe relazioni tra le componenti di deformazione, relazioni che sono implicite nelle (4) e che possono rendersi esplicite eliminandovi le v_i per derivazione.

Consideriamo infatti due delle tre componenti che si ottengono dalle (4) ponendovi $i = k$, per esempio $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$ ed $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2$, e deriviamo ciascuna di esse due volte rispetto alla variabile che compare nell'altra come indice; sommando e tenendo presente l'espressione di γ_{12} , si avrà:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial y_1 \partial y_2};$$

due altre analoghe relazioni si ottengono mediante permutazioni circolari degli indici.

Deriviamo ora le tre delle (4) che si ottengono per $i \neq k$, dapprima ciascuna rispetto alla variabile che non compare nella sua espressione,

quindi tutte rispetto ad una delle variabili scelta ad arbitrio, per esempio la y_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial y_1 \partial y_3} &= \frac{\partial^3 v_1}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} + \frac{\partial^3 v_2}{\partial y_1^2 \partial y_3}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{\partial^3 v_1}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial y_1^2 \partial y_2}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial^3 v_2}{\partial y_1^2 \partial y_3} + \frac{\partial^3 v_3}{\partial y_1^2 \partial y_2};\end{aligned}$$

sottraendo la terza dalla somma delle prime due e tenendo presente la derivata di ϵ_1 rispetto ad y_2 e y_3 , si ottiene:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial y_1 \partial y_3} + \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial y_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial y_1^2} = 2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y_3} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_1}{\partial y_2 \partial y_3}.$$

Anche qui permutando circolarmente gli indici possono dedursi altre due relazioni analoghe a questa.

Per l'esistenza delle v_i le funzioni ϵ_{ik} prescelte devono dunque soddisfare alle sei equazioni differenziali (11) ora ricavate; esse sono *necessarie* affinché le deformazioni dei singoli elementi siano conciliabili tra loro, cioè individuino nel loro complesso una *deformazione continua* dell'intero sistema, intendendo come tale una deformazione realizzabile senza rotture nè compenetrazioni di materia.

Si potrebbe anche dimostrare che se il corpo è del tutto libero nello spazio, cioè non soggetto a vincoli, le (11) sono anche *sufficienti* per l'esistenza delle v_i .

Le (11) vengono dette *equazioni di congruenza* o di *De Saint-Venant*, e vien detto *congruente* ogni sistema di componenti di deformazione che le soddisfi.

Naturalmente nell'intorno d'un punto generico M del corpo, *supposto isolato ed indipendente dalla rimanente porzione di solido*, nulla vieta di assumere una sestupla comunque arbitraria di valori ϵ_{ik} come componenti d'una deformazione effettivamente realizzabile dell'intorno medesimo; le (11) esprimono semplicemente la *condizione di vincolo interno* costituito dalla supposta continuità del solido: esse debbono essere verificate affinché la deformazione possa realizzarsi senza distruggere la compagine del solido, ossia senza soluzioni di continuità o sovrapposizione di materia.

5 — Equazioni di vincolo.

Nella generalità dei casi i solidi elastici dei quali ci occuperemo non sono liberi nello spazio, ma soggetti a vincoli che ne limitano non solo la mobilità, ma anche la deformabilità. Causa questi legami, può darsi che gli spostamenti v_i corrispondenti ad un dato sistema congruente di componenti di deformazione conduca ad una configurazione del solido non compatibile coi vincoli ad esso imposti.

Perchè la deformazione possa dirsi effettivamente realizzabile non basta pertanto che le componenti di deformazione soddisfino alle condizioni di congruenza, ma occorre altresì che il corrispondente sistema delle v_i soddisfi a certe altre condizioni dipendenti dalla natura dei vincoli, cui daremo il nome di *equazioni di compatibilità o di vincolo*.

Per precisare la forma di queste equazioni, osserviamo che i vincoli possono ridursi ai seguenti tipi caratteristici:

- punto fisso,*
- punto obbligato a muoversi lungo una linea fissa,*
- punto obbligato a muoversi sopra una superficie fissa.*

Se $f_i(y_i) = 0$ è l'equazione d'una superficie sulla quale sia obbligato a muoversi un dato punto del solido, essa dovrà essere verificata non solo dalle coordinate y_i del punto nella sua posizione iniziale, ma anche da quelle $y_i + v_i$ del punto stesso a deformazione avvenuta; dovrà quindi essere $f_i(y_i + v_i) = 0$.

Se si esclude che la superficie data presenti punti singolari nell'intorno del punto considerato, sviluppando in serie di Taylor ed arrestando lo sviluppo ai termini del primo grado, la seconda di dette condizioni diviene:

$$(12) \quad f_i(y_i + v_i) = f_i(y_i) + \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} v_k = 0,$$

da cui, per la prima:

$$(13) \quad \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} v_k = 0,$$

che è l'equazione cui devono soddisfare le componenti di spostamento del punto vincolato alla superficie assegnata.

Se il vincolo è costituito da una linea, questa potrà riguardarsi come intersezione di due superficie:

$$f_1(y_i) = 0 \quad , \quad f_2(y_i) = 0.$$

Il punto, vincolato a mantenersi contemporaneamente sulle due superfici, dovrà avere componenti di spostamento soddisfacenti ad entrambe le equazioni:

$$(14) \quad \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial y_k} v_k = 0 \quad , \quad \sum_k \frac{\partial f_2}{\partial y_k} v_k = 0 \quad ,$$

Se infine il punto è fisso, potrà riguardarsi come vincolato a tre superfici distinte:

$$f_s(y_i) = 0 \quad ,$$

passanti per esso; le componenti di spostamento del punto dovranno soddisfare contemporaneamente alle equazioni:

$$(15) \quad \sum_k \frac{\partial f_s}{\partial y_k} v_k = 0 \quad .$$

In generale, supposte definite per ogni punto del corpo tre funzioni regolari:

$$f_s(y_i) = 0 \quad ,$$

tutte le condizioni di vincolo ed anche l'assenza di vincolo si possono esprimere mediante il sistema (15), cui può darsi la forma vettoriale:

$$\mathbf{v} \text{ grad } f_s = 0 \quad .$$

Considerando infatti il determinante:

$$(16) \quad \left\| \frac{\partial f_s}{\partial y_k} \right\|$$

possono presentarsi i casi seguenti:

il determinante è diverso da zero: le tre equazioni non ammettono che la soluzione $v_k = 0$; i piani tangenti alle tre superfici nel punto assegnato sono distinti e non appartengono ad un fascio: il punto dovrà cioè considerarsi come fisso, ossia con grado di libertà uguale a zero;

il determinante ha caratteristica 2: il sistema si riduce a due sole equazioni indipendenti; i tre piani tangenti appartengono ad un fascio, ossia hanno una retta comune: il punto è obbligato a muoversi lungo una linea fissa;

il determinante ha caratteristica 1: il sistema si riduce ad un'unica equazione come la (13), in altri termini, nel punto considerato le tre superfici ammettono un unico piano tangente: il punto è obbligato a muoversi sopra una superficie fissa;

il determinante ha caratteristica zero: tutti i suoi termini sono nulli e le (15) sono soddisfatte da qualsiasi sistema di valori v_i : il punto è libero, cioè non soggetto ad alcuna specie di vincolo.

6 — Quadriche delle dilatazioni. Cono di scorrimento.

Sopra ogni direzione n uscente dal punto generico M del corpo elastico si fissi un punto N tale che:

$$(17) \quad |N - M| = \frac{1}{\sqrt{\pm \epsilon_n}},$$

scegliendo sotto il radicale il segno positivo o quello negativo secondochè ϵ_n sia rispettivamente positivo o negativo.

Per trovare il luogo dei punti N , diciamo x_i gli assi paralleli a quelli di riferimento y_i passanti per M ; le coordinate di M rispetto a questo nuovo riferimento essendo:

$$x_i = |N - M| n_i = \frac{n_i}{\sqrt{\pm \epsilon_n}},$$

si ricava:

$$n_i = x_i \sqrt{\pm \epsilon_n}.$$

Sostituendo queste espressioni dei coseni direttori nella (6), questa diviene:

$$(18) \quad \sum_{ik} \epsilon_{ik} x_i x_k = \pm 1;$$

il luogo cercato è dunque la coppia di quadriche rappresentata dalla (18), che diconsi *quadriche della dilatazione*.

Se le dilatazioni sono tutte del medesimo segno, a secondo membro della (18) dovremo scegliere lo stesso segno, e la corrispondente quadrica è un ellissoide reale; la quadrica corrispondente al segno opposto è un ellissoide immaginario, per noi privo d'interesse.

Se le ϵ_n sono in parte positive, in parte negative, per ragioni di continuità, esse saranno nulle per certe direzioni il cui luogo è il cono quadratico:

$$(19) \quad \sum_{ik} \epsilon_{ik} x_i x_k = 0,$$

il quale separa gli elementi uscenti da M in due classi: quelli di una classe si allungano tutti, gli altri si accorciano tutti. Esso chiamasi *cono*

di scorrimento, perchè gli elementi adagiati sulle sue generatrici non subiscono dilatazioni, ma soltanto scorrimenti; ed è cono asintotico comune alle due quadriche definite dalla (18), l'una corrispondente al segno positivo, l'altra al segno negativo del secondo membro, che si riconoscono per due iperboloidi, l'uno ad una falda, l'altro a due falde.

La (17) risolta rispetto ad ε_n fornisce:

$$(20) \quad \varepsilon_n = \pm \frac{1}{|N - M|^2} :$$

note le quadriche della dilatazione, il coefficiente di dilatazione relativo ad una direzione assegnata è dunque misurato dall'inverso del quadrato del corrispondente raggio della quadrica; il segno è sempre positivo o sempre negativo se la quadrica è un ellissoide; se si hanno due quadriche distinte, il segno è definito dalla quadrica che il raggio attraversa.

7 — Direzioni e dilatazioni principali.

Abbiamo detto che la deformazione dell'intorno piccolissimo d'un punto M generico del solido elastico è un'omografia affine. In conseguenza una sfera elementare con centro in M sarà trasformata in un ellissoide con centro in M' , che diremo *ellissoide della deformazione nel punto M* . Un raggio qualsiasi MA della sfera subirà una certa dilatazione lineare ε_a e si porterà sul corrispondente semidiametro dell'ellissoide. Ogni terna di elementi lineari coniugati, e quindi ortogonali, della sfera si trasformerà in una terna di semidiametri coniugati dell'ellissoide; in particolare gli elementi mutuamente ortogonali d'una certa terna della sfera si trasformeranno nei tre semiassi dell'ellissoide, rimanendo perciò ortogonali. Ma è noto che fra i semidiametri d'un ellissoide i semiassi sono in grado di massimo o minimo o hanno semplicemente variazione prima nulla rispetto alla direzione; si può quindi affermare che *per gli elementi lineari mutuamente ortogonali d'una certa terna, la dilatazione è massima, minima o stazionaria*.

Chiameremo *dilatazioni principali* i valori del coefficiente di dilatazione lineare per questi elementi, *direzioni principali* le direzioni degli elementi medesimi. Secondo una coppia qualunque di tali direzioni è ovviamente nullo lo scorrimento mutuo.

Osservando che è $\sum_i n_i^2 = 1$, la (6) può scriversi:

$$(21) \quad \Psi(n_i) = (\varepsilon_1 - \varepsilon) n_1^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon) n_2^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon) n_3^2 + \gamma_{12} n_1 n_2 + \gamma_{13} n_1 n_3 + \gamma_{23} n_2 n_3 = 0 .$$

Resa così l'equazione omogenea, la ricerca dei massimi e minimi di ε può effettuarsi uguagliando a zero le derivate parziali di ε rispetto ad n_i eseguite come se queste variabili fossero tra loro indipendenti; si ottiene così il seguente sistema di equazioni lineari omogenee:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Psi}{\partial n_1} = 2(\varepsilon_1 - \varepsilon)n_1 + \gamma_{12}n_2 + \gamma_{13}n_3 = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n_2} = \gamma_{12}n_1 + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon)n_2 + \gamma_{23}n_3 = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n_3} = \gamma_{13}n_1 + \gamma_{23}n_2 + 2(\varepsilon_3 - \varepsilon)n_3 = 0. \end{array} \right.$$

Dato che i coseni direttori n_i non possono essere tutti nulli contemporaneamente, perchè siano soddisfatte le (22) dovrà essere:

$$(23) \quad \left| \begin{array}{ccc} 2(\varepsilon_1 - \varepsilon) & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{12} & 2(\varepsilon_2 - \varepsilon) & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & 2(\varepsilon_3 - \varepsilon) \end{array} \right| = 0.$$

La (23) è un'equazione cubica in ε , la stessa trovata da Laplace in ricerche di meccanica celeste e conosciuta sotto il nome di *equazione secolare*; si dimostra che essa, avendo coefficienti reali, ammette tre radici e_1, e_2, e_3 , pure reali, le quali nel problema che qui interessa sono i valori delle dilatazioni principali.

Sostituendo nelle (22) successivamente e_1, e_2, e_3 , associando al sistema ogni volta la condizione $\sum_i n_i^2 = 1$ e risolvendo, otteniamo tre terne di coseni n_i le quali individuano le tre direzioni principali.

Se due o tutte e tre le radici dell'equazione cubica coincidono, effettuata la sostituzione anzidetta, la caratteristica del determinante risulta rispettivamente uguale ad 1 oppure a zero; due delle direzioni principali o tutte e tre rimangono allora indeterminate: nel primo caso l'ellissoide di deformazione è un ellissoide di rotazione, nel secondo una sfera.

Se le tre radici sono distinte, secondo due delle tre direzioni principali la dilatazione assume il valore massimo ed il valore minimo; nella terza direzione non è nè massima nè minima, ma semplicemente con variazione prima nulla, o come suol dirsi, *stazionaria*.

8 — Dilatazione cubica.

Indichiamo con δV il volume occupato nella configurazione C da una massa elementare, intorno del punto generico M del solido elastico, con

$d(\delta V)$ la variazione del volume stesso nel passaggio alla configurazione $C + dC$, ossia nella deformazione.

Diremo *coefficiente di dilatazione cubica nel punto M* il rapporto:

$$(24) \quad \Theta = \frac{d(\delta V)}{\delta V}$$

fra la variazione subita dal volume d'un elemento infinitesimo, intorno del punto M , ed il volume primitivo.

Al fine di determinare questo coefficiente consideriamo nell'interno del solido una massa finita di volume V limitata da una superficie S . A deformazione avvenuta, la stessa massa occupi il volume V' limitato da una superficie S' infinitamente vicina ad S .

Se un punto A di S si porta in A' su S' (fig. 3), l'intorno dS di A , trasferendosi nell'intorno dS' di A' , genererà un volume uguale al prodotto dS per la proiezione $v = \overline{AA'}$ sulla normale v a dS . Detti n_i i coseni direttori di questa normale considerata rivolta verso l'interno di V , e dette v_i le componenti dello spostamento secondo gli assi di riferimento, detta proiezione sarà:

$$\sum_i v_i n_i,$$

ed il volume generato, ove si riguardino positive le dilatazioni, negative le contrazioni:

$$- dS \sum_i v_i n_i.$$

La totale dilatazione della massa di volume V sarà allora:

$$- \int_S (\sum_i v_i n_i) dS,$$

ovvero, trasformando con la formula di Gauss l'integrale superficiale in integrale di volume:

$$\int_V \left(\sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right) dV.$$

Ma tenendo presente la (24), la totale dilatazione cercata è anche espressa dall'integrale:

$$\int_V \Theta dV;$$

sarà quindi:

$$\int_V \left[\Theta - \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right] dV = 0;$$

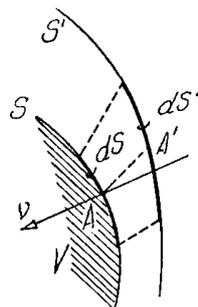


Fig. 3

e quest'integrale sarà nullo non solo se considerato esteso a tutto il solido, ma anche se limitato ad una porzione qualsiasi di esso.

Ora perchè ciò sia possibile, deve annullarsi la funzione integranda, essere cioè ovunque:

$$(25) \quad \Theta = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i};$$

infatti se la differenza

$$\Theta - \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial y_i}$$

fosse diversa da zero in un certo punto M , per ragioni di continuità essa dovrebbe rimaner tale e sempre del medesimo segno in un certo intorno di M . In conseguenza non potrebbe risultare nullo il suo integrale esteso a quell'intorno.

Con riguardo alle (4), la (25) può scriversi:

$$(26) \quad \Theta = \sum_i \varepsilon_i.$$

o anche, ricordando la definizione di divergenza d'un vettore:

$$\Theta = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Poichè non si è fatta alcuna ipotesi circa la scelta della terna di riferimento, la (26) sarà anche valida per qualunque terna trirettangola di direzioni; è noto d'altronde il carattere invariante della divergenza di un vettore rispetto a differenti sistemi di riferimento.

In conclusione possiamo affermare che la *somma dei coefficienti di dilatazione lineare relativi ad una terna arbitraria di elementi mutuamente ortogonali uscenti da un punto è costante e misura il coefficiente di dilatazione cubica in quel punto.*