

Per stati di tensioni monoassiali, come quelli relativi alla forza normale ed alla flessione pura, è semplicemente:

$$(404) \quad \sigma'_{id} = \sigma' \leq k' \quad , \quad |\sigma''_{id}| = |\sigma''| \leq k'' .$$

Per gli stati di tensione definiti da una tensione tangenziale  $\tau$ , come nella sollecitazione a torsione semplice, valgono le condizioni:

$$(405) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \left| \pm \frac{m+1}{m} \tau \right| \leq \left. \begin{array}{l} k' \\ k'' \end{array} \right\} ;$$

alle quali si sostituiscono di regola le altre:

$$(405') \quad |\pm \tau| \leq \left\{ \begin{array}{l} \frac{m}{m+1} k' , \\ \frac{m}{m+1} k'' , \end{array} \right.$$

Nell'ipotesi di materiale ugualmente resistente a trazione e compressione ( $k' = k'' = k$ ), ci si riferisce ad un *carico di sicurezza a tensione tangenziale o al taglio*:

$$(406) \quad t = \frac{m}{m+1} k ;$$

le (405) si riducono allora nell'unica condizione:

$$(407) \quad \tau \leq t .$$

Per  $m = 10/3$ , come può ammettersi per l'acciaio, è:

$$(406') \quad t = 0,67 k ;$$

per gli altri materiali da costruzione, ritenendo  $m = 4$ , avremo invece:

$$(408'') \quad t = \frac{4}{5} k .$$

Per gli stati di tensione piani definiti da una tensione normale  $\sigma$  ed una tangenziale  $\tau$  le condizioni di stabilità sono:

$$(408) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \left| \frac{m-1}{2m} \sigma \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right| \leq \left. \begin{array}{l} k' \\ k'' \end{array} \right\} .$$

Esse si applicano:

a) nella sollecitazione di flessione e taglio, quando si presumano nella sezione tensioni ideali in valore assoluto più elevate di quelle corrispondenti alle tensioni massime ai lembi ed all'asse neutro (notoriamente dovute rispettivamente alla sola flessione ed al solo taglio) e pertanto la verifica di stabilità non possa essere eseguita, mediante le (404) e (405), separatamente per le due sollecitazioni. Ciò potrebbe per esempio occorrere per una sezione come quella della fig. 123: se il taglio è grande rispetto al momento flettente, le tensioni ideali in corrispondenza delle corde  $ab$ ,  $a'b'$ , possono superare sia quelle relative ai lembi, dovute alla sola flessione, sia

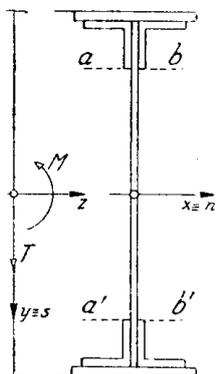


Fig. 123

quella sull'asse neutro, dovuta al solo taglio.

In casi più complessi la ricerca dei punti maggiormente cimentati può richiedere la costruzione dei diagrammi delle tensioni ideali, come è stato fatto in fig. 124:

b) nella sollecitazione di forza normale e torsione. Nel caso di una sezione circolare conviene esprimerle in funzione della sollecitazione; con riguardo alle (358) avremo:

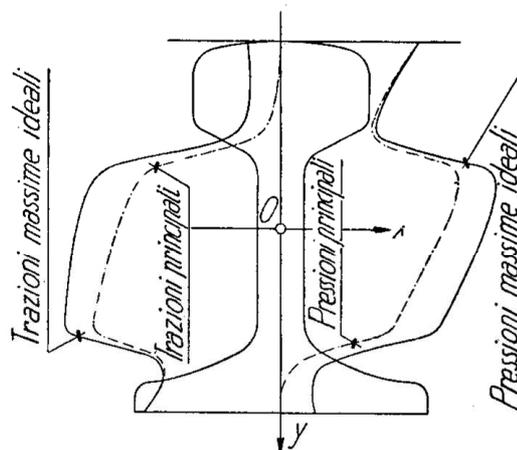


Fig. 124

$$(409) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \frac{N}{\pi r^2} \left[ \frac{m-1}{2m} \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{1 + \left( \frac{4M_0}{Nr} \right)^2} \right] \leq \left\{ \begin{array}{l} k' \\ k'' \end{array} \right. ;$$

e per  $m = 10/3$ ,  $k' = k'' = k$ :

$$(409') \quad \max \sigma_{id} = \frac{N}{\pi r^2} \left[ 0,35 + 0,65 \sqrt{1 + \left( \frac{4M_0}{Nr} \right)^2} \right] \leq k .$$

Analogamente per la sezione anulare limitata dalle circonferenze di raggi  $r$  ed  $r_1 = r\varphi$  ( $\varphi < 1$ ), si ottiene:

$$(410) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{array} \right\} = \frac{N}{\pi r^2(1-\varphi^2)} \left[ \frac{m-1}{2m} \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{1 + \left( \frac{4M_0}{Nr(1+\varphi^2)} \right)^2} \right] \leq \left\{ \begin{array}{l} k' \\ k'' \end{array} \right. ,$$

e per  $m = 10/3$ ,  $k' = k'' = k$ :

$$(411) \quad \max \sigma_{id} = \frac{N}{\pi r^2 (1 - \varphi^2)} \left[ 0,35 + 0,65 \sqrt{1 + \left( \frac{4 M_o}{N (1 + \varphi^2)} \right)^2} \right] \leq k ;$$

c) nella sollecitazione di taglio, flessione e torsione, per i punti soggetti alla massima tensione normale ed alla tangenziale simultanea (flessione e torsione; punti *C* e *D* della figura 93). Supposto ancora  $m = 10/3$ ,  $k' = k'' = k$ , avremo:

$$\max \sigma_{id} = 0,35 \sigma + 0,65 \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \leq k ;$$

esprimendo le tensioni in funzione delle caratteristiche della sollecitazione secondo le (361) e (362), è ancora:

$$(412) \quad \max \sigma_{id} = \frac{r}{J} \left( 0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + M_o^2} \right) \leq k ;$$

con la posizione:

$$(413) \quad M_i = 0,35 M + 0,65 \sqrt{M^2 + M_o^2} ,$$

si ottiene infine:

$$(414) \quad \max \sigma_{id} = \frac{M_i}{W} \leq k ,$$

dove è da porre  $W = \frac{\pi r^3}{4}$  e  $W = \frac{\pi r^3}{4} (1 - \varphi^4)$  rispettivamente per sezione circolare e per sezione anulare.

La verifica può quindi eseguirsi con la stessa equazione di sicurezza della flessione, purchè si consideri la sezione cimentata dal momento ideale espresso dalla (413). Occorre inoltre verificare, mediante la (405), la tensione tangenziale massima (taglio e torsione; punti *A* e *B* della figura 93). Avuto riguardo alle (363) nonchè alle ipotesi fatte circa  $m$  ed il carico di sicurezza, si tratta cioè di soddisfare alle condizioni:

per la sezione circolare:

$$(415) \quad \tau^2 = \frac{2}{\pi r^3} \left( \frac{2}{3} Tr + M_o \right) \leq 0,77 k ,$$

per la sezione anulare:

$$(415') \quad \tau = \frac{2}{\pi r^3 (1 - \varphi^4)} \left( \frac{2}{3} Tr \frac{1 - \varphi^3}{1 - \varphi} + M_o \right) \leq 0,77 k .$$

d) nella sollecitazione di forza normale, flessione e taglio.

In generale per gli stati di tensione piani definiti da due tensioni normali  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e dalla tensione tangenziale  $\tau_{xy}$ , avremo:

$$(416) \quad \left. \begin{matrix} \sigma'_{id} \\ \sigma''_{id} \end{matrix} \right\} = \left| \frac{m-1}{2m}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{m+1}{2m} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right| \cong \begin{cases} k' \\ k'' \end{cases} .$$

Infine per uno stato generico di tensione, definito dalle tensioni principali  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , le condizioni di sicurezza si applicano nella forma:

$$(417) \quad \sigma'_{id} = s_1 - \frac{s_2 + s_3}{m} \leq k' \quad , \quad \sigma''_{id} = \left| s_3 - \frac{s_1 + s_2}{m} \right| \leq k'' .$$

\* \* \*

L'altro problema, di stabilire cioè le dimensioni di una struttura note che siano le azioni sollecitanti, può essere talvolta risoluto direttamente, nel senso che assegnate talune dimensioni in base a criteri costruttivi, si possono desumere le altre dalle *equazioni di sicurezza*.

$$(418) \quad \sigma'_{id} = k' \quad , \quad | \sigma''_{id} | = k'' ,$$

dopo aver espresso le tensioni ideali in funzione delle dimensioni incognite; il più delle volte la soluzione diretta è però eccessivamente laboriosa o impossibile. Si procede allora indirettamente effettuando il preventivo dimensionamento completo della struttura e facendo seguire successive verifiche di sicurezza; dai risultati, secondochè denotino difetto o eccesso di sicurezza, si trae norma ogni volta per stabilire le dimensioni che serviranno di base al tentativo seguente. Il metodo si arresta a quella approssimazione che dà una verifica soddisfacente delle condizioni di stabilità.

## 120. — Fenomeni di fatica.

Abbiamo considerato fin qui *sollecitazioni statiche*, dovute cioè all'azione di carichi costanti o variabili con legge continua ed abbastanza lenta. Vogliamo ora prendere in esame il comportamento dei materiali alle rapide oscillazioni del carico, quali hanno luogo negli organi di macchine ed in molte costruzioni. L'argomento è di primaria importanza perchè questa

specie di sollecitazione dà luogo a rotture sotto tensioni limiti inferiori, e talora anche di molto, alle resistenze statiche. Cedimenti di questo genere si verificano spesso nei più svariati organi resistenti: assi ferroviari, steli di stantuffi e di valvole, molle, alberi e dischi di turbine, ecc. La grande maggioranza delle rotture di parti di macchine si può attribuire ai *fenomeni di fatica* conseguenti alle rapide variazioni degli sforzi.

La fig. 125 riproduce lo schema di uno dei dispositivi più semplici adatti a studiare questi fenomeni in laboratorio. Lo sforzo di trazione variabile viene comunicato alla provetta *S* da un sistema di leve *L, L'*, azionato da un meccanismo ad eccentrico *M*; l'altra estremità del saggio è collegata ad un dinamometro a molla *D*.

A differenza di quelle cui danno luogo le sollecitazioni statiche, le rotture si producono qui senza deformazioni permanenti apprezzabili. Le superfici di separazione vi presentano due zone ben distinte: l'una d'aspetto vellutato ed opaco, che costituisce propriamente la zona di rottura per fatica, l'altra, a grana cristallina più o meno evidente e d'aspetto fibroso corrispondente alla zona del distacco istantaneo finale.

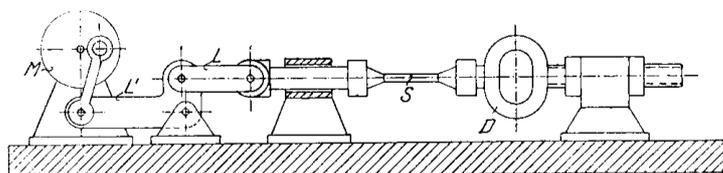


Fig. 125

L'origine della rottura sembra risiedere in ogni caso in una minuscola soluzione di continuità la quale si estenda progressivamente, fino a ridurre la sezione resistente a tal segno, che la rottura si completi poi in modo istantaneo. Quest'ipotesi spiegherebbe la presenza, che spesso si riscontra sulla prima delle zone suaccennate, sia di striature diramantesi da punti difettosi, sia di regioni lisce il cui logorio si determinerebbe col prolungato sfregamento delle due superfici.

L'origine della rottura sembra risiedere in ogni caso in una minuscola soluzione di continuità la quale si estenda progressivamente, fino a ridurre la sezione resistente a tal segno, che la rottura si completi poi in modo istantaneo. Quest'ipotesi spiegherebbe la presenza, che spesso si riscontra sulla prima delle zone suaccennate, sia di striature diramantesi da punti difettosi, sia di regioni lisce il cui logorio si determinerebbe col prolungato sfregamento delle due superfici.

Il comportamento dei materiali alla fatica dipende da numerosi fattori. Influiscono anzitutto le modalità di applicazione degli sforzi: frequenza delle ripetizioni, avvicinarsi dei periodi di sollecitazione a quelli di riposo, brusche variazioni degli sforzi. Molta importanza hanno inoltre la forma dei pezzi, la presenza d'intagli, fori, filettature e in generale di tutte le variazioni brusche di sezione, specie in quei materiali le cui fibre, aventi un orientamento ben definito come nei metalli laminati, risultano troncate dalle suddette irregolarità. Influiscono ancora lo stato ed il tipo delle superfici dei pezzi: è ben noto, per esempio, ai costruttori di macchine, che gli organi presentano maggior resistenza alle

azioni di fatica se hanno superfici lavorate anzichè grezze; ciò che è stato spiegato con l'ipotesi che la rottura prenda origine da un'irregolarità superficiale. Notevole influenza esercitano infine la temperatura e le azioni chimiche.

\* \* \*

Le prime conoscenze sull'argomento furono tratte dalle estese ed accurate esperienze del Wohler, le quali si concretarono nella enunciazione delle seguenti quattro leggi:

*sollecitando un corpo con azioni ripetute, la rottura può aver luogo per tensioni inferiori alla resistenza statica;*

*il numero di sollecitazioni necessarie per produrre la rottura è tanto più grande quanto minore è la tensione più elevata  $\sigma_s$  a parità di tensione più bassa  $\sigma_i$ , e quanto maggiore è la tensione più bassa a parità di tensione più elevata (fig 126);*

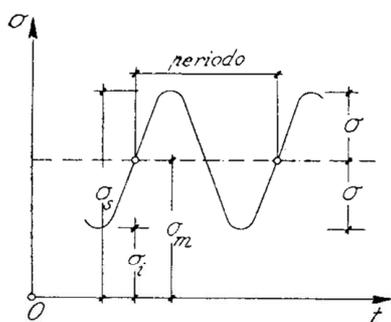


Fig. 126

*la tensione può oscillare indefinitamente fra zero ed un massimo senza produrre la rottura, purchè questo massimo resti inferiore ad un certo limite  $\sigma_0$  (resistenza originaria);*

*la tensione può oscillare indefinitamente fra due limiti uguali e di segno opposto senza produrre la rottura, purchè entrambi questi limiti siano inferiori, in valore assoluto, ad un certo limite  $\sigma_1 < \sigma_0$  (resistenza a forze invertite).*

Validi contributi all'analisi dei fenomeni di fatica hanno apportato lo Spangenberg e soprattutto il Bauschinger.

Quest'ultimo, sperimentando su acciaio a basso tenore di carbonio, ha dimostrato:

che la tensione può oscillare indefinitamente fra limiti di ugual segno, purchè entrambi inferiori al limite di snervamento; e ciò perchè la ripetizione dello sforzo eleva il limite d'elasticità originario al disopra del limite superiore  $\sigma_s$  dello sforzo variabile, sicchè, dopo un certo numero di ripetizioni, la deformazione permanente diviene stazionaria ed il processo ulteriore si svolge nel campo delle deformazioni elastiche: il lavoro speso nella fase di carico viene ogni volta restituito allo scarico;

che se, per sforzo variabile fra limiti di segno opposto, la tensione massima (minima) oltrepassa il limite d'elasticità di trazione (compres-

sione), si abbassa il limite d'elasticità di compressione (trazione); supposto poi abbassato uno di tali limiti in seguito a superamento del limite di segno opposto, esso può essere nuovamente elevato ampliando gradualmente l'oscillazione dello sforzo, questo innalzamento non potendo tuttavia superare un certo limite che il Bauschinger ritiene coincidente col limite d'elasticità spettante al materiale non assoggettato a precedenti sollecitazioni nè ad alcuna specie di lavorazione, ed al quale egli diede il nome di *limite d'elasticità naturale*. Entro i limiti d'elasticità naturali di trazione e di compressione la tensione potrebbe oscillare indefinitamente senza produrre rotture.

Il progresso più notevole sull'argomento è stato compiuto in tempi recenti, grazie allo studio dei cicli d'isteresi elastica dei materiali.

Già abbiamo visto che i materiali assoggettati a sforzi variabili eccedenti il carico di snervamento presentano un ritardo della deformazione sullo sforzo. Ora le esperienze di Bairstow hanno mostrato che nei cicli d'isteresi le linee di scarico  $FG$  ed  $HE$  hanno andamento sensibilmente rettilineo e parallelo alla originaria linea delle deformazioni elastiche (figura 127). L'ampiezza  $EG$  del ciclo cresce bensì con lo sforzo minimo, ma al crescere del numero d'inversioni d'un dato scarto di tensione  $\pm \sigma$ , tende ad un limite oltre il quale rimane stazionaria anche se l'oscillazione viene ampliata fino a raggiungere i limiti della resistenza a forze invertite.

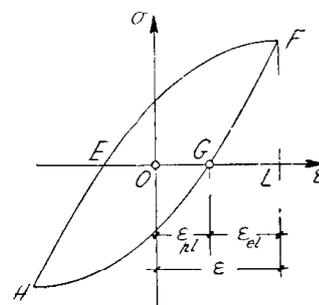


Fig. 127

Questi risultati, mentre confermano pienamente le conclusioni del Bauschinger, mostrano la dipendenza dell'ampiezza dei cicli d'isteresi dalle proprietà elastiche dei materiali; l'ampiezza  $\overline{EG}$  del ciclo sarebbe infatti uguale alla totale dilatazione corrispondente al passaggio da  $E$  ad  $F$  diminuita della dilatazione elastica  $\epsilon_{el} = \overline{LG}$ .

Notevole fra le varie teorie avanzate per spiegare il meccanismo di rottura per fatica è quella basata sull'*ipotesi dello smorzamento*, secondo cui ogni materiale avrebbe la capacità di dissipare una determinata quantità d'energia, esaurita la quale si produrrebbe la rottura.

L'esperienza non pare confermi però tale ipotesi; il Föppl avrebbe anzi provato potersi ritenere illimitata la capacità dei materiali di dissipare l'energia loro comunicata allorchè vengono assoggettati a sollecitazioni ripetute. Le ricerche più recenti hanno tuttavia messa in evidenza l'importanza, dal punto di vista della fatica, della densità d'energia dis-

ripata in un sol ciclo dello sforzo. A tale grandezza, misurata dall'area del ciclo, si dà il nome di *smorzamento del materiale*, perchè per un sistema in vibrazione smorzata, cui cioè non si comunichi nè si sottragga energia dall'esterno, l'area suddetta misura appunto l'energia propria dissipata nel corrispondente periodo.

Lo smorzamento dipende principalmente dall'ampiezza dei cicli, dalla temperatura e dalle modalità di sollecitazione, in modo del tutto secondario dal numero dei cicli di sforzo cui il materiale venne precedentemente assoggettato. Per molti metalli esso cresce sensibilmente fino ad un certo numero di cicli ( $2 \div 10$  milioni), poi diviene stazionario con le condizioni di sollecitazione.

Secondo Föppl i metalli si comportano in modo nettamente diverso a seconda del loro smorzamento. Il duralluminio, per esempio presenta uno smorzamento lento, cioè a dire ad ogni oscillazione assorbe una quantità d'energia relativamente piccolo; l'acciaio dolce è invece caratterizzato da uno smorzamento rapido. I materiali a smorzamento elevato dimostrano miglior comportamento alla fatica e sono anche più adatti a sopportare il tormento causato da certi fenomeni di risonanza cui taluni organi vanno soggetti in determinate condizioni di servizio (velocità critiche).

Le caratteristiche in base alle quali vengono usualmente qualificati i materiali sono, come sappiamo, la resistenza statica e l'allungamento di rottura; da quest'ultimo si suole giudicare la fragilità del materiale. Osserva però il Föppl che occorre distinguere la fragilità statica da quella dinamica. Della prima si può giudicare in base all'allungamento di rottura: diremo, per esempio, fragile un acciaio con  $\sigma_R = 160 \text{ kg/mm}^2$  e  $\delta = 2 \%$ , tenace una lega leggera con  $\sigma_R = 25 \text{ kg/mm}^2$  e  $\delta = 26 \div 20 \%$ , oppure un acciaio con  $\sigma_R = 50 \text{ kg/mm}^2$  e  $\delta = 22 \%$ . Una buona tenacità statica desunta da un elevato allungamento di rottura, è un elemento importante per quei materiali destinati alla formazione di parti la cui rottura non debba temersi per azioni di fatica, e ciò anche quando la sollecitazione venisse ad agire, una volta tanto, dinamicamente. Per esempio, un involucro gusciforme di acciaio temperato si romperebbe cadendo da una certa altezza, mentre, se fosse di acciaio dolce, riporterebbe soltanto un'ammaccatura, nella formazione della quale verrebbe assorbita pressochè tutta la forza viva di caduta. Diverso è il caso se devono prevedersi azioni ripetute; allora il giudizio sulle qualità del materiale non può scaturire che da grandezze dinamiche: all'allungamento di rottura corrisponde lo smorzamento, alla resistenza statica fa riscontro la resi-

*stenza al lavoro*, quella cioè che il materiale presenta per quel dato scarto di tensione.

Lo smorzamento dipende sostanzialmente dalla parte plastica della deformazione, la quale, contrariamente a quanto si riscontra nelle prove statiche, è di regola più piccola della quota elastica. Quando la deformazione plastica sia contenuta entro un limite determinato, il ciclo di deformazione si stabilizza ben presto, e può ripetersi indefinitamente; la deformazione plastica agisce in tal caso provvidamente, in quanto promuove un livellamento degli sforzi laddove questi, per difetti dei pezzi, irregolarità superficiali o bruschi cambiamenti di sezione, tendessero ad accrescersi oltre un certo limite. Quando invece la quota plastica si accresce col numero dei cicli fino a prevalere sulla parte elastica, la rottura si raggiunge rapidamente.

\* \* \*

Chiameremo *limiti di fatica* i valori estremi  $\sigma_i^*$ ,  $\sigma_s^*$ , che la tensione oscillante intorno ad una data media  $\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_i + \sigma_s)$  può raggiungere senza pericolo di rottura.

Supposti determinati sperimentalmente tali limiti per un numero sufficientemente grande di valori  $\sigma_m$  e portati come ordinate in corrispondenza di ascisse che misurino le corrispondenti tensioni medie, si ottiene un diagramma di forma simile a quella del ciclo d'isteresi (figura 128).

È evidente che le ordinate estreme del diagramma misurano le resistenze statiche  $\sigma_R$  (di trazione l'una, di compressione l'altra), che le ordinate dei punti in cui il diagramma taglia l'asse della  $\sigma_m$  misurano le resistenze originarie  $\sigma_o$  (di trazione o di compressione), che infine, le ordinate dei punti in cui il diagramma taglia l'asse delle ordinate misurano la resistenza a forze invertite  $\sigma_I$ .

Se poi la scala delle tensioni è unica per la  $\sigma^*$  e per le  $\sigma_m$ , la retta per l'origine inclinata di  $45^\circ$  all'asse delle  $\sigma_m$  ha per ordinate le stesse tensioni medie; sicchè i due rami di curva che limitano il diagramma sono equidistanti da essa.

Il diagramma ora descritto può essere utilizzato per dare all'organo

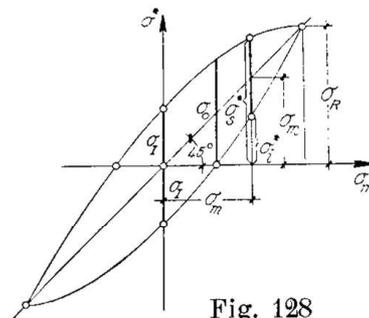


Fig. 128

in progetto dimensioni tali da consentirgli di sopportare indefinitamente, col voluto grado di sicurezza, lo sforzo variabile al quale sarà assoggettato in servizio.

Intanto se, come di regola, si vogliono evitare deformazioni perma-

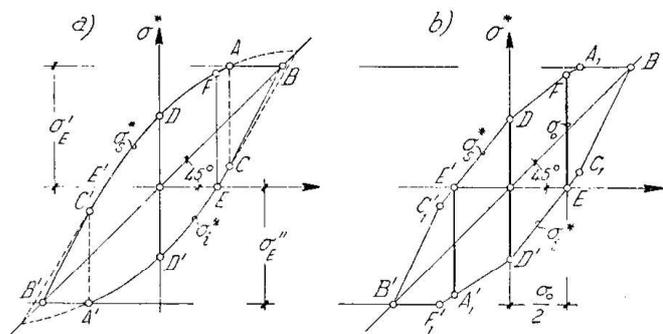


Fig. 129

menti, dovremo escludere dal diagramma le zone cui corrispondono tensioni superiori ai limiti di elasticità. A tale scopo, tracciate le rette  $\sigma = \sigma'_E$   $\sigma = \sigma''_E$  (fig. 129, a), limiteremo il diagramma con i segmenti  $AB$  e  $A'B'$  di esse ( $B$  e  $B'$  punti d'incontro con la retta a  $45^\circ$  rappresentativa delle tensioni medie) e lo

completeremo congiungendo  $B$  e  $B'$  con i punti  $C$  e  $C'$  situati sulle ordinate per  $A$  e  $A'$ .

Al diagramma reale può sostituirsi con grandissima approssimazione un diagramma di forma ottagonale, al cui tracciamento basta la conoscenza delle due resistenze originarie, della resistenza a forze invertite e dei due limiti d'elasticità. Si portino all'uso nel semipiano delle  $\sigma_m$  positive (fig. 129, b) rispettivamente alle ascisse  $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_m = \frac{\sigma_o}{2}$ , le ordinate  $\sigma_I = \overline{OD} = \overline{OD'}$ ,  $\sigma_o = \overline{EF}$ ; e quindi si sostituiscano:

al tratto curvilineo  $DFA$  della fig. 129, a quello rettilineo  $DA_t$ , essendo  $A_t$  (in generale pochissimo discosto da  $A$ ) il punto in cui la corda  $DF$  della curva suddetta incontra la retta  $\sigma = \sigma_E$ ;

al tratto curvilineo  $D'EC$  del diagramma reale, il tratto rettilineo  $D'C_t$ , essendo  $C_t$ , (in generale pochissimo discosto da  $C$ ) il punto in cui la corda  $D'E$  incontra l'ordinata per  $A_t$ ;

ai tratti  $AB$  e  $BC$  i tratti  $A_tB$  e  $BC_t$ . In modo analogo si operi nel semipiano delle  $\sigma_m$  negative.

È facile persuadersi delle modalità con cui viene utilizzato il diagramma onde giudicare se uno sforzo variabile sia pericoloso o meno. Assegnati i limiti  $\sigma_i$  e  $\sigma_s$  della tensione, si calcoli la tensione media  $\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_s)$ , la quale dovrà anzitutto essere compresa fra i due limiti d'elasticità di trazione e di compressione, soddisfare cioè alle condizioni:

$$(419) \quad \sigma'_E \leq \sigma_m \leq \sigma''_E;$$

portate quindi sull'ordinata corrispondente alla detta tensione media le tensioni estreme  $\sigma_i$  e  $\sigma_s$  (fig. 130 i corrispondenti punti rappresentativi  $I$  e  $S$  dovranno esser compresi fra i punti  $I^*$  ed  $S^*$  che rappresentano i limiti di fatica  $\sigma_i^*$  e  $\sigma_s^*$  relativi alla tensione media  $\sigma_m$ .

In pratica, rispetto ai limiti di fatica, come per le sollecitazioni statiche, viene prescritto un certo grado di sicurezza l'opportunità del quale, oltre che dalle circostanze a suo tempo precisate, è giustificata dal fatto che le esperienze di laboratorio sulle quali si basa il tracciamento dei diagrammi, vengono eseguite in condizioni particolarmente favorevoli. Le prove si conducono infatti su saggi allestiti con una precisione che ben raramente viene raggiunta nelle ordinarie lavorazioni; si tratta poi in generale di provette relativamente

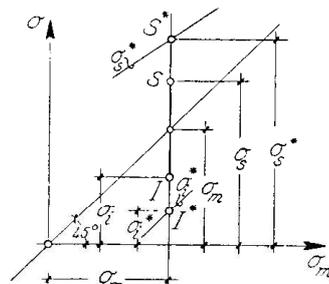


Fig. 130

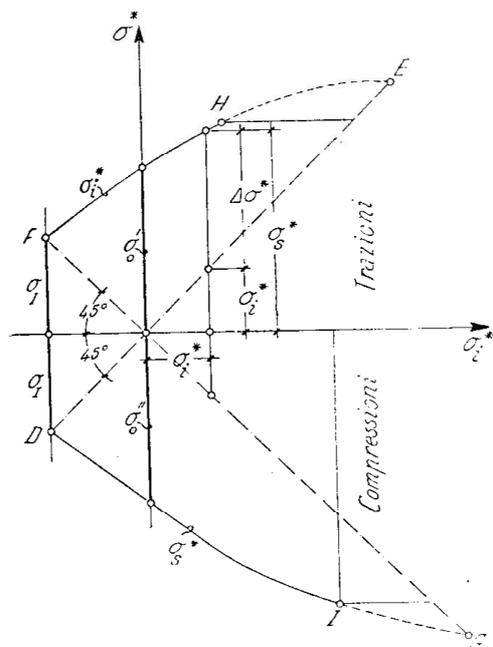


Fig. 131

piccole, e l'esperienza dimostra che la resistenza alla fatica diminuisce al crescere delle dimensioni; infine, i risultati delle prove di laboratorio prescindono dall'influenza, notoriamente dannosa, esercitata dai bruschi cambiamenti di sezione e dagli indebolimenti spesso inevitabili negli organi resistenti.

Detto  $\nu$  il coefficiente di sicurezza, converrà allora sostituire al diagramma dei limiti di fatica quello dei carichi di sicurezza:

$$(420) \quad \begin{cases} k_s = \sigma_m \frac{\sigma_s^* - \sigma_m}{\nu} , \\ k_i = \sigma_m \frac{\sigma_i^* - \sigma_m}{\nu} , \end{cases}$$

che si ottiene dal primo dividendone per  $\nu$  le ordinate contate a partire dalla retta delle tensioni medie  $\sigma_m$ .

\* \* \*

Altri preferiscono rappresentare i limiti di fatica col diagramma di Weyrauch, il quale ha per ascisse i limiti inferiori  $\sigma_i^*$ , per ordinate i limiti superiori  $\sigma_s^*$  (fig. 131). Il semipiano delle  $\sigma_i^*$  positive corrisponde alle

sollecitazioni variabili entro limiti del medesimo segno: positive nel quadrante superiore (trazioni), negative in quello inferiore (compressioni); il semipiano delle  $\sigma_i^*$  negative corrisponde alle sollecitazioni variabili fra limiti di segno opposto. Le ordinate della porzione di diagramma situata al disopra della retta  $DE$ , che biseca il quadrante dagli assi positivi, valutate a partire da tale retta, misurano ovviamente l'ampiezza d'oscillazione limite  $\Delta\sigma^*$  quando lo sforzo varia fra un minimo  $\sigma_i^*$  ed un *massimo*  $\sigma_s$  di trazione; altrettanto può dirsi della retta  $FG$  nel caso che la tensione oscilli tra un minimo  $\sigma_i^*$  ed un *massimo*  $\sigma_s$  di compressione. Il diagramma è limitato superiormente ed inferiormente delle rette  $\sigma_s^* = \sigma'_E$ ,  $\sigma_s^* = \sigma''_E$  corrispondenti ai due limiti d'elasticità di trazione e di compressione.

\* \* \*

Al procedimento sopra spiegato si preferisce spesso un metodo spedativo basato sulla *formula di Launhardt-Weyrauch*:

$$(421) \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R \left( 1 \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right),$$

nella quale si concretarono le prime esperienze di Wöhler. In essa esprimono:

$\sigma_{\min}$  e  $\sigma_{\max}$ , le tensioni *numericamente* minima e massima;

$\sigma_R$ , la resistenza statica, determinata cioè con le usuali prove statiche di trazione o di compressione;

$\sigma_l$ , la *resistenza al lavoro*, ossia la caratteristica che prende il luogo della resistenza statica allorché intervengono i fenomeni di fatica.

Il segno del secondo membro va scelto positivo o negativo secondo che le due tensioni estreme abbiano o meno segno concorde.

Dalla (421) risulta:

a) per  $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$  (tensione invariabile),  $\sigma_l = \sigma_R$ : la resistenza al lavoro uguale alla resistenza statica, cioè, com'è logico, l'assenza dei fenomeni di fatica;

b) per  $\sigma_{\min} = 0$  (tensione oscillante tra zero ed un massimo di trazione o di compressione),  $\sigma_l = 2\sigma_R/3$ : la resistenza al lavoro, uguale alla resistenza originaria, pari ai due terzi della resistenza statica;

c) per  $\sigma_{\min} = -\sigma_{\max}$  (tensione oscillante tra due limiti uguali e di segno opposto),  $\sigma_l = \sigma_I = \sigma_R/3$ : la resistenza al lavoro, uguale alla resistenza a forze invertite, pari a un terzo della resistenza statica.

La resistenza al lavoro varierebbe così entro i limiti seguenti:  
 per sforzi oscillanti tra limiti del medesimo segno,  $\sigma_R$  e  $2\sigma_R/3$ ;  
 per sforzi oscillanti fra limiti di segno opposto,  $2\sigma_R/3$  e  $\sigma_R/3$ .

Per materiali duttili è d'uso ritenere come stato di tensione critico quello corrispondente al limite di snervamento, il quale può anche riguardarsi coincidente con la resistenza originaria. D'altra parte dei limiti  $2\sigma_R/3$ ,  $\sigma_R/3$ , della resistenza al lavoro corrispondenti al secondo dei casi ora indicati, l'esperienza conferma il primo, mentre segnala per la resistenza a forze invertite un valore più elevato. Così stando le cose, il procedimento legato alla applicazione della (241) viene modificato assumendo la resistenza al lavoro:

per sforzi variabili fra limiti di ugual segno, quella invariabile:

$$(422) \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R,$$

uguale alla resistenza originaria;

per sforzi variabili fra limiti di segno opposto, la:

$$(423) \quad \sigma_l = \frac{2}{3} \sigma_R \left( 1 - 0,3 \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right),$$

dedotta dalla (421) riducendovi il coefficiente del rapporto delle  $\sigma$  da 0,5 a 0,3, ciò che porta ad un valore della resistenza a forze invertite  $\sigma_l = 0,45 \sigma_R$ , molto prossimo al valore  $0,5 \sigma_R$  che meglio risponde ai risultati sperimentali.

Dalla resistenza al lavoro si passa al *carico di sicurezza al lavoro* facendo intervenire il solito coefficiente di sicurezza.

\* \* \*

Un ultimo procedimento ancora più sbrigativo del precedente, tiene conto della ripetizione dello sforzo mediante opportune maggiorazioni del coefficiente di sicurezza.

Se un grado di sicurezza  $\nu_s$  rispetto alla rottura può ritenersi sufficiente per sollecitazioni statiche, per azioni ripetute bisognerebbe assumere una tensione ammissibile non superiore a  $1/\nu_s$  della corrispondente resistenza al lavoro, ossia un grado di sicurezza, sempre valutato rispetto a  $\sigma_R$ :

$$\nu_f = \nu_s \frac{\sigma_R}{\sigma_l}.$$

In accordo con quanto detto sopra porremo pertanto :

per sforzi variabili tra limiti di ugual segno :

$$(424) \quad \nu_f = \nu_s \frac{\sigma_R}{\sigma_o} = \frac{3}{2} \nu_s ;$$

per sforzi oscillanti tra limiti di segno opposto, il grado di sicurezza variabile tra i limiti :

$$(425) \quad \nu_f = \nu_s \frac{\sigma_R}{\sigma_o} = \frac{3}{2} \nu_s \quad , \quad \nu_f = \nu_s \frac{\sigma_R}{\sigma_l} = 2 \nu_s .$$

Per tener conto dei fenomeni di fatica basterebbe così assumere carichi di sicurezza al lavoro compresi tra una volta e mezza e due volte gli analoghi carichi per sollecitazioni statiche. I coefficienti  $\nu_s$  e  $\nu_f$  per i diversi tipi di sollecitazione e per i vari materiali possono trarsi dalla tabella dell'Unwin :

MATERIALE	Carico invariabile $\nu_s$	Carico variabile	
		fra zero e il valore finale $\nu_f$	fra limiti uguali e di segno opposto $\nu_f$
Ghisa . . . . .	4	6	10
Acciaio . . . . .	3	5	8
Legno . . . . .	7	10	15

\* \* \*

Ben poco può dirsi dei fenomeni di fatica cui danno luogo le variazioni di stati di tensione non manoassiali. Salvo per lo stato biassiale generato dalla torsione, che, data la facilità di realizzarlo, è stato molto studiato, pochi e malsicuri sono i dati che si possiedono sull'argomento.