

CAPITOLO X

FLESSIONE SEMPLICE

55 — Verifica delle equazioni del problema.

Assumiamo come sistema di componenti di spostamento quello rappresentato dalle funzioni:

$$(160) \quad u = -\frac{c}{m}xy \quad , \quad v = -\frac{c}{2}\left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m}\right) \quad , \quad w = cyz \quad ,$$

essendo ancora $1/m$ il coefficiente di Poisson, c una costante piccolissima.

Derivando le (160) ordinatamente rispetto ad x , y , z , si ottiene:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c}{m}y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{c}{m}y \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = cy \quad ,$$

da cui intanto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m} \frac{\partial w}{\partial z} \quad ,$$

È poi:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{c}{m}x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{c}{m}x \quad ,$$

ossia:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Sono inoltre nulle tutte le derivate seconde di w , eccettuata quella rispetto alle variabili y , z , che vale c ; è nulla la derivata seconda di u rapporto a z ; è uguale a $-c$ la derivata seconda di v rapporto a z . In conclusione le (160) soddisfano alla sestupla di equazioni (136).

La condizione ai limiti sulla superficie laterale (141) ha nullo il termine in n^* per essere entrambe nulle le derivate di u rapporto a z e di w rapporto a x ; ha pure nullo il termine in n^* , perchè è:

$$n^* \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = n^* (-cz + cz) = 0 ;$$

sicchè le (151) soddisfano anche questa condizione.

Infine per $x = y = z = 0$ sono pure verificate le condizioni di vincolo (143) e (144),

Possiamo allora concludere che le funzioni assegnate u , v , w , costituiscono una soluzione particolare del problema di Saint-Venant, purchè alla base libera del solido si applichino le forze superficiali che risultano dalle (142), ossia le forze:

$$(161) \quad F_x = 0 \quad , \quad F_y = 0 \quad , \quad F_z = E \frac{\partial w}{\partial z} = Ecy ,$$

ed alla base vincolata forze uguali ed opposte alle precedenti.

Il sistema di forze applicate alla base libera ha dunque componenti nulle secondo gli assi x ed y , e sono pertanto nulli i tagli T_x e T_y ed il momento torcente M_o ; è inoltre nulla la forza normale:

$$N = \int_A F_z dA = Ec \int_A y dA ,$$

perchè $\int_A y dA$ esprime il momento statico, notoriamente nullo, della sezione del cilindro rispetto ad un asse baricentrico.

Le rimanenti caratteristiche:

$$M_x = \int_A F_z y dA = Ec \int_A y^2 dA ,$$

$$M_y = \int_A F_z x dA = Ec \int_A xy dA ,$$

indicando con J_x ed J_{xy} i momenti di second'ordine della sezione retta che figurano nelle loro espressioni, possono scriversi:

$$(162) \quad M_x = EcJ_x \quad , \quad M_y = EcJ_{xy} ,$$

e sono in generale entrambe diverse da zero.

Il cilindro si riconosce dunque sollecitato a flessione simultaneamente dai momenti M_x ed M_y , ossia dal momento risultante $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ (fig. 26).

Diremo *piano di sollecitazione* quello appartenente al fascio di asse z , normale al vettore momento M risultante ed *asse di sollecitazione* la traccia s di detto piano sul piano della sezione retta generica del cilindro.

57 — Analisi della deformazione.

Assegnato il momento flettente M le cui componenti $M_x = M \cos \beta$ ed $M_y = M \sin \beta$ siano proporzionali rispettivamente ad J_x ed J_{xy} , soddisfino cioè alle (162), dalla prima di quelle relazioni si trae:

$$c = \frac{M_x}{EJ_x},$$

sicchè le (160) possono scriversi:

$$(163) \quad \begin{cases} u = -\frac{M_x}{EJ_x} \frac{xy}{m}, \\ v = -\frac{1}{2} \frac{M_x}{EJ_x} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right), \end{cases} \quad w = \frac{M_x}{EJ_x} yz.$$

Da queste si deducono poi le componenti della deformazione:

$$(164) \quad \begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{M_x}{EJ_x} \frac{y}{m}, & \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{M_x}{EJ_x} y, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Supponiamo ora che un punto generico M del cilindro, di coordinate x, y, z , abbia assunto in seguito alla deformazione la posizione M' , di coordinate x', y', z' ; sarà allora:

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z,$$

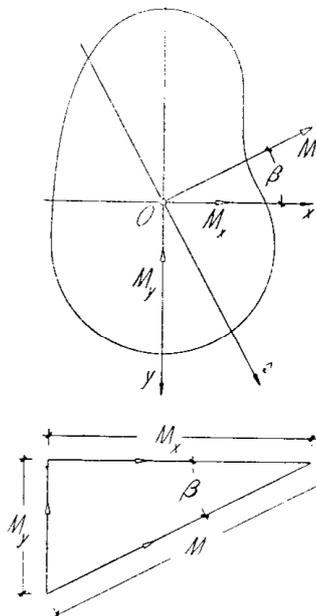


Fig. 26

dalle quali, avuto riguardo agli spostamenti, espressi dalle (160), si ottiene:

$$(165) \quad \begin{cases} x' = x - \frac{c}{m} xy, \\ y' = y - \frac{c}{2} \left(z^2 - \frac{x^2 - y^2}{m} \right), \quad z' = z + cyz. \end{cases}$$

Sostituiamo nella terza di queste espressioni il valore di y fornito dalla seconda e trascuriamo, a causa della piccolezza di c , i termini contenenti tale costante alla seconda potenza.

L'equazione che se ne ottiene:

$$(166) \quad z' = z(1 + cy'),$$

supposto $z = \text{costante}$, dichiara che la superficie in cui si portano nella deformazione i punti d'una data sezione retta è un piano parallelo all'asse x , inclinato di cz al piano coordinato xy . Ponendo poi nella (166) $z = 0$, avremo l'equazione:

$$(167) \quad 1 + cy' = 0$$

della retta, traccia del piano ora definito nel piano xy , (fig. 27); tale retta essendo indipendente da z , è la stessa per tutte le sezioni trasversali del solido.

Nella deformazione pertanto, i piani inizialmente paralleli delle sezioni rette del cilindro si trasformano nei piani del fascio avente per sostegno la retta del piano $z = 0$

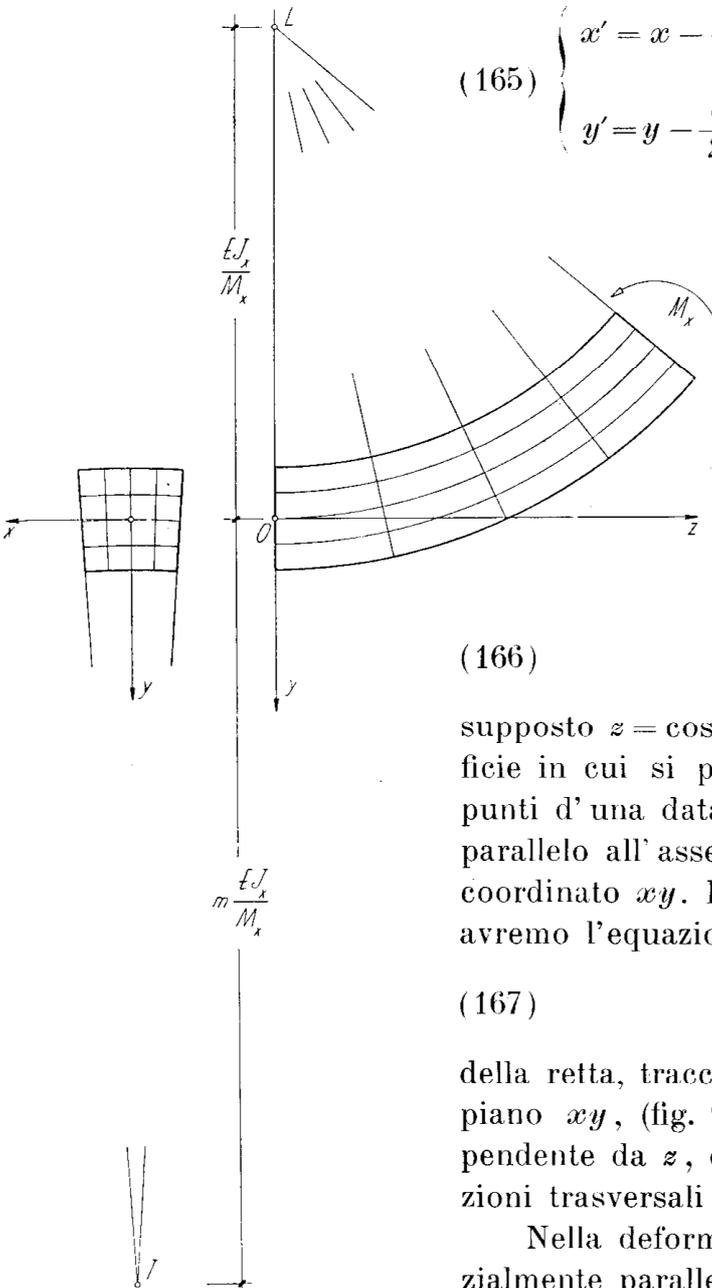


Fig. 27

parallela all'asse x e distante da questo della quantità:

$$-y' = \frac{1}{c} = -\frac{EJ_x}{M_x}.$$

Poichè abbiamo visto che sono nulli gli scorrimenti γ_{xz} e γ_{yx} , siamo

certi che, scelti per il punto generico M interno al solido tre elementi lineari paralleli agli assi coordinati, l'elemento parallelo all'asse z riuscirà ortogonale agli altri due anche dopo la deformazione. Ma questi ultimi, inizialmente appartenenti ad una certa sezione retta, si adagiano su di un certo piano del fascio avente per sostegno la retta rappresentata dalla (167): a tale piano deve perciò riuscire normale, dopo la deformazione, il terzo elemento lineare. Ne deriva che le rette inizialmente parallele all'asse del solido, traiettorie ortogonali ai piani delle sezioni rette del cilindro, si trasformano nelle traiettorie ortogonali ai piani del fascio sopra ricordato, vale a dire in archi di cerchio aventi il centro sull'asse del fascio e contenuti in piani normali a quest'asse. In particolare l'asse del solido, la cui configurazione deformata viene detta *curva* o *linea elastica*, si trasforma in un arco di cerchio di raggio:

$$(168) \quad r = \frac{1}{c} = \frac{EJ_x}{M_x},$$

contenuto nel piano coordinato yz — che chiameremo perciò *piano di flessione* — e volgente la concavità verso le y negative, se M_x è, come qui supponiamo, positivo. Diremo poi *asse di flessione* la traccia di detto piano sul piano della sezione retta generica.

La (168) dimostra che la costante piccolissima c non è altro che la *curvatura*:

$$(169) \quad \frac{1}{r} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

della linea elastica. Al prodotto EJ_x si dà il nome di *rigidezza flessionale*.

Si è visto che le sezioni trasversali del cilindro rimangono piane; analizziamone ora le variazioni di forma osservando che, per essere le componenti di deformazione tutte indipendenti da z , è possibile riferirsi ad una sezione qualunque. Scegliamo per esempio la base vincolata e scriviamo la prima delle (165) sostituendovi il valore di y fornito dalla seconda per $z=0$; trascurando sempre i termini contenenti le potenze della costante c superiori alla prima, avremo l'equazione:

$$(170) \quad x' = x \left(1 - \frac{c}{m} y' \right),$$

la quale, per $x = x_r = \text{costante}$, rappresenta la trasformata d'una retta appartenente alla base $z=0$ e parallela all'asse y ; trasformata che è dun-

que ancora una retta: e precisamente inclinata all'asse x di $-x_r \frac{c}{m}$, e che incontra l'asse y in un certo punto T situato alla distanza dall'origine:

$$(171) \quad y' = \frac{m}{c} = m \frac{EJ_x}{M_x}.$$

Poichè tale distanza è indipendente da x_r , è cioè la medesima per tutte le rette della sezione inizialmente parallele ad y , si conclude che tali rette si trasformano nei raggi del fascio di centro T . D'altra parte essendo nulli gli scorrimenti γ_{xy} , le rette inizialmente parallele all'asse x devono trasformarsi nelle traiettorie ortogonali ai raggi del fascio sopra definito, ossia in cerchi di centro T . In particolare la corda della sezione che prima della deformazione coincideva con l'asse x , si disporrà secondo un cerchio di raggio:

$$(172) \quad mr = m \frac{EJ_x}{M_x}$$

m volte più grande di quello della linea elastica ed avente centro nel punto T , situato dalla parte opposta, rispetto all'origine, del centro L della linea elastica.

L'espressione (164) di ϵ_x avverte poi che le corde della sezione parallele ad x subiscono dilatazioni proporzionali alle loro distanze y dall'origine: quelle di ordinata positiva subiscono dilatazioni negative, ossia si accorciano; quelle di ordinata negativa subiscono dilatazioni positive, ossia si allungano. La corda di ordinata nulla, inizialmente coincidente con l'asse x , non subisce dilatazione alcuna; essa rimane di lunghezza invariata e prende perciò il nome di *asse neutro*.

Da quanto precede, con riferimento alla figura 27, la quale rappresenta, *molto esagerate*, le deformazioni d'un prisma a sezione rettangolare, possiamo concludere che:

le sezioni longitudinali del cilindro inizialmente parallele al piano yz si trasformano in zone di superfici coniche di rotazione aventi per asse la retta di traccia L normale al detto piano; tutte queste superfici sono coassiali ed hanno a comune la circonferenza di raggio:

$$\frac{EJ_x}{M_x} + m \frac{EJ_x}{M_x};$$

le sezioni longitudinali inizialmente parallele al piano xz si trasformano in zone di superfici toriche aventi il medesimo asse delle superfici precedenti.

La dilatazione cubica, con riguardo alla (93), vale :

$$\Theta = \frac{m-2}{mE} \sigma_x = \frac{m-2}{mE} \frac{M_x y}{J_x},$$

e la variazione totale di volume, ponendo $dV = dA dz$:

$$\Delta V = \int_V \Theta dV = \frac{m-2}{mE} \frac{M_x}{J_x} \int_0^l dz \int_A y dA,$$

la quale, per essere x un asse baricentrico e di conseguenza nullo il momento statico della sezione rispetto ad esso, dà :

$$\Delta V = 0;$$

cioè *nella sollecitazione a flessione il volume del cilindro rimane inalterato.*

57 — Stato di tensione.

Dalle (138) risultano le componenti speciali di tensione :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = \frac{M_x y}{J_x}, \quad \tau_{xx} = G \gamma_{xx} = \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 0.$$

Analogamente a quanto si verifica nella sollecitazione a forza normale poichè anche qui le tensioni τ_{xx} e τ_{xy} sono nulle in tutti i punti della sezione trasversale, la direzione z in ciascun punto è direzione principale.

L'espressione dell'unica componente speciale di tensione non nulla :

$$(173) \quad \sigma_x = \frac{M_x y}{J_x}$$

prende il nome di *formula di Navier*; essa avverte che la tensione σ_x è proporzionale direttamente ad M_x , ossia

al *momento della componente attiva nel piano di flessione* dell'intera coppia flettente di momento M , ed inversamente al momento d'inerzia J_x della sezione rispetto al suo asse neutro (fig. 28).

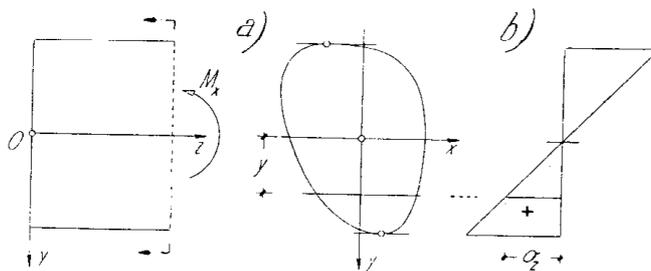


Fig. 28

Per M_x positivo si hanno tensioni positive, ossia trazioni, dalla parte delle y positive; tensioni negative, ossia compressioni, dalla parte opposta; il contrario si verifica per M_x negativo.

La tensione in una data sezione varia poi proporzionalmente alla ordinata y , sicchè è la stessa per tutti i punti d'una medesima corda parallela all'asse neutro e si annulla a livello di questo, per $y = 0$.

58 -- Lavoro di deformazione.

La densità d'energia, secondo la (94), risulta:

$$\varphi = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 = \frac{1}{2E} \frac{M_x^2 y^2}{J_x^2},$$

sicchè il lavoro di deformazione dell'intero solido è:

$$\Phi = \frac{M_x^2}{2EJ_x^2} \int_0^l dz \int_A y^2 dA = \frac{M_x^2 l}{2EJ_x^2} \int_A y^2 dA,$$

o per essere $\int_A y^2 dA = J_x$, anche:

$$(174) \quad \Phi_l = \frac{M_x^2 l}{2EJ_x}.$$

Lo stesso risultato si otterrebbe applicando il teorema di Clapeyron, secondo cui il lavoro di deformazione è il semiprodotto del momento M_x per la rotazione:

$$\alpha_l = \frac{1}{r} = \frac{M_x l}{EJ_x}.$$

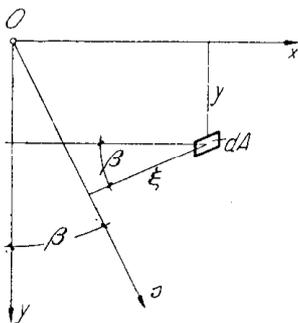


Fig. 29

59 — Relazione tra asse di sollecitazione ed asse neutro.

Indichiamo con β l'angolo compreso tra i piani di sollecitazione e di flessione (fig. 29); tenendo presenti le (162), avremo:

$$(175) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{M_y}{M_x} = \frac{J_{xy}}{J_x};$$

talchè, scelta la coppia x, y , di assi baricentrici ortogonali, rispettiva-

mente come asse neutro ed asse di flessione, l'asse di sollecitazione s è univocamente determinato dal rapporto $J_{xy} : J_x$.

Scrivendo poi il momento centrifugo della sezione rispetto agli assi s ed x , e rispettando la (175), troviamo :

$$\begin{aligned} J_{sx} &= \int_A \xi y dA = \cos \beta \int_A xy dA - \sin \beta \int_A y^2 dA = J_{xy} \cos \beta - J_x \sin \beta = \\ &= J_{xy} \cos \beta \left(1 - \frac{J_x}{J_{xy}} \operatorname{tg} \beta \right) = 0, \end{aligned}$$

la quale è notoriamente condizione necessaria e sufficiente perchè gli assi x ed s siano coniugati rispetto alla conica centrale d'inerzia della sezione.

Vale dunque il teorema fondamentale: *nella sollecitazione a flessione l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono coniugati nell'ellisse centrale di inerzia della sezione.*

60 — Flessione retta e deviata.

Dati del problema della flessione sono di regola il momento M ed il piano di sollecitazione, nel quale si può sempre supporre trasportato, parallelamente a sè stesso, il piano nel quale agisce la coppia flettente. Assegnato così l'asse s , non è più arbitraria la scelta della coppia di assi x, y , cui si deve fare riferimento perchè siano applicabili i risultati della trattazione precedente, ma univocamente individuata, in quanto dovrà essere l'asse neutro x il coniugato ad s ; l'asse y , ortogonale al precedente, sarà allora l'asse di flessione (fig. 30 a).

Quando l'asse di sollecitazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia (fig. 30 b), l'asse neutro viene a coincidere con l'altro asse principale; il piano di flessione dovendo risultare normale all'asse neutro, coincide col piano di sollecitazione: il cilindro dicesi allora cimenato a *flessione retta*. Se invece l'asse di sollecitazione non coincide con un asse principale (fig. 30 a), gli

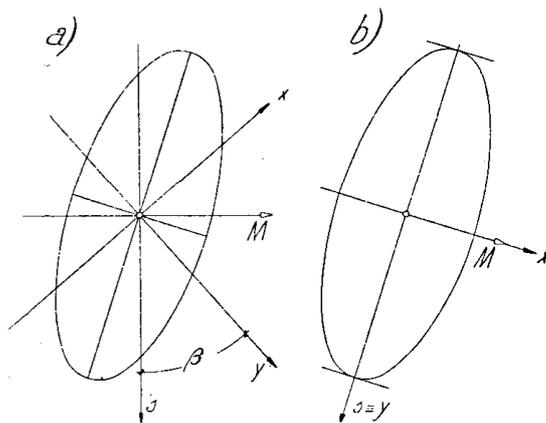


Fig. 30

assi s ed x non sono più ortogonali; il piano di flessione cade allora fuori del piano di sollecitazione, ed il cilindro si dice soggetto a *flessione deviata*. Per *deviazione* s'intende appunto lo scostamento angolare β fra la traccia y del piano di flessione e l'asse s di sollecitazione; essa è nulla per flessione retta, massima per l'asse di sollecitazione s coincidente con una delle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellisse centrale d'inerzia (fig. 31), nel qual caso l'asse neutro x coincide con l'altra diagonale.

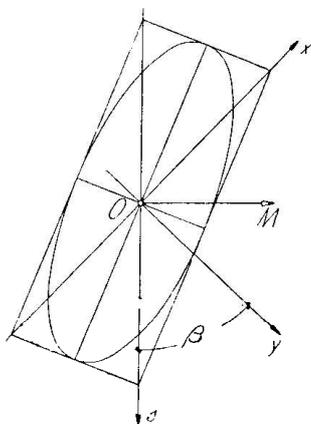


Fig. 31

61 — Determinazione dell'asse neutro.

Se la sezione possiede un asse di simmetria ortogonale od obliqua e l'asse di sollecitazione coincide con esso, la determinazione dell'asse neutro è immediata in quanto sono notoriamente coniugati l'asse di simmetria e quello parallelo alle corde da esso bisecate. La flessione è retta o deviata secondochè si tratti di simmetria ortogonale (fig. 32 a) od obliqua (figura 32 b).

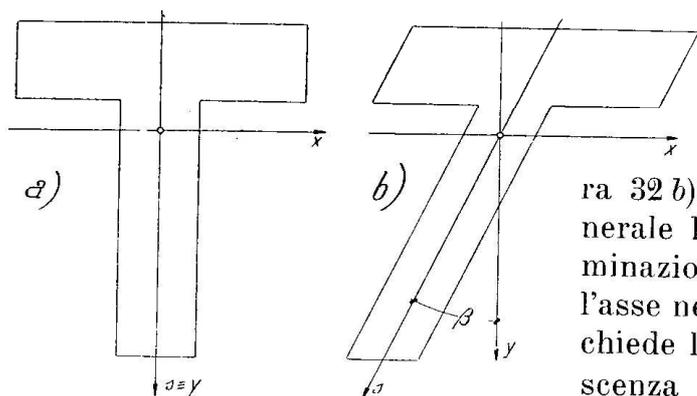


Fig. 32

In generale la determinazione dell'asse neutro richiede la conoscenza dell'ellisse centrale di inerzia.

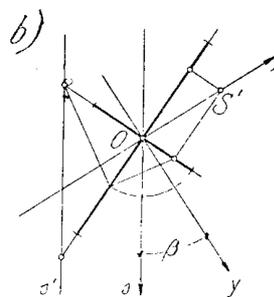
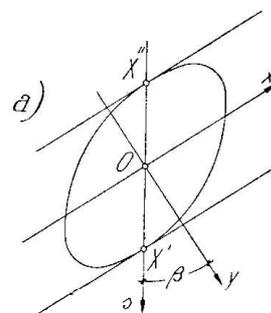


Fig. 33

Se questa è disegnata (fig. 33 a), l'asse x cercato s'individua comodamente per via grafica, giacchè esso ha notoriamente la direzione delle tangenti all'ellisse nei punti X' , X'' , che questa ha in comune con l'asse s . Se l'ellisse è individuata da due diametri coniugati, in particolare dagli assi (fig. 33 b), un punto proprio S' di x , distinto dal baricentro, che insieme con questo basti a determinarlo, si ottiene come antipolo d'un opportuno asse s' parallelo all'asse di sollecitazione s assegnato.

Volendo procedere analiticamente, si determinano preventivamente gli

assi x_0, y_0 , ed i relativi momenti principali di inerzia J_{x_0}, J_{y_0} (fig. 34). Detti poi rispettivamente φ e ψ gli angoli che l'asse s assegnato e l'asse x da determinare formano con uno degli assi principali, per esempio x_0 , ed osservando che è:

$$\xi = x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi,$$

$$\eta = x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi,$$

per la relazione di coniugio, dovrà essere:

$$J_{sx} = \int_A \xi \eta dA = J_{y_0} \sin \varphi \sin \psi - J_{x_0} \cos \varphi \cos \psi = 0$$

e quindi:

$$(176) \quad \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi = \frac{J_{x_0}}{J_{y_0}};$$

da questa, dato φ , si determina:

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{J_{x_0}}{J_{y_0}} \right).$$

La deviazione vale:

$$\beta = \psi + \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

La (176) è infine traducibile nella seguente costruzione grafica (fig. 35). Si porti sull'asse y_0 , in una scala arbitraria in \overline{OA} , il momento d'inerzia J_{x_0} , quindi in \overline{AB} , nella medesima scala, il momento J_{y_0} . Si conduca da A la parallela all'asse x_0 e da B la normale all'asse s ; il punto N d'intersezione di queste due rette appartiene all'asse neutro x . Si ha infatti:

$$\overline{NA} \operatorname{tg} \psi = J_{x_0} \quad , \quad \frac{\overline{NA}}{\operatorname{tg} \varphi} = J_{y_0},$$

da cui, dividendo membro a membro, si ritrova la (176).

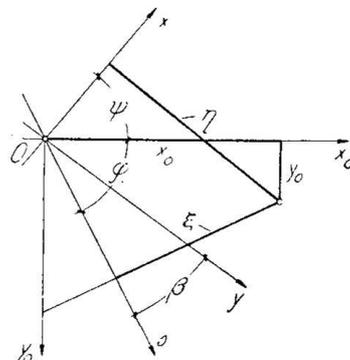


Fig. 34

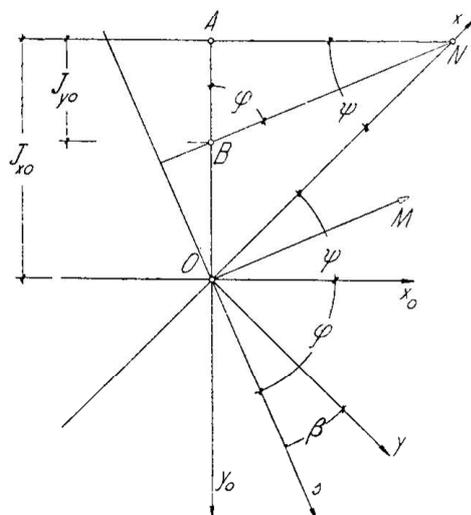


Fig. 35

62 — Altre espressioni della tensione.

La formula di Navier data al n. 57 :

$$\sigma_x = \frac{M_x y}{J_x},$$

si applica senza limitazioni, qualunque sia l'asse di sollecitazione, purchè si scelga come asse x l'asse neutro. La normale ad esso y coincide allora con l'asse di flessione;

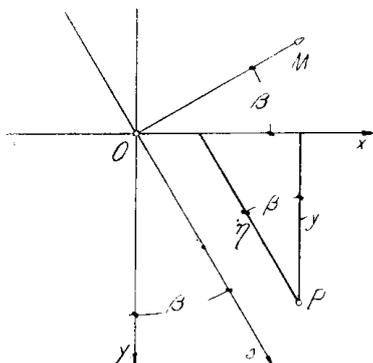


Fig. 36

$$(177) \quad M_x = M \cos \beta$$

esprime il momento della componente della coppia attiva nel piano di flessione yz ; l'ordinata y del punto ove si vuole determinare la tensione, che figura al numeratore, come quelle omonime da introdurre nel calcolo del momento di inerzia J_x , devono essere valutate ortogonalmente all'asse neutro.

In taluni casi convengono tuttavia altre espressioni della σ_x , di cui diremo qui appresso.

Se le distanze y degli elementi superficiali della sezione dall'asse neutro si valutano in funzione di quelle prese parallelamente all'asse di sollecitazione, talchè sia (fig. 36):

$$y = \eta \cos \beta,$$

$$J_x = \cos^2 \beta \int_A \eta^2 dA = J \cos^2 \beta,$$

la (173) prende la forma :

$$(178) \quad \sigma_x = \frac{M \eta}{J},$$

nella quale dunque le distanze η da introdurre sia al numeratore, sia nel calcolo di J , devono essere valutate parallelamente all'asse di sollecitazione.

La (178) s'impiega con vantaggio quando si voglia esaminare l'effetto d'una coppia flettente il cui vettore momento assegnato, e quindi l'asse di sollecitazione, ruotino intorno al baricentro. È facile mostrare che la tensione sopra un dato elemento P della sezione varia in ragione inversa alla distanza, valutata sul corrispondente asse di sollecitazione, del baricentro della sezione dall'antipolare di P rispetto all'ellisse centrale d'iner-

zia (fig. 37). Infatti, ricordando che $J = A\rho^2$, la (178) può scriversi:

$$(179) \quad \sigma_x = \frac{M}{A} \frac{\eta}{\rho^2},$$

nella quale il rapporto $\rho^2 : \eta$ esprime appunto la distanza d dal baricentro O , dell'antipolo V della retta v passante per P e parallela all'asse neu-

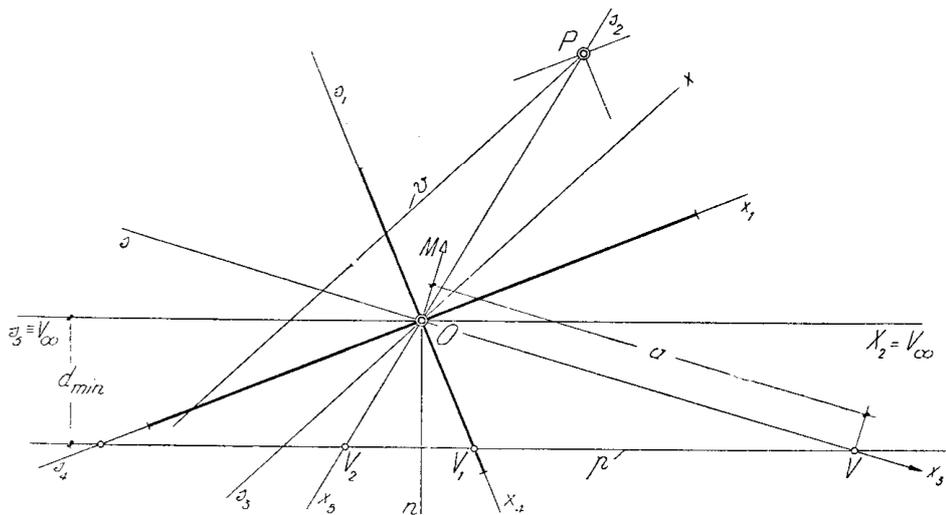


Fig. 37

tro x , antipolo notoriamente appartenente all'asse coniugato ad x , cioè all'asse di sollecitazione s . Se v , assumendo le direzioni di tutti i possibili assi neutri (x, x_1, x_2, \dots), ruota descrivendo il fascio di centro P , il suo antipolo V descrive la punteggiata (V, V_1, V_2, \dots) antipolare di P .

I valori estremi della tensione in P , uguali in valore assoluto, corrispondono perciò alla minima distanza d , ossia ai due assi s e $-s$ coincidenti con la normale n a p ; il valore nullo si ha per $d = \pm \infty$, ossia per assi s aventi a comune con la p il punto improprio (asse neutro passante per P).

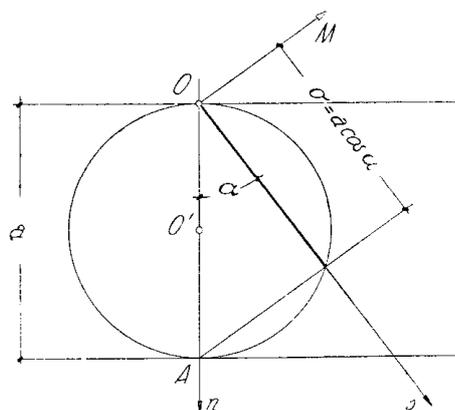


Fig. 38

Se poi assumiamo il baricentro O come polo e la normale n a p con dato verso come asse delle anomalie α degli assi di sollecitazione (fig. 38), la circonferenza con centro O' nel punto medio del segmento $a = \overline{AO}$ preso su n a rappresentare la tensio-

ne massima, costituisce il diagramma polare delle tensioni nel punto P . Indicando con k una costante opportuna, la (178) può scriversi infatti:

$$\sigma = \frac{k}{d_{\min}} \frac{d}{d_{\min}} = a \cos \alpha .$$

Talvolta conviene scindere la flessione deviata in due flessioni rette e valutare la tensione dovuta all'intera coppia con la sovrapposizione degli effetti.

Calcolati allora i momenti delle coppie componenti attive nei piani principali d'inerzia (fig. 39):

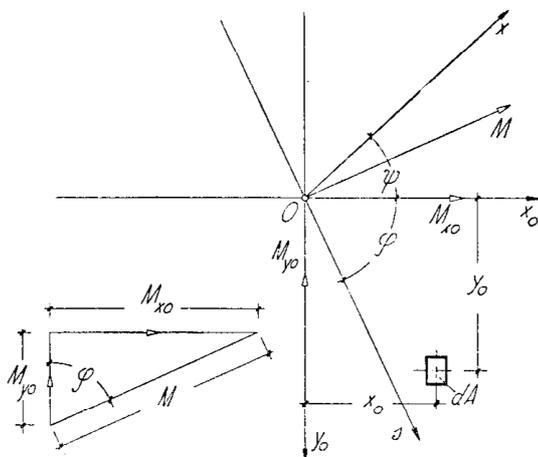


Fig. 39

$$M_{x_0} = M \sin \varphi \quad , \quad M_{y_0} = M \cos \varphi ,$$

avremo per la tensione dovuta al momento M sull'elemento superficiale di coordinate x_0, y_0 :

$$(180) \quad \sigma_x = \frac{M_{x_0} y_0}{J_{x_0}} + \frac{M_{y_0} x_0}{J_{y_0}} .$$

Ponendo in questa $\sigma_x = 0$, si ottiene il luogo dei punti a tensione nulla:

$$-\frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \frac{J_{x_0}}{J_{y_0}} ,$$

ovviamente coincidente con la retta rappresentata dalla (176), così come dev'essere, perchè, in virtù della $\sigma_x = E \varepsilon_x$, con la tensione deve annullarsi la dilatazione, ciò che si verifica precisamente all'asse neutro.

63 — Tensioni massime. Moduli di resistenza.

Nei punti M' e M'' della sezione più distanti dall'asse neutro x , rispettivamente della zona tesa e di quella compressa (fig. 40) la tensione σ_x raggiunge i valori estremi, massimo e minimo, che si ottengono dalla (173) per i valori estremi y' ed y'' dell'ordinata y :

$$(181) \quad \sigma' = \frac{M_x y'}{J_x} \quad , \quad \sigma'' = \frac{M_x y''}{J_x} ,$$

oppure dalla (178) per i valori estremi η' ed η'' :

$$(182) \quad \sigma' = \frac{M \eta'}{J} \quad , \quad \sigma'' = \frac{M \eta''}{J} ,$$

valevoli com'è noto, le prime per $M_x = M \cos \beta$ e per i rapporti:

$$J_x : y = \int_A y^2 dA : y,$$

valutati per distanze dall'asse neutro x prese ortogonalmente ad esso; le seconde invece per i rapporti:

$$J : \eta = \int_A \eta^2 dA : \eta$$

valutati per le stesse distanze, ma prese parallelamente all'asse di sollecitazione s .

Se poi sono noti gli assi principali centrali di inerzia, si possono valutare le tensioni estreme introducendo nella (180) le coordinate (\bar{x}'_o, \bar{y}'_o) , $(\bar{x}''_o, \bar{y}''_o)$ dei punti più cimentati M' ed M'' :

$$(183) \quad \sigma' = \frac{M_{x_o} \bar{y}'_o}{J_{x_o}} + \frac{M_{y_o} \bar{x}'_o}{J_{y_o}}, \quad \sigma'' = \frac{M_{x_o} \bar{y}''_o}{J_{x_o}} + \frac{M_{y_o} \bar{x}''_o}{J_{y_o}}.$$

Il calcolo delle tensioni estreme richiede dunque di regola la preventiva determinazione dell'asse neutro x ; noto questo, si tracciano le tangenti t' e t'' parallele ad esso, le quali individuano nei punti di tangenza M' ed M'' gli elementi più cimentati della sezione e le relative ordinate y' ed y'' , η' ed η'' da introdurre rispettivamente nelle (181) o nelle (182), ovvero le coppie di coordinate (\bar{x}'_o, \bar{y}'_o) , $(\bar{x}''_o, \bar{y}''_o)$ che entrano nelle (183).

Talvolta si pongono le (181) nella forma:

$$(184) \quad \sigma' = \frac{M_x}{W'_x}, \quad \sigma'' = -\frac{M_x}{W''_x},$$

dopo avere introdotto i *moduli di resistenza relativi all'asse x* :

$$(185) \quad W'_x = \frac{J_x}{y'}, \quad W''_x = -\frac{J_x}{y''},$$

che hanno ovviamente le dimensioni di una lunghezza al cubo.

Se la flessione è retta, nelle (184) entrano i moduli principali, della coppia (fig. 41):

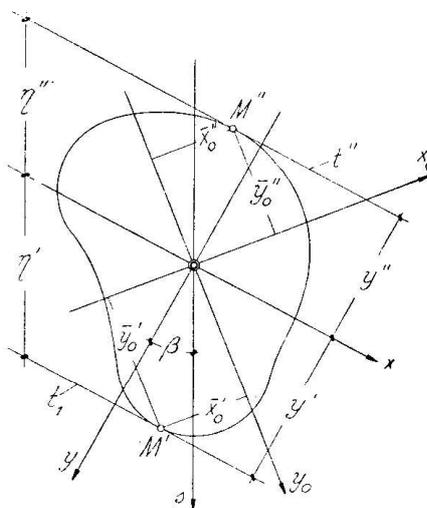


Fig. 40

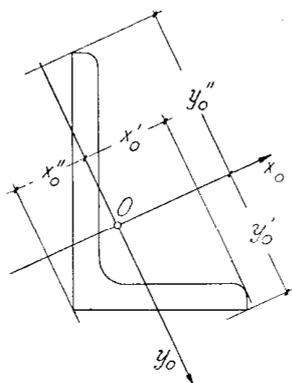


Fig. 41

$$(186) \quad W'_{x_0} = \frac{J_{x_0}}{y'_0} \quad , \quad W''_{x_0} = -\frac{J_{x_0}}{y''_0} \quad ,$$

ovvero dell'altra :

$$(186') \quad W'_{y_0} = \frac{J_{y_0}}{x'_0} \quad , \quad W''_{y_0} = -\frac{J_{y_0}}{x''_0} \quad ,$$

secondo che l'asse di sollecitazione coincida con l'asse y_0 ovvero con quello x_0 , ed i cui valori, già calcolati per le sezioni unificate di più frequente impiego, in particolare per quelle dei profilati metallici, sono riportati dai manuali d'ingegneria.

Se l'asse neutro coincide con un asse di simmetria della sezione, con $y' = -y''$ è pure $W'_x = W''_x = W_x$ e, di conseguenza, $\sigma' = -\sigma''$: le tensioni estreme hanno lo stesso valore assoluto.

Se, in particolare, la coincidenza ha luogo con un asse di simmetria ortogonale e quindi anche principale centrale d'inerzia della sezione, la

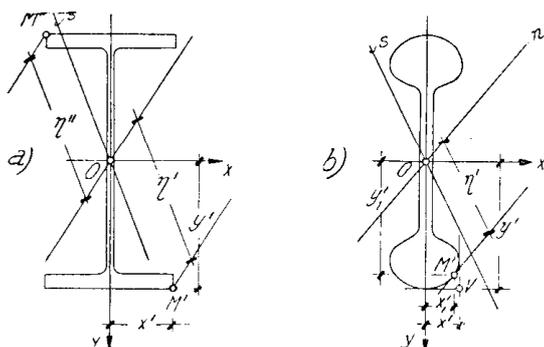


Fig. 42

l'asse x_0 che dall'asse y_0 (fig. 42 a); in tal caso le (183) possono scriversi:

$$(187) \quad \sigma' = \frac{M_{x_0}}{W'_{x_0}} + \frac{M_{y_0}}{W'_{y_0}} \quad , \quad -\sigma'' = \frac{M_{x_0}}{W''_{x_0}} + \frac{M_{y_0}}{W''_{y_0}} \quad ;$$

il calcolo viene così semplificato in quanto è superfluo conoscere l'asse neutro, mentre i moduli principali possono trarsi dai manuali.

Sarebbe ovviamente errata l'applicazione delle (187) quando non sussistesse la condizione dichiarata. Nel caso della figura 42 b, per esempio, la prima di esse porterebbe a valutare la σ in corrispondenza del punto V di coordinate x'_0, y'_0 , esterno alla sezione; per determinare correttamente la tensione massima σ' è invece necessario, come già detto, trovare l'asse neutro $x = n$, condurre la tangente t al contorno della sezio-

flessione è ovviamente retta. Supposto trattarsi, ad esempio, dell'asse x_0 , con $y'_0 = -y''_0$ sarà $W'_{x_0} = W''_{x_0} = W_{x_0}$.

Per molte sezioni tra quelle che più spesso ricorrono in pratica, i punti M' ed M'' sono i più distanti da qualunque asse baricentrico pensato come possibile asse neutro x , e quindi sono contemporaneamente i più lontani sia dal-

ne dalla parte della zona tesa, individuare il punto di tangenza M' e introdurne le coordinate \bar{x}'_o, \bar{y}'_o nella prima delle (183).

* * *

È interessante conoscere infine la legge con cui variano i moduli W' e W'' quando l'asse di sollecitazione s (e quindi l'asse neutro) ruota intorno al baricentro.

Detti:

$$\lambda' = \overline{Om} \quad , \quad \lambda'' = \overline{On} \quad ,$$

i raggi del nocciolo centrale d'inerzia distesi sull'asse s , ρ il semidiametro dell'ellisse centrale disteso sullo stesso asse, potremo esprimere i moduli nel modo seguente:

$$(188) \quad \begin{cases} W'_x = \frac{J_x}{y'} = \frac{J}{\eta'_1} = \frac{A\rho^2}{\eta'_1} = A\lambda'' \quad , \\ W''_x = -\frac{J_x}{y''} = -\frac{J}{\eta''_1} = -\frac{A\rho^2}{\eta''_1} = A\lambda'' \quad , \end{cases}$$

le quali espressioni dimostrano che i *moduli di resistenza variano proporzionalmente ai raggi di nocciolo distesi sull'asse di sollecitazione*. Il nocciolo centrale d'inerzia è dunque il diagramma polare dei moduli di resistenza.

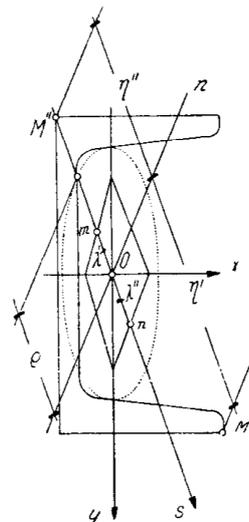


Fig. 43