

RECHERCHES

THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

SUR

LA FORCE DE TORSION ET SUR L'ÉLASTICITÉ

DES FILS DE MÉTAL.

APPLICATION DE CETTE THÉORIE A L'EMPLOI DES MÉTAUX DANS LES ARTS ET DANS DIFFÉRENTES EXPÉRIENCES DE PHYSIQUE. — CONSTRUCTION DE DIFFÉRENTES BALANCES DE TORSION POUR MESURER LES PLUS PETITS DEGRÉS DE FORCE. — OBSERVATIONS SUR LES LOIS DE L'ÉLASTICITÉ ET DE LA COHÉRENCE.

I.

Ce Mémoire a deux objets : le premier de déterminer la force élastique de torsion des fils de fer et de laiton relativement à leur longueur, à leur grosseur et à leur degré de tension. J'avais déjà eu besoin, dans un Mémoire sur les Aiguilles aimantées, imprimé dans le neuvième Volume des *Savants étrangers*, de déterminer la force de torsion des cheveux et des soies, mais je ne m'étais point occupé des fils de métal, parce que l'objet utile à mes recherches n'était pour lors que de choisir, à forces égales, les suspensions les plus flexibles, et que j'avais trouvé que les fils de soie avaient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le second objet de ce Mémoire est d'évaluer l'imperfection de la réaction élastique des fils de métal et d'examiner quelles sont les conséquences que l'on en peut tirer relativement aux lois de la cohérence et de l'élasticité des corps.

II.

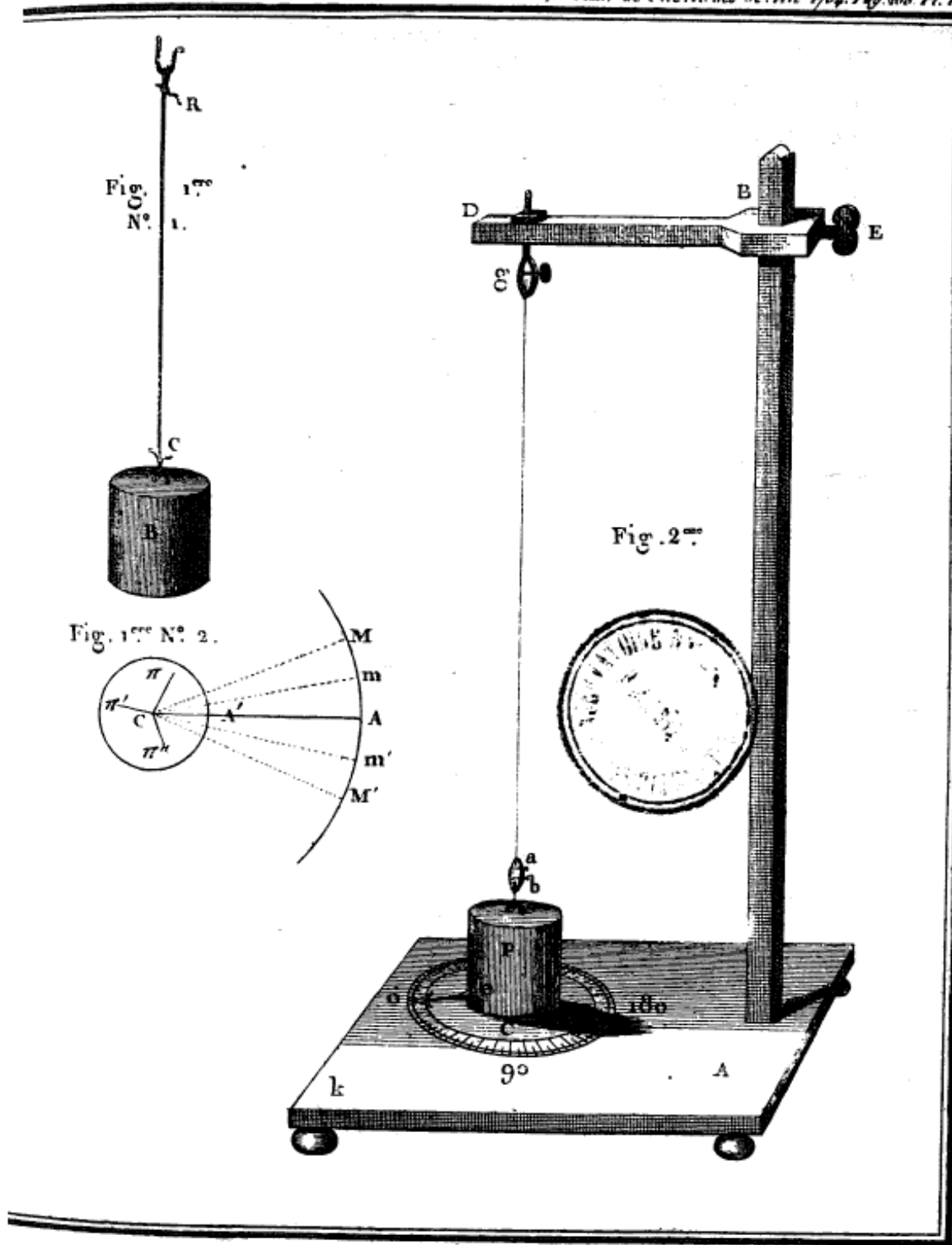
La méthode pour déterminer la force de torsion, d'après l'expérience, consiste à suspendre par un fil de métal un poids cylindrique, de manière que son axe soit vertical ou dans la direction du fil de suspension. Tant que le fil de suspension ne sera point tordu, le poids restera en repos; mais si l'on fait tourner ce poids autour de son axe, le fil se tordra et fera effort pour se rétablir dans sa situation naturelle; si pour lors on abandonne le poids, il oscillera plus ou moins de temps, suivant que la réaction élastique de torsion sera plus ou moins parfaite. Si, dans ce genre d'expériences, on observe avec soin la durée d'un certain nombre d'oscillations, il sera facile de déterminer, par les formules du mouvement oscillatoire, la force de réaction de torsion qui produit ces oscillations. Ainsi, en faisant varier la pesanteur du poids suspendu, la longueur des fils de suspension et leur grosseur, on peut espérer de déterminer les lois de la réaction de torsion relativement à la tension, à la longueur, à la grosseur et à la nature de ces fils.

III.

Si le fil de métal était parfaitement élastique, si la résistance de l'air n'altérait pas l'amplitude des oscillations, le poids soutenu par le fil de métal une fois en mouvement oscillerait jusqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oscillations ne peut donc être attribuée qu'à la résistance de l'air et qu'à l'imperfection de l'élasticité de torsion; ainsi, en observant la diminution successive de l'amplitude de chaque oscillation et en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la résistance de l'air, on pourra, au moyen des formules du mouvement oscillatoire appliquées à ces expériences, déterminer suivant quelles lois cette force élastique de torsion est altérée.

IV.

Ce Mémoire sera divisé en deux sections : dans la première on déterminera la loi des forces de torsion, en supposant les forces



Fac-simile de la Planche originale IV.

de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, supposition conforme à l'expérience, lorsque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torsion; on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la seconde section on cherchera, par l'expérience, suivant quelles lois la force élastique de torsion est altérée dans les grandes oscillations, on fera usage de cette recherche pour déterminer les lois de la cohérence et de l'élasticité des métaux et de tous les corps solides.

V.

PREMIÈRE SECTION.

Formules du mouvement oscillatoire, en supposant la réaction de la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion ou altérée par un terme très petit.

Un corps cylindrique B (*fig. 1*, n° 1) est soutenu par un fil RC, de manière que l'axe du cylindre est vertical, ou se trouve dans la prolongation du fil de suspension, on fait tourner ce cylindre autour de son axe sans déranger cet axe de son aplomb; il faut déterminer, dans la supposition des forces de torsion proportionnelles à l'angle de torsion, les formules du mouvement oscillatoire.

Le n° 2 (*fig. 1*) représente une section horizontale du cylindre; tous les éléments du cylindre sont projetés sur cette section circulaire en $p, p', p'', \dots$; on suppose que l'angle primitif de torsion soit $ACM = A$ et qu'après le temps t cet angle soit ACm ou qu'il soit diminué de l'angle $MCm = S$, en sorte que

$$ACm = (A - S).$$

Puisque l'on suppose la force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, le *momentum* de cette force sera représenté par $n(A - S)$, n étant un coefficient constant dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur et de sa grosseur. Si l'on nomme v la vitesse d'un point quelconque (de masse) p , au bout du temps t , lorsque l'angle de torsion est ACm , on aura, par

les principes de Dynamique,

$$n(A - S) dt = \Sigma pr dv,$$

où r est la distance Cp du point p à l'axe de rotation G .

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, et que la vitesse d'un point A' de la circonférence du cylindre soit, au bout du temps t , représentée par u , on aura

$$v = \frac{ru}{a},$$

d'où résulte

$$n(A - S) dt = du \frac{\Sigma pr^2}{a},$$

et, comme $dt = \frac{a dS}{u}$, on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - S^2) = \frac{u^2}{a^2} \Sigma pr^2,$$

d'où l'on tire

$$dt = dS \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{n(2AS - S^2)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - S^2)}}$ représente un angle dont $\frac{S}{A}$ est le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, et qui devient égal à 90° lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière sera

$$T = \pi \sqrt{\frac{\Sigma pr^2}{n}}.$$

VI.

Pour comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le pendule le temps T d'une oscillation entière est

$$T = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}},$$

où λ est la longueur du pendule et g la force de gravité. Ainsi un pendule isochrone aux oscillations du cylindre donne

$$\frac{\Sigma pr^2}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule on tirera facilement la valeur de n , d'après l'expérience, puisque les dimensions du cylindre ou du poids sont données, ainsi que le temps d'une oscillation qui détermine la valeur λ .

Si l'on voulait ensuite chercher un poids Q qui, agissant à l'extrémité du levier b , eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torsion lorsque l'angle de torsion est $(A - S)$, il faudrait faire $Qb = n(A - S)$.

VII.

Il faut actuellement chercher pour un cylindre la valeur de Σpr^2 , que l'on trouvera égale à $\frac{\pi \delta L a^4}{2}$, où δ est la densité du cylindre et a son rayon. Mais, comme la masse M du cylindre $= \pi \delta L a^2$, on a

$$\Sigma pr^2 = \frac{M a^2}{2}$$

et conséquemment

$$T = \pi \sqrt{\frac{M a^2}{2n}};$$

en comparant, comme au *numéro précédent*, avec le pendule isochrone, il en résulte

$$\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^2}{2n},$$

et, comme gM est le poids P du cylindre, nous aurons

$$n = \frac{P a^2}{2\lambda},$$

ce qui donne une formule très simple pour déterminer n d'après l'expérience.

VIII.

Si la force de torsion que nous avons supposée $n(A - S)$ était altérée par une quantité R , la formule du mouvement oscillatoire donnerait pour lors

$$[n(A - S) - R] dt = du \frac{1}{a} \Sigma pr^2;$$

et mettant, comme plus haut, à la place de dt sa valeur $\frac{a dS}{u}$, on a pour l'intégration

$$n(2AS - S^2) - 2 \int R dS = \frac{u^2}{a^2} \Sigma pr^2.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oscillation entière, il faut la diviser en deux parties, la première depuis M jusqu'en A où la force de torsion accélère la vitesse u , tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A jusqu'en M, où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

Exemple I. — Supposons $R = \mu(A - S)^m$; on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA,

$$n(2AS - S^2) + \frac{2\mu(A - S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+2}}{m+1} = \frac{u^2}{a^2} \Sigma pr^2;$$

ainsi, lorsque l'angle de torsion sera nul, ou que $(A - S) = 0$, on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = \frac{U^2}{a^2} \Sigma pr^2.$$

Considérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A jusqu'en M' et supposons l'angle $AGm' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vitesse au point A,

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{U^2 - u^2}{2a^2} \Sigma pr^2.$$

Substituant à la place de U^2 sa valeur

$$\frac{a^2}{\Sigma pr^2} \left(nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} \right),$$

on aura pour l'intégration totale, lorsque la vitesse deviendra nulle ou lorsque l'oscillation sera achevée,

$$(A - S) = \frac{2\mu}{n(m+1)} \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

et si les forces retardatrices sont telles qu'à chaque oscillation l'amplitude soit peu diminuée, on aura, pour valeur très approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)},$$

et si cette quantité $(A - S')$ était assez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, on aurait pour lors, pour un nombre Z d'oscillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}} \right),$$

où S représente ce que devient A après un nombre d'oscillations Z . Ainsi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu(m-1)}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}} \right]^{\frac{1}{m-1}}},$$

qui détermine la valeur de S , après un nombre quelconque Z d'oscillations.

Exemple II. — Si

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'},$$

μ' et m' ayant d'autres valeurs que μ et m , on aura, en suivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1} \frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S} + \frac{2\mu'}{m'+1} \frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S};$$

et si la force retardatrice est beaucoup moindre que la force de torsion, on aura, pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1}.$$

En général, si

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'} + \mu''(A - S)^{m''} + \dots,$$

on aura toujours pour une oscillation, en supposant R beaucoup plus petit que la force de torsion,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \dots$$

IX.

Expériences pour déterminer les lois de la force de torsion.

Préparation.

Sur une petite planche KA soutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD, le poteau montant AB a 4 pieds de hauteur, la traverse horizontale DE glisse le long du montant et se fixe au moyen d'une vis E; le cylindre ou le poids P porte dans sa partie supérieure, dans la prolongation de son axe, un bout d'aiguille *b* fixée à ce cylindre. Cette aiguille est saisie par la partie inférieure d'une double pince *a* qui se serre par des vis; la partie supérieure de cette pince saisit l'extrémité inférieure du fil de suspension; la partie inférieure de cette même pince saisit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité supérieure du fil de suspension est prise par une autre pince *g*, attachée à la traverse DE. Sur la planche AK qui sert de base à l'appareil, on pose un cercle divisé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre, on attache au-dessous du cylindre un index *eo*, dont l'extrémité *o* répond aux divisions du cercle.

X.

Expériences sur la torsion des fils de fer.

J'ai pris trois fils de clavecin tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés sur des bobines et numérotés.

Le fil de fer n° 12 supporte, avant de se rompre, 3 livres 12 onces (1836^{gr}); les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains (0^{gr}, 1365 par mètre).

Le fil de fer n° 7 supporte, avant de se rompre, un poids de 10 livres (4895^{gr}); les 6 pieds de longueur pèsent 14 grains (0^{gr}, 381 par mètre).

Le fil de fer n° 1 casse sous une tension de 33 livres (16,154); les 6 pieds de longueur pèsent 56 grains (1^{gr}, 525 par mètre).

Première expérience.

Fil de fer n° 12, cylindre pesant une demi-livre.

L'on a pris un cylindre de plomb pesant $\frac{1}{2}$ livre qu'on a suspendu au fil de fer n° 12 ; ce cylindre avait 19 lignes de diamètre et $6\frac{1}{2}$ lignes de hauteur ($D = 4,287$, $H = 1,466$), le fil de suspension avait 9 pouces (24,363) de longueur. On a fait tourner le cylindre autour de son axe sans déranger cet axe de son aplomb, et l'on a eu les résultats suivants :

Premier essai. — Lorsqu'on fait tourner le cylindre autour de son axe, d'un angle plus petit que 180° , il fait 20 oscillations sensiblement isochrones en 120^s .

Deuxième essai. — Mais, en tordant de trois cercles, les dix premières oscillations ont été de deux à trois secondes plus longues que les dix premières ; et, après les dix premières oscillations, l'amplitude des oscillations, qui était d'abord de trois cercles, se trouvait réduites à $\frac{3}{4}$ de cercle.

Deuxième expérience.

Fil de fer n° 12, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — En suspendant au même fil de fer n° 12 un cylindre qui pesait 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, on a eu pour un angle de torsion de 180° et au-dessous 20 oscillations sensiblement isochrones en 242^s .

Troisième expérience.

Fil de fer n° 7, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. — En suspendant au fil de fer n° 7 le cylindre de $\frac{1}{2}$ livre, on a eu, pour une torsion de 180° et au-dessous, 20 oscillations sensiblement isochrones en 42^s .

Quatrième expérience.

Fil de fer n° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les 20 oscillations ont été achevées en 85^s .

Cinquième expérience.

Fil de fer n° 1, cylindre pesant une demi-livre.

Essai. — Lorsqu'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur un poids de $\frac{1}{2}$ livre, sa raideur est si considérable que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser, en sorte que les oscillations sont très irrégulières, parce qu'elles dépendent, non seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

Sixième expérience.

Fil de fer n° 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur un poids de 2 livres, le fil est sensiblement redressé et l'on a, pour un angle de torsion de 45° et au-dessous, 20 oscillations sensiblement isochrones en 23^s .

Continuation des expériences.

Fils de laiton.

On a pris trois fils de laiton, correspondant, par le numéro et à peu près par la grosseur, aux trois fils de fer qu'on vient de soumettre aux expériences.

Le fil de laiton n° 12 portait, au moment de sa rupture, 2 livres 3 onces (1070); les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains (0,136 par mètre).

Le fil de laiton n° 7 portait, au moment de sa rupture, 14 livres (6853); les 6 pieds de longueur pèsent $18\frac{1}{2}$ grains (0,504 par mètre).

Le fil de laiton n° 1 casse sous une tension de 22 livres (10769); les 6 pieds de longueur pèsent 66 grains (1,797 par mètre).

Septième expérience.

Fil de laiton n° 12, cylindre pesant $\frac{1}{2}$ livre.

Essai. — La longueur du fil de suspension était de 9 pouces comme dans les expériences qui précèdent; on y a suspendu le cylindre pesant $\frac{1}{2}$ livre et l'on a eu, pour un angle de torsion de 360° et au-dessous, 20 oscillations sensiblement isochrones en 220^s .

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré 225^s et, après ces vingt premières oscillations, l'angle de torsion était encore de deux cercles à peu près.

Huitième expérience.

Fil de laiton n° 12, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — Le fil de suspension étant de 9 pouces et le cylindre pesant 2 livres, on a eu, pour un angle de 360° et au-dessous, 20 oscillations sensiblement isochrones en 442^s .

Avec un angle primitif de trois cercles de torsion, les vingt premières oscillations ont duré à peu près 444^s et l'angle primitif de torsion s'est trouvé réduit à deux cercles un quart.

Neuvième expérience.

Fil de laiton n° 7, cylindre pesant $\frac{1}{2}$ livre.

Essai. — La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360° et au-dessous, on a eu 20 oscillations sensiblement isochrones en 57^s .

Dixième expérience.

Fil de laiton n° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 360° et au-dessous, on a eu 20 oscillations sensiblement isochrones en 110^s .

Mais l'angle primitif de torsion étant de deux circonférences de cercle, on a eu les vingt premières oscillations en 111^s , et l'angle primitif de torsion, qui était de deux circonférences, s'est trouvé réduit à une circonférence et demie.

Onzième expérience.

Fil de laiton n° 1, cylindre pesant $\frac{1}{2}$ livre.

Essai. — Sous une tension de $\frac{1}{2}$ livre le fil de suspension n'est pas entièrement redressé, et le temps des oscillations, dépendant en partie de sa courbure primitive, est incertain.

Douzième expérience.

Fil de laiton n° 1, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50° et au-dessous, on a eu 20 oscillations sensiblement isochrones en 32^s .

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, on a eu les 20 premières oscillations en $33 \frac{1}{2}$ secondes; et au bout de ces oscillations l'angle primitif était réduit à un quart de cercle.

Treizième expérience.

Fil de laiton n° 7, cylindre pesant 2 livres.

Essai. — La longueur des fils de suspension, dans toutes les expériences précédentes, était de 9 pouces : comme on avait besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expériences, et l'on a eu, jusqu'à trois cercles de torsion et au-dessous, 20 oscillations sensiblement isochrones en 222^s .

XI.*Résultat des expériences qui précèdent.*

La force ou la réaction de la torsion des fils de métal doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différents poids à des fils de fer et de laiton, de grosseur et de longueur différentes : voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans déranger cet axe de la ligne verticale, ce fil se tordra : lorsque l'on abandonnera le cylindre, le fil par sa force de réaction fera effort pour reprendre sa situation naturelle ; cet effort fera osciller le cylindre autour de cet axe, plus ou moins de temps, suivant que la force élastique sera plus ou moins parfaite.

Mais nous trouvons, par toutes les expériences qui précèdent, que lorsque l'angle de torsion n'est pas très considérable, le temps des oscillations est sensiblement isochrone ; ainsi nous pouvons

regarder comme une première loi que, pour tous les fils de métal, lorsque les angles de torsion ne sont pas très grands, la force de torsion est sensiblement proportionnelle à l'angle de torsion.

Ayant trouvé par l'expérience que la force de réaction de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion, il en résulte que toutes les formules oscillatoires que nous avons données, n^{os} 4 et suivants, d'après la supposition d'une force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très petit, peuvent être appliquées à ces expériences.

Ainsi, comme nous avons eu (n^o 7), au moyen de ces formules,

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} \pi,$$

et que dans toutes les expériences qui précèdent les cylindres de demi-livre et de 2 livres avaient le même diamètre, il en résulte que n doit être toujours proportionnel à $\left(\frac{M}{T^2} \right)$.

Ainsi, si la tension plus ou moins grande du fil n'a point d'influence sur la force de torsion, pour lors la quantité n pour un même fil sera la même dans une tension de demi-livre et une tension de 2 livres, et par conséquent l'on aura T proportionnel à $M^{\frac{1}{2}}$. Comparons nos expériences faites avec deux poids, l'un de $\frac{1}{2}$ livre, l'autre de 2 livres, dont les racines sont comme 1 est à 2.

Première expérience. — Le fil de fer n^o 12, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en 120^s.

Deuxième expérience. — Le même fil, tendu par un poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 242^s.

Troisième expérience. — Fil de fer n^o 7, tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en 43^s.

Quatrième expérience. — Fil de fer n^o 7, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 85^s.

La cinquième expérience ne peut pas se comparer avec la sixième.

Septième expérience. — Fil de laiton n^o 12, tendu par le poids de $\frac{1}{2}$ livre, fait 20 oscillations en 220^s.

Huitième expérience. — Fil de laiton n^o 12, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442^s.

Neuvième expérience. — Fil de laiton n^o 7, chargé du poids de $\frac{1}{2}$ livre, fait 20 oscillations en 57^s.

Dixième expérience. — Fil de laiton n° 7, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 110^s.

La onzième et la douzième expérience ne peuvent pas être comparées entre elles.

Il résulte donc de toutes ces expériences qu'avec le même fil de métal un poids de 2 livres fait sensiblement ses oscillations dans un temps double de celui où un poids de $\frac{1}{2}$ livre fait ses oscillations; que par conséquent la durée de ces oscillations est comme la racine des poids; qu'enfin la tension, plus ou moins grande, n'influe pas sensiblement sur la réaction de la force de torsion.

Cependant, par beaucoup d'expériences faites avec de très grandes tensions relativement à la force du métal, il paraît que les grandes tensions diminuent ou altèrent un peu la force de torsion. On sent en effet qu'à mesure que la tension augmente le fil s'allonge, son diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oscillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton n° 4 sous les tensions de $\frac{1}{2}$ livre et de 2 livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des expériences, la tension de $\frac{1}{2}$ livre n'est pas suffisante pour redresser ces fils.

XII.

De la force de torsion relativement aux longueurs des fils.

Nous venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tension des fils n'influe que d'une manière insensible sur la force de torsion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torsion, la longueur du fil de suspension augmente ou diminue cette force. Mais il est clair que, à mesure que l'on augmente la longueur du fil de métal, on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, sans changer le degré de torsion; ainsi, la force de réaction de torsion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raison inverse de la longueur du fil. Voyons si ce raisonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule du n° 7 nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \pi,$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Ainsi, si n est en raison inverse des longueurs, comme la théorie l'annonce, T sera comme les racines des longueurs des fils de suspension. Comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton n° 7, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 110^s.

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton n° 7, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 222^s.

Ainsi les longueurs des fils sont entre elles :: 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont :: 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avait annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

XIII.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils

Nous venons de déterminer les lois de la force de torsion relativement à la tension et à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs et de même longueur; et dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur et de grosseurs différentes; mais, comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir: le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple

deux fils de même nature et de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que, dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion que dans celui qui a un diamètre simple; et que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainsi nous sommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torsion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une grosseur différente, est proportionnelle à la quatrième puissance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tension est de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les numéros, les fils du n° 1 n'étant pas assez exactement tendus par le poids de $\frac{1}{2}$ livre : nous avons :

Fils de fer.

Deuxième expérience. — Le fil de fer n° 12, dont les 6 pieds de longueur pèsent 5 grains, donne 20 oscillations en 242^s.

Quatrième expérience. — Le fil de fer n° 7, dont les 6 pieds de longueur pèsent 14 grains, donne 20 oscillations en 85^s.

Sixième expérience. — Le fil de fer n° 1, dont les 6 pieds pèsent 56 grains, donne 20 oscillations en 23^s.

Fils de laiton.

Huitième expérience. — Le fil de laiton n° 12, dont les 6 pieds pèsent 5 grains, a donné 20 oscillations en 442^s.

Dixième expérience. — Le fil de laiton n° 7, dont les 6 pieds pèsent 18 $\frac{1}{2}$ grains, donne 20 oscillations en 110^s.

Douzième expérience. — Le fil de laiton n° 1, dont les 6 pieds pèsent 66 grains, donne 20 oscillations en 32^s.

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torsion, relativement au diamètre du fil de suspension, supposons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{\frac{m}{2}} : \varphi'^{\frac{m}{2}},$$

où l'on suppose que T et T' représentent le temps d'un certain nombre d'oscillations pour un fil de métal, dont le diamètre est D

et D' , et le poids pour une même longueur φ et φ' , m étant la puissance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2(\log T - \log T')}{\log \varphi - \log \varphi'},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La deuxième expérience, comparée avec la quatrième, donne $m = -1,82$

La deuxième expérience, comparée avec la sixième, " $m = -1,95$

La huitième expérience, comparée avec la dixième, " $m = -2,04$

La huitième expérience, comparée avec la douzième, " $m = -2,02$

D'où il résulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'}.$$

Mais la formule du mouvement oscillatoire

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n} \right)^{\frac{1}{2}} \pi$$

donne, dans les expériences précédentes, à cause de l'égalité des poids de tension, n proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainsi la force de torsion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de grosseur différente, est comme la quatrième puissance du diamètre, ainsi que la théorie l'avait annoncé.

XIV.

Résultat général.

Il résulte donc de toutes les expériences qui précèdent que le *momentum* de la force de torsion est, pour les fils du même métal, en raison composée de l'angle de torsion, de la quatrième puissance du diamètre, et inverse de la longueur du fil; en sorte que, si l'on nomme l la longueur du fil, D son diamètre, B l'angle de torsion, on aura, pour l'expression qui représente la force de torsion,

$$\frac{\mu B D^4}{l},$$

où μ est un coefficient constant qui dépend de la raideur naturelle

de chaque métal : cette quantité μ , invariable pour les fils de même métal, peut se déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article suivant.

XV.

Valeur effective des quantités n et μ .

Nous avons vu, n° VII, que

$$n = \frac{P a^3}{2 \lambda},$$

où P est le poids d'un cylindre, a son rayon, λ la longueur du pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, qui sont produites par la force de torsion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience*, où le fil de fer n° 12, est tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon est $9 \frac{1}{2}$ lignes, et où 20 oscillations se font en 242^s .

Comme le pendule, qui bat les secondes à Paris, est de $440 \frac{1}{2}$ lignes (99,37), le pendule isochrone, avec les oscillations du cylindre, sera

$$440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2;$$

ainsi

$$n = \frac{2^{liv} (9 \frac{1}{2})^3}{2 \cdot 440 \frac{1}{2} \left(\frac{242}{20} \right)^2} = \frac{1^{liv}}{715},$$

ainsi le *momentum* nB du fil de fer n° 12, ayant 9 pouces de longueur, est égal à $\frac{1}{715}$ livre, multiplié par l'angle de torsion B , agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

[Soit 151,50 (C.G.S) pour ce fil, et 3691 pour un fil n° 12 de 0^m,01 de longueur, et tordu d'un angle égal à 1; ou encore un couple 64,42 (C.G.S) est nécessaire pour tordre ce fil de longueur 1, de un degré.

Nous avons vu, dans les numéros qui précèdent, que pour le même métal il résultait de la théorie et de l'expérience que les forces de torsion étaient en raison inverse de la longueur des fils de suspension et de la quatrième puissance du diamètre. Ainsi, il est facile d'avoir une valeur déterminée de la force de torsion

d'un fil de fer, d'une longueur et d'une grosseur quelconques; en voici le calcul.

Le pied cube de fer, pesant à peu près 540 livres, et les 6 pieds de longueur du fil de fer n° 12 pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très approchant de $\frac{1}{13}$ de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, de $\frac{1}{13}$ de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{713}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

On peut encore déduire des expériences de Coulomb le coefficient μ de Lamé (*rigidity* des auteurs anglais); en admettant 7,8 pour poids spécifique de son fil, on doit avoir $\mu = n \times \frac{2L}{\pi R^4} = 7,628.10^{11}$.

XVI.

Comparaison de la raideur de torsion de deux métaux différents.

On déduira facilement, de la théorie et des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différents, le fer, par exemple, et le cuivre jaune, le rapport de raideur de torsion : prenons le fil de fer n° 12, que nous comparerons avec le fil de laiton n° 12.

Nous venons de calculer à l'article précédent la quantité n , pour le fil de fer, et nous l'avons trouvée égale à $\frac{1}{713}$ livre, multiplié par un levier d'une ligne. Mais, comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442^s, nous aurons, par la même formule pour le fil de laiton,

$$n' = \frac{1^{\text{liv}} \left(9\frac{1}{2}\right)^2}{440 \frac{1}{2} \left(\frac{442}{20}\right)^2};$$

ainsi

$$\frac{n}{n'} = \left(\frac{442}{242}\right)^2 = 3,34;$$

ainsi la raideur du fil de fer n° 12 est à la raideur du fil de laiton, n° 12 à peu près :: 3 $\frac{1}{3}$: 1.

Mais, comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer et du cuivre, qui, suivant M. Musschenbroek, sont

:: 77 : 83, on peut supposer que le fil de fer n° 12 et celui de cuivre, *même numéro*, ont à peu près le même diamètre; ainsi, pour les fils de fer et de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les raideurs de torsion sont :: $3\frac{1}{3}$: 1, c'est-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle on aura la même réaction de torsion qu'en tordant le fil de cuivre de $3\frac{1}{3}$ cercles.

On conclut de ce chiffre, en supposant le poids spécifique du laiton 8,6, que le coefficient μ' du laiton = $\frac{1}{3,34} \cdot \frac{8.6^2}{7.8^2} \cdot \mu = 2,78 \cdot 10^{11}$, nombre notablement inférieur à ceux indiqués par sir W. Thomson, Wertheim et M. Everett, qui indiquent de 3,4 à 4. 10^{11} .

Si l'on veut ensuite comparer la raideur de torsion avec la force de cohésion, on remarquera que notre fil de fer portait, au moment de sa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portait que 35 onces; ainsi, puisqu'ils ont à peu près le même diamètre, leur force de cohésion était approchant :: 60 : 35, dans le temps que leur force de torsion vient d'être trouvée :: $3\frac{1}{3}$: 1.

Ce dernier résultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier et non comme un résultat général. Nous verrons, dans la deuxième Section de ce Mémoire, que la force des métaux varie suivant le degré d'écrouissement et de recuit, et que toutes les expériences dont on s'est servi jusqu'ici pour déterminer la force des métaux ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière observation semble indiquer, et ce que la pratique confirme, c'est que, si l'on veut soutenir un corps mobile sur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer à un pivot de cuivre, puisque, sous le même degré de pression, le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre; qu'ainsi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, pressée par le corps qu'elle soutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps sur la pointe d'un pivot : nous aurons occasion par la suite de revenir sur cet article.

Par quelques expériences et par un calcul semblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en suspendant un cylindre à un fil

de soie, formé de plusieurs brins réunis à l'eau bouillante, et assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avait 18 à 20 fois moins de raideur de torsion que le fil de fer qui portait ce même poids au moment de sa rupture.

XVII.

Usage des expériences et de la théorie qui précède.

D'après la théorie qui précède et les expériences sur lesquelles elle est fondée, on pourra mesurer des forces très petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir : nous allons en présenter un exemple.

XVIII.

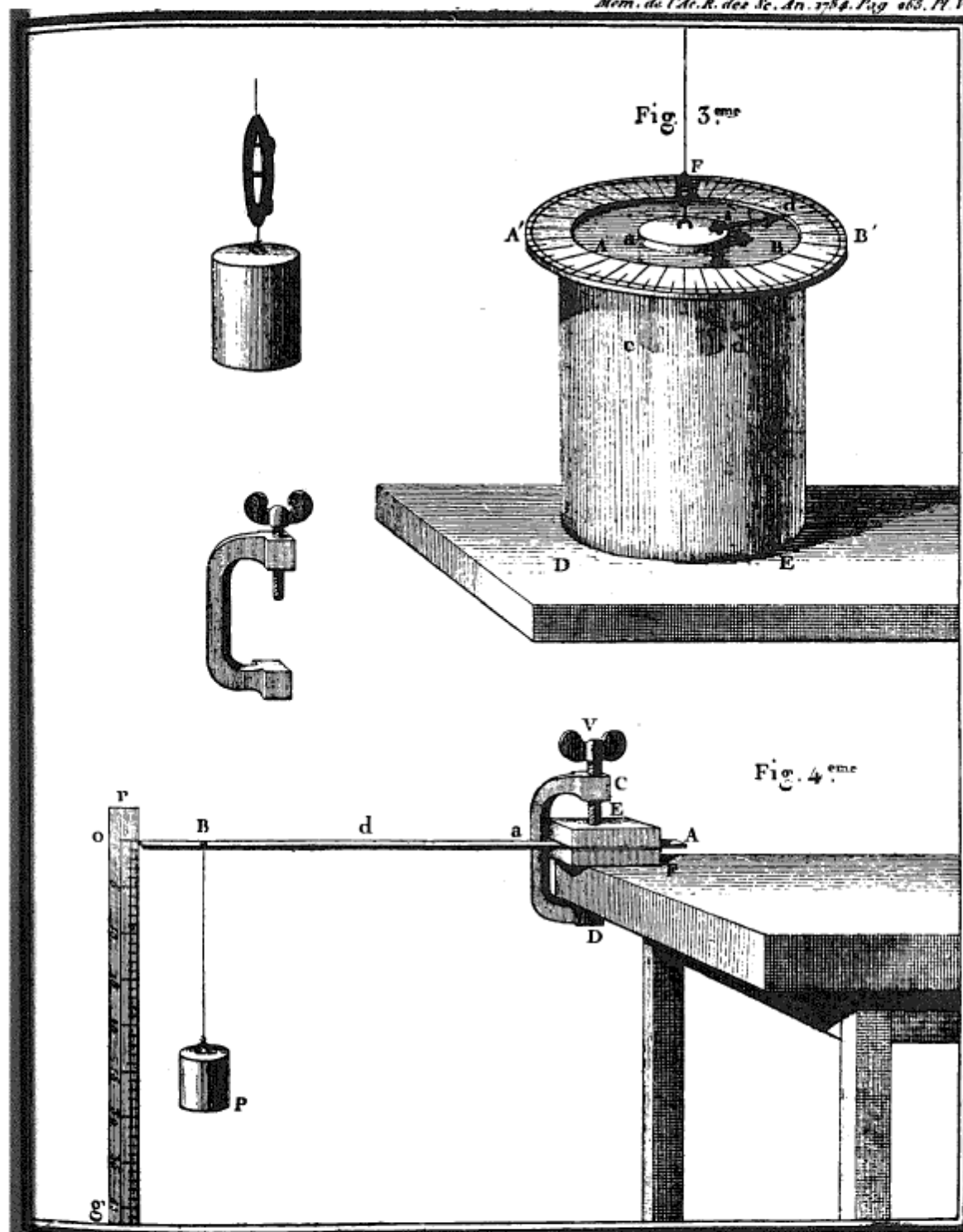
Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

La formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement paraît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, et dont les autres sont dus au frottement du fluide : parmi les termes dus au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, et que l'on croit constant ; mais ce terme est si petit que, confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très difficile de l'évaluer : on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. (*Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scolie du vingt-cinquième théorème.*)

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase ADBE (*fig. 3*), rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de plomb ; on place dessus le vase un cercle A'F'B', divisé en degrés ; ce cercle se trouve au niveau de l'extrémité *d* d'un index *id* attaché au cylindre.

Lorsque l'on fera tourner le cylindre autour de son axe vertical, sans le déranger de son aplomb, on pourra observer, au moyen du



Fac-simile de la Planche originale V.

petit index, de combien chaque oscillation est altérée : et, comme la force de torsion du fil qui produit ces oscillations est connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut aussi connaître l'altération due à l'imperfection de l'élasticité, en faisant osciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air, on peut espérer, par ce moyen, de trouver la quantité constante due à l'adhérence.

Exemple et expérience.

J'ai suspendu dans un vase plein d'eau, à un fil de cuivre n° 12, de 29 pouces de longueur, le cylindre de plomb pesant deux livres, qui nous a servi dans les expériences précédentes : le cercle AB, sur lequel on observait les oscillations, avait 44 lignes de diamètre; on a attendu, avant de commencer les observations, que les amplitudes des oscillations fussent diminuées au point que l'extrémité *d* de l'index ne parcourût sur le cercle qu'un arc d'une ligne et demie, répondant à peu près à 3° 55'; et, en observant la marche de l'index avec une loupe, on a aperçu distinctement 14 oscillations avant que le mouvement fût éteint.

Résultat de cette expérience.

Si la diminution successive de chaque oscillation est supposée constante, et qu'elle soit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la surface du cylindre de plomb, on aura (n° VIII).

$$(A - S') = \left(\frac{2\mu}{\kappa} \right),$$

où $(A - S')$ est la diminution de chaque oscillation, $n(A - S')$ le *momentum* de la force de torsion, et μ le *momentum* de la force retardatrice due à l'adhérence.

Mais comme, d'après les observations des oscillations, l'arc parcouru était diminué de $1\frac{1}{2}$ ligne en 14 oscillations et que le rayon du cercle sur lequel s'observait cette diminution était de 22 lignes, en supposant cette diminution constante, on aura l'angle $(A - S)$, dont l'amplitude diminue à chaque oscillation égal à $\frac{3}{2 \cdot 22 \cdot 14}$.

Mais nous avons trouvé (n° XVI) que, pour un fil de laiton de

9 pouces de longueur n° 12,

$$n = \frac{1^{\text{liv}} \cdot (9\frac{1}{2})^2}{440 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{442}{20}\right)^2};$$

et, comme nous avons aussi trouvé que les forces de torsion sont proportionnelles à la longueur des fils de suspension, on aura pour notre fil de 29 pouces de longueur

$$\mu = \frac{1}{3.155.000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne},$$

c'est-à-dire que le *momentum* de la force retardatrice constante μ est à peu près égal à un trois millionième de livre, suspendu à un levier d'une ligne : quantité qui aurait été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb submergée par l'eau du vase était de 24 lignes, et que le diamètre de ce cylindre était de 19 lignes. Ainsi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la surface du cylindre submergée était égale à $\frac{22}{7} \cdot 19 \cdot 24$; et, comme le mouvement se fait ici autour de l'axe du cylindre, dont le rayon est $9\frac{1}{2}$ lignes, si δ est l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation sera

$$\delta \frac{22}{7} (19)^2 \cdot 12.$$

Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la base du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum* égale

$$\delta \frac{22}{7} 19 \frac{1}{2} \frac{19^2}{4} \frac{2}{3} \frac{19}{2},$$

en sorte que le *momentum* total de résistance du fluide contre le cylindre sera

$$\delta \frac{22}{7} (19)^2 \left(12 + \frac{19}{12}\right) = \delta \frac{22}{7} (19)^2 \left(\frac{163}{12}\right).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum* égal à

$$\frac{1^{\text{liv}}}{3.155.000} \cdot 1^{\text{lg}};$$

ainsi

$$\delta = \frac{1^{\text{liv}}}{3155000} \frac{7.12}{22.163.(19)^2},$$

pour une ligne carrée; et pour un pied carré l'adhérence sera

$$\delta(144)^2 = \frac{1^{\text{liv}}}{2345000},$$

(soit $1,94 \cdot 10^{-4}$ dyne par centimètre carré),

en sorte que la résistance constante due à l'adhérence de l'eau pour une surface de 255 pieds ne peut pas être évaluée à plus d'un grain; ainsi il y a peu de cas où cette altération constante, si elle a lieu, ne puisse être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun essai sur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oscillations de deux ou trois cercles d'amplitude, et comparant les diminutions successives des amplitudes des oscillations avec les formules du mouvement oscillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très petites vitesses ce frottement est comme les vitesses, et dans les grandes vitesses, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, et à être faites dans différents fluides.

XIX.

Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai construit, d'après la théorie de la réaction de torsion que je viens d'expliquer, une balance électrique et une balance magnétique; mais, comme ces deux instruments, ainsi que les résultats relatifs aux lois électriques et magnétiques qu'ils ont donnés, seront décrits dans les Volumes suivants de nos Mémoires, je crois qu'il suffit ici de les annoncer.

XX.

SECONDE SECTION.

De l'altération de la force élastique dans les torsions des fils de métal. Théorie de la cohérence et de l'élasticité.

Lorsque l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, on observe deux choses : si l'angle de torsion n'est pas considérable, relativement à

la longueur du fil de suspension, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu près à la position qu'il avait avant la torsion du fil de métal, c'est-à-dire que le fil de suspension se détord de toute la quantité dont il a été tordu ; mais si l'angle de torsion que l'on aura donné au fil de suspension est très grand, pour lors ce fil ne se détord que d'une certaine quantité, et le centre de réaction de torsion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne sera pas détordu. C'est donc d'après ces deux considérations qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette section, ce qui demande deux suites d'expériences ; la première, pour déterminer, par la diminution des oscillations, de combien la force élastique de torsion est altérée dans le mouvement oscillatoire, quoique le centre de réaction de torsion ne soit pas déplacé ; la seconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction lorsque l'angle de torsion est assez grand pour que ce déplacement ait lieu.

XXI.

Première expérience.

Fil de fer n° 1, longueur 6 pouces 6 lignes (17,96).

On a pris un fil de fer de 6 pouces 6 lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de 2 livres, le même qui a servi dans les expériences de la section précédente. On a cherché, en faisant tourner ce cylindre autour de son axe pour tordre le fil de suspension, à déterminer de combien de degrés l'amplitude diminuait à chaque oscillation, et l'on a trouvé :

	Angle de torsion.	Perte de 10° en
Premier essai.....	90°	3 $\frac{1}{2}$ oscillations
Deuxième essai.....	45	10 $\frac{1}{2}$
Troisième essai.....	22 $\frac{1}{2}$	23
Quatrième essai.....	11 $\frac{1}{4}$	46

Remarque sur cette expérience.

Les diminutions des amplitudes des oscillations ont été très incertaines, lorsque l'angle primitif de torsion a été de plus de 90° ; on a même observé que pour lors, en faisant tourner le cylindre autour de son axe, il ne revient pas à sa première position et que la position respective des parties constitutives du fil a été

altérée, et, par conséquent, que son centre de réaction de torsion est resté déplacé : voici ce que l'expérience fournit sur ce déplacement.

XXII.

Suite de la première expérience.

Dans cette partie de la première expérience, on a cherché le déplacement du centre de torsion, suivant le degré de torsion que l'on a donné au fil de suspension.

	Torsion.	Déplacement de l'index du centre de torsion.
Premier essai.....	$\frac{1}{2} C$	8°
Deuxième essai.....	1	50
Troisième essai.....	2	310
Quatrième essai.....	3	1 C + 300
Cinquième essai.....	4	2 + 290
Sixième essai.....	5	3 + 280
Septième essai.....	6	4 + 260
Huitième essai.....	10	8 + 240

Neuvième essai. — Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil était droit et très raide, il s'était séparé, suivant sa longueur, en deux parties; examinée à la loupe, cette séparation était très sensible et il avait exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

XXIII.

Remarque sur cette expérience.

Cette première expérience et sa suite paraissent annoncer qu'au-dessous de 45° les altérations sont à peu près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième et quatrième essais de l'expérience première; qu'au-dessus de 45° les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu près d'une demi-circonférence; que ce déplacement croît à mesure qu'on tord le fil; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 C + 10°; que, passé ce terme de torsion, la réaction de torsion reste à peu

près la même pour tous les angles de torsion ; ainsi, par exemple, en tordant dans le quatrième essai de trois cercles, le centre de réaction de torsion se déplace d'un cercle $+ 300^{\circ}$, en sorte que la réaction de torsion n'a ramené le cylindre que d'un cercle $+ 60^{\circ}$. Dans le septième essai, nous voyons que, après avoir déjà éprouvé dans les essais antérieurs un déplacement de plus de 8 cercles, 6 nouveaux cercles de torsion déplacent le centre de réaction de torsion de $4C + 260^{\circ}$, en sorte que, pour plus de 14 cercles de torsion, la réaction de torsion n'est encore que de $1C + 100^{\circ}$; ainsi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torsion pour 3 cercles de torsion que le quatrième essai nous a donnée de $1C + 60^{\circ}$: les expériences qui vont suivre éclairciront cette remarque.

XXIV.

Deuxième expérience.

Fil de fer n° 7, longueur 6 pouces 6 lignes.

On a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oscillations diminuaient à chaque oscillation, lorsque le centre de torsion n'était pas encore déplacé.

	Angle de torsion.	Perte de 10° en
Premier essai.....	180°	$3\frac{1}{2}$ oscillations
Deuxième essai.....	90	12
Troisième essai.....	45	27
Quatrième essai.....	$22\frac{1}{2}$	57

Suite de la deuxième expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, on a cherché le déplacement du centre de torsion.

	Torsion.	Déplacement du centre de réaction de torsion.
Premier essai.....	3 cercles	300°
Deuxième essai.....	4	$1C + 180$
Troisième essai.....	6	$3 + 90$
Quatrième essai.....	8	$5 + 90$
Cinquième essai.....	12	$9 + 40$
Sixième essai.....	20	$16 + 310$
Septième essai.....	30	$26 + 180$
Huitième essai.....	50	$46 + 20$
Neuvième essai.. Au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.		

XXV.

Troisième expérience.

Fil de fer n° 12, longueur 6 pouces 6 lignes.

La première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

	Angle de torsion.	Perte de 10° en
Premier essai.....	360°	1 oscillations
Deuxième essai.....	180	2
Troisième essai.....	90	5
Quatrième essai..	45	11
Cinquième essai..	22 $\frac{1}{2}$	25

Suite de la troisième expérience.

Déplacement du centre de torsion.

	Torsion.	Déplacement du centre de réaction de torsion.
Premier essai.....	4 cercles	300°
Deuxième essai.....	6	2 C + 40
Troisième essai....	Aux six autres tours le fil a cassé.	

XXVI.

Quatrième expérience.

Fil de laiton n° 1, longueur 6 pouces 6 lignes.

Les expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton employés aux expériences de la première section.

	Angle de torsion.	Perte de 10° en
Premier essai.....	180°	2 oscillations
Deuxième essai.....	90	6
Troisième essai.....	45	16
Quatrième essai.....	22 $\frac{1}{2}$	40
Cinquième essai.....	11 $\frac{3}{4}$	80

Suite de la quatrième expérience.

Déplacement du centre de torsion.

	Torsion.	Déplacement du centre de torsion.
Premier essai.....	2 cercles	160°
Deuxième essai.....	4	2 C + 0
Troisième essai.....	6	3 + 300
Quatrième essai.....	10	7 + 300
Cinquième essai.....	20	17 + 340
Sixième essai....	Au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.	

Cinquième expérience.

Fil de laiton n° 7, longueur 6 pouces 6 lignes.

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

	Angle de torsion.	Perte de 10° en
Premier essai.....	360°	2 $\frac{1}{2}$ oscillations
Deuxième essai.....	180	6
Troisième essai....	90	13
Quatrième essai.....	45	31
Cinquième essai.....	22 $\frac{1}{2}$	72

Suite de la cinquième expérience.

Déplacement du centre de torsion.

En tordant de 4 cercles, le centre s'est déplacé de 220°; mais en voulant tordre de 6 cercles le fil a cassé.

XXVII.

Dans le fil employé à cette dernière expérience, la torsion altère moins les oscillations et, par conséquent, la force élastique que dans toutes les autres; c'est ce qui résulte du grand nombre d'oscillations qui a lieu ici avant que le mouvement oscillatoire soit détruit; c'est ce qui résulte également de la rupture soudaine de ce fil, sans pouvoir déplacer d'un cercle son centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton répandus dans le commerce, entre les n° 5 et 8, étaient ceux dont l'élasticité de torsion était la moins imparfaite : en comparant les fils de fer et de laiton sous les *mêmes numéros*, on trouve également

que les fils de laiton ont une amplitude d'élasticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au surplus, l'expérience présente beaucoup d'irrégularités dans les résultats : deux bobines du même fil et du même numéro ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torsion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils sont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande pression qu'ils éprouvent en passant sous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire successivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

XXVIII.

Première remarque.

Malgré l'incertitude qui règne dans les expériences des oscillations pour les étendues des amplitudes, il paraît qu'en dedans de certaines limites ces altérations sont à peu près proportionnelles à l'amplitude de l'oscillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques sur la première expérience et comme toutes les autres le confirment. La résistance de l'air ne peut altérer que très peu, dans nos expériences, l'amplitude des oscillations; je m'en suis assuré par le moyen suivant : le poids de 2 livres, qui a servi aux expériences de cette section, avait 26 lignes de hauteur et 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très léger une surface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avait 70 lignes de hauteur; je faisais entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier et je formais ainsi un cylindre de 78 lignes de hauteur ou trois fois plus long que le premier, ce qui aurait dû tripler, dans le mouvement oscillatoire, les altérations dues à la résistance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fussent d'un dixième plus considérable dans ce second cas que dans le premier : le plus souvent elles étaient égales; ainsi la résistance de l'air n'entre dans nos expériences que pour des quantités qu'on peut négliger.

XXIX.

Deuxième remarque.

Pour former une balance de torsion, il faut toujours choisir les fils qui ont l'élasticité la moins imparfaite; les fils de laiton sont de beaucoup préférables à ceux de fer : le choix de la grosseur dépend des forces qu'on veut mesurer. J'ai une balance magnétique qui sera décrite dans nos Mémoires, où je me suis servi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des n^{os} 12 et 7; la force élastique de torsion est telle, qu'en tenant ces fils tordus de 8 cercles, pendant 30 heures, il n'y avait pas 1^o d'altération ou de déplacement dans le centre de torsion.

XXX.

Troisième remarque.

Dans tous les fils de métal, la réaction de l'élasticité n'a qu'une certaine étendue : l'isochronisme des oscillations nous apprend que dans les premiers degrés de torsion la force élastique est presque parfaite; mais au delà de l'angle de torsion qui sert, pour ainsi dire, de mesure à la force élastique, le centre de réaction de torsion se déplace presque en entier de tout l'angle de torsion qui excède celui de la réaction de l'élasticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élastique n'est pas une quantité constante pour tous les angles de torsion : elle croît à mesure que la torsion augmente; moins l'élasticité première dans le fil soumis à l'expérience a d'étendue, plus cet accroissement est grand. Un fil de laiton n^o 1, de $6\frac{1}{2}$ pouces de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit la plus grande partie de son élasticité, ne donnait après cette opération, pour le premier cercle de torsion, que 50° de réaction d'élasticité; mais il avait acquis, après 90 cercles de torsion, une étendue d'élasticité de près de 500° dans cet intervalle; du deuxième au troisième cercle de torsion, la réaction de l'élasticité s'était accrue de 12°; du quarantième au quarante et unième cercle de torsion, la même réaction s'était accrue de 6°, et du quatre-vingt-dixième au quatre-vingt-onzième cercle de torsion, à peu

près de 1° , en sorte que l'accroissement de la réaction élastique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, était à peu près en raison inverse de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torsion j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'est rompu au quarante-neuvième, en sorte que ce fil, avant de se rompre, pouvait être tordu de 140 cercles. Si l'on compare ce résultat avec la suite de la première expérience où le même fil n° 1 n'avait pas été recuit, on trouvera qu'après 25 cercles de torsion la réaction de l'élasticité était de 480° , qu'en tordant de 15 nouveaux cercles le fil s'est cassé; ce dernier fil ne pouvait donc éprouver, sans se rompre, que 40 cercles de torsion. En suivant dans cette expérience la marche de la réaction élastique, on en déduira qu'au point de la rupture cette réaction était à peu près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paraîtrait que l'on est en droit de conclure que par la seule torsion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élasticité dont il peut être susceptible et que l'écroutissement ne peut rien y ajouter; en sorte que réciproquement, si, en passant à la filière ou par un autre moyen quelconque, on avait pu donner à notre fil de laiton un écroutissement tel que sa réaction d'élasticité eût été de 520° , qui me paraît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élastique eût été portée à son *maximum* par cette première opération: il n'y aurait plus eu de déplacement possible dans le centre de réaction de torsion; mais toutes les fois que l'on aurait fait éprouver à ce fil une torsion de plus de 520° , il se serait rompu.

XXXI.

Quatrième remarque.

D'après les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paraît, comment on peut expliquer l'élasticité et la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élasticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes sont proportionnelles aux dilata-tions ou compressions qu'elles éprouvent; mais elles ne sont liées

entre elles que par la cohérence, quantité constante et absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'allongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entre elles changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion est moins considérable que la force d'adhérence; mais, lorsque l'angle de torsion devient tel, que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement de parties a lieu dans tous les corps ductiles; mais, si par ce glissement de parties les unes sur les autres le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente et l'étendue du champ d'élasticité devient plus grand. Cependant, comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que jusqu'à un certain degré, au delà duquel ce corps se rompt; c'est ce qui explique les effets détaillés dans le numéro qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit sans altérer pour cela l'élasticité. C'est ainsi que, lorsque je faisais recuire à blanc mon fil de cuivre n° 1 des expériences précédentes, il perdait une grande partie de sa force de cohérence : avant d'être recuit, il portait au point de rupture 22 livres et, après le recuit, il portait à peine 12 à 14 livres; mais, quoique l'adhérence fût presque diminuée de moitié par le recuit et que l'amplitude d'élasticité fût presque diminuée dans la même proportion, cependant, dans toute l'étendue de réaction élastique qui restait au fil recuit, l'élasticité était la même, à angle égal de torsion, que dans le même fil non recuit, puisque, en suspendant à l'un et à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oscillations était exactement égal dans les deux cas.

XXXII.

Un effet assez curieux du rapprochement des parties dans la torsion des fils de métal, c'est celui qui a lieu lorsqu'on tord un fil de fer qui, par cette seule opération, acquiert par le rapprochement

des parties la qualité de prendre le magnétisme à un plus haut degré qu'il ne l'avait auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce sujet : j'ai pris un fil de fer tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la grosseur de ceux qui servent pour les petites sonnettes ; une longueur de 6 pouces pesait 57 grains (3,13) ; ce fil de 6 pouces (16,24), aimanté et suspendu horizontalement par un fil de soie détordu et très fin, faisait une oscillation en 18^s : ce même fil de 6 pouces de longueur, tordu jusqu'au point de rupture et aimanté comme la première fois à saturation par la méthode de la double touche, faisait 1 oscillation en 6^s ; en sorte que, le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales et semblables étant comme l'inverse du carré du temps d'un même nombre d'oscillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue était neuf fois plus considérable que celui de l'aiguille non tordue ; j'aurai occasion de revenir sur cet article dans un autre Mémoire.

XXXIII.

Pour confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence et à l'élasticité, j'ai fait l'expérience suivante.

On a fixé (*fig. 4*), au moyen d'une agrafe CD avec une vis V, une lame d'acier AB sur le bord d'une table très solide ; cette lame était prise et serrée dans sa partie Aa entre deux plaques de fer E et F par la vis V : cette lame avait 11 lignes (2,48) de large et demi-ligne d'épaisseur ; depuis le point a jusqu'au point B où était suspendu le poids P ; il y avait 7 pouces (18,95) de distance ; on mesurait sur la règle verticale *rg* de combien le poids P faisait baisser la lame AB à son extrémité B. Voici le détail des résultats qui ont eu lieu suivant les différents poids dont la lame était chargée.

On a fait rougir la lame à blanc et on lui a donné une trempe très raide ; ensuite on a attaché en B, à 7 pouces du point a, différents poids. L'extrémité B a baissé :

Avec un poids de $\frac{1}{2}$ livre (245), de.....	8 lignes (1,80)
Avec un poids de 1 livre (489), de.....	15 $\frac{1}{2}$ (3,49)
Avec un poids de 1 $\frac{1}{2}$ livre (734), de.....	23 (5,19)

On a pris cette même lame et on l'a fait chauffer jusqu'à ce

qu'elle eût pris la couleur violette et qu'elle fût revenue à la consistance d'un excellent ressort, et l'on a trouvé également qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité B a baissé :

Avec un poids de $\frac{1}{2}$ livre, de	8 lignes
Avec un poids de 1 livre, de	$15\frac{1}{2}$
Avec un poids de $1\frac{1}{2}$ livre, de	23

Enfin on a fait rougir cette même lame à blanc, on l'a laissé refroidir très lentement, et l'on a eu, en chargeant l'extrémité B, exactement les mêmes résultats que dans les deux expériences qui précèdent.

Il nous paraît que ces trois expériences prouvent d'une manière incontestable que, dans quelque état que se trouve la lame, les premiers degrés de sa force élastique ne sont nullement altérés, puisque, en tenant compte du bras de levier qui diminue à mesure que la lame est chargée, les mêmes poids la fléchissaient dans les trois états également et proportionnellement à la charge, que lorsqu'on ôtait ces poids elle reprenait exactement sa première position horizontale.

J'ai voulu voir ensuite quelle était la force de cette lame dans ces trois états différents, et dans le cas où le centre de flexion commencerait à se déplacer, quel serait le degré de flexion où la lame commencerait à être pliée sans revenir à sa première position. Voici le résultat de cette expérience.

J'avais fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Angleterre trois lames exactement semblables à celle de l'expérience qui précède; une de ces lames avait été trempée très raide, la seconde était revenue à la consistance d'un excellent ressort et la troisième avait été recuite à blanc et refroidie lentement. J'attachais (*fig. 4*) un peson en *d* à $2\frac{1}{2}$ pouces de distance du point *a*, et j'avais soin d'exercer la traction toujours perpendiculairement à la direction de la lame. Voici ce qu'on a observé.

La lame trempée très raide se rompait sous une traction de 6 livres; mais, sous quelque angle qu'elle fût fléchie au-dessous de celui de rupture, elle reprenait exactement sa première position. La lame revenue couleur violette, formant un excellent ressort, ne se rompait que sous une traction de 18 livres; elle se pliait jusqu'au point de rupture d'un angle à peu près proportionnel à

l'angle de torsion, et sous quelque angle qu'elle fût fléchie avant celui de rupture, lorsqu'on la lâchait, elle reprenait sa première position. La lame recuite à blanc et refroidie lentement se pliait jusqu'à une traction de 5 à 6 livres, proportionnellement à cette force de traction, et d'un angle absolument égal sous la même force que dans l'état de trempe et de ressort; mais en tirant ensuite toujours perpendiculairement à la direction de la lame pour conserver le même levier, avec une force de 7 livres, on la pliait sous tous les angles sans qu'il fût besoin d'augmenter cette force; en la lâchant elle se relevait seulement de la quantité dont elle avait été primitivement fléchie par une traction de 6 livres, en sorte que l'angle de réaction de flexion se trouvait changé de tout l'angle dont on l'avait fléchi avec une force plus grande que 7 livres.

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes résultats que celles qui ont précédé. Il est clair que, pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut distinguer la force élastique des parties intégrantes de la force d'adhérence qui réunit ces parties entre elles; la force élastique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compression ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent et est toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne sont altérées ni par la trempe ni par le recuit, puisque nous venons de voir que, dans ces différents états, l'élasticité est la même sous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes ne sont liées entre elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure et de la portion respective des différents fluides dont leurs pores sont remplis, ce qui varie suivant la trempe et le recuit. Dans l'acier trempé raide et dans les bons ressorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni glisser l'une sur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, sans que le corps ne se rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent glisser l'une sur l'autre et se déplacer, sans que l'adhérence en soit sensiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux paraît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties sont toujours d'une parfaite élasticité, mais les corps sont durs, mous ou fluides suivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs elles

peuvent glisser l'une sur l'autre sans que leur distance soit sensiblement altérée, le corps sera ductile ou malléable; mais si elles ne peuvent pas glisser l'une sur l'autre sans que leur distance respective soit sensiblement altérée, le corps se rompra lorsque la force avec laquelle le corps sera tiré ou comprimé sera égale à l'adhérence.

