IV.

IL CRITERIO DELLA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

Nei suoi *Μηχανικὰ προβλήματα* Aristotile considera una bilancia il cui giogo sia costituito da una trave prismatica a sezione rettangolare, sospesa ad un filo in corrispondenza del punto di mezzo A del suo bordo superiore (fig. 38): e si domanda per qual ragione una tale bilancia, una volta spostata dalla sua posizione orizzontale di equilibrio, ed abbandonata a se stessa, tenda a ritornare alla posizione primitiva: in altre parole si domanda perchè l'equilibrio di una tal bilancia sia stabile.

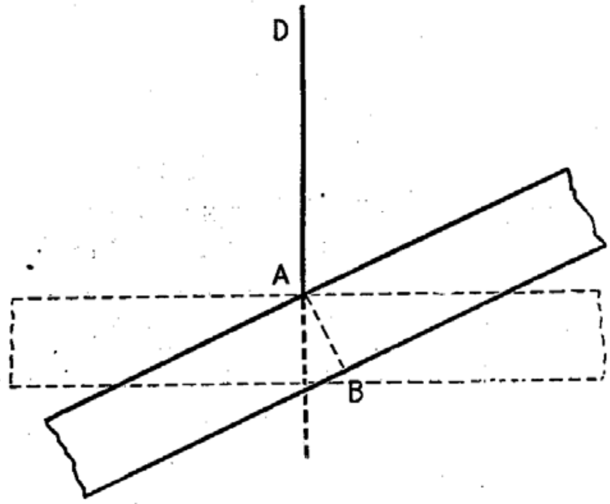

Fig. 38.

La sua risposta è la seguente: se il giogo è stato, come nella nostra figura, abbassato dalla parte sinistra, la porzione di esso che viene con ciò a trovarsi a destra della verticale di sospensione DA è più grande, e perciò più pesante, di quella che resta a sinistra della stessa verticale: la prima tenderà quindi ad abbassarsi costringendo la seconda a sollevarsi, e ciò riporterà la bilancia verso la posizione di equilibrio.

Passando poi a considerare il caso in cui il giogo, invece di essere sospeso, fosse appoggiato in corrispondenza del punto di mezzo B del suo bordo inferiore (fig. 39) Aristotile scrive: “ il contrario accade se il punto di appoggio sta al di sotto „.

***

Ancora a proposito della leva, il problema della stabilità dell'equilibrio si è certamente e ripetutamente presentato agli studiosi dell'evo medio: a quelli in particolare della scuola di Jordanus de Nemore.

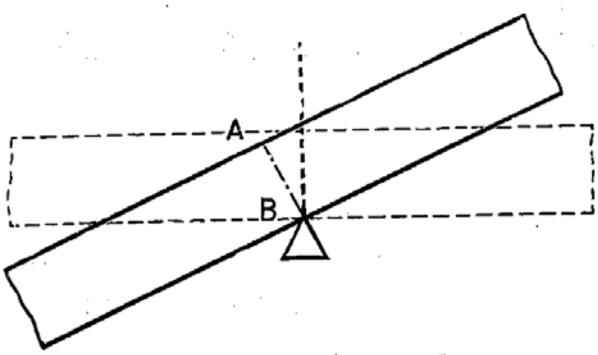

Fig. 39.

Noi ignoriamo se, e fino a qual punto, l'anonimo Autore della bella trattazione del problema della leva angolare che noi abbiamo a suo tempo riferita, si sia reso conto che l'ineguaglianza dei lavori da lui riscontrata là dove per la leva rettilinea il suo maestro Jordanus aveva trovata identità, stesse ad indicare una stabilità dell'equilibrio da lui trattato, stabilità che nel caso della leva rettilinea non trovava riscontro.

Certo di ciò si è reso conto Leonardo da Vinci il quale riconosce la stabilità della bilancia come direttamente subordinata alla condizione che la congiungente dei punti a cui i due pesi sono sospesi passi al di sotto del punto di appoggio: poichè in tal caso, come egli giustamente osserva, scostato il sistema dalla posizione di equilibrio, il braccio di leva si trova ad essere accresciuto per quella delle forze il cui punto di applicazione si è innalzato, si trova ad essere diminuito per l'altra: epperò il peso che si è sollevato viene a prevalere su quello che si è abbassato determinando il ritorno del sistema verso la posizione iniziale.

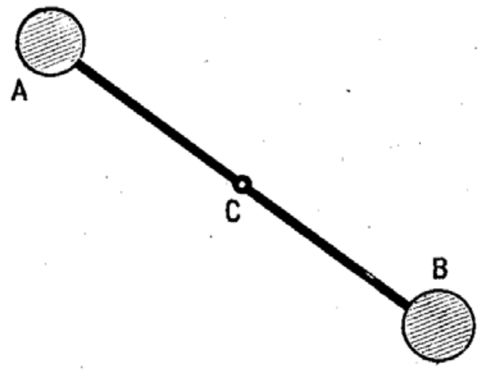

Fig. 40.

In un altro dei suoi manoscritti, Leonardo da Vinci, trattando di una leva a braccia eguali raffigurata nella nostra fig. 40, dichiara che essa deve rimanere in equilibrio qualunque inclinazione le si attribuisca, e ciò perchè il fulcro C coincide col centro di gravità dei due pesi A e B.

Caratterizzando così l'equilibrio indifferente, Leonardo non fa in fondo che riportarsi alla proprietà che Pappo aveva fin dai suoi tempi assunta come definizione del centro di gravità. L'antico matematico della scuola Alessandrina chiamava infatti con questo nome quel punto in corrispondenza del quale bisognava sospendere un corpo perchè esso potesse rimanere in equilibrio con qualunque orientazione.

***

Orbene è proprio ancora con un richiamo alle proprietà del centro di gravità che il più illustre tra gli allievi di Galileo, EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647), farà fare alla teoria della stabilità dell'equilibrio il più decisivo progresso.

Nella sua opera " De motu gravium naturaliter descendentium et projectorum „ pubblicata nel 1644, Torricelli ammette, come postulato, che due gravi legati assieme per modo che il moto dell'uno determini quello dell'altro, non possono spontaneamente muoversi se non nel caso che il loro comune centro di gravità possa discendere.

In realtà — egli scrive — se i due gravi sono collegati coll'intermediario di una leva o di una puleggia, o di un qualsiasi altro meccanismo atto a determinare la legge di dipendenza dei loro movimenti, essi si comporteranno come un grave unico formato di due parti: il quale grave unico certo non si metterebbe in movimento spontaneamente se non quando il suo centro di gravità potesse discendere: e ove ciò non gli fosse consentito dai vincoli impostigli, si manterrebbe sicuramente in equilibrio nella sua posizione attuale, poichè qualsiasi movimento non tendendo verso il basso non avrebbe ragione di essere.

Di qui — con un evidente richiamo alle osservazioni fatte da Galileo a proposito del problema dell'equilibrio sul piano inclinato, osservazioni da noi riportate a principio del precedente capitolo — Torricelli deduce che: " se due gravi sono collocati su due piani diversamente inclinati, ma di pari altezze, essi si possono sostenere l'un l'altro in condizione di equilibrio se i loro pesi stanno tra loro come le lunghezze dei piani „, perchè proprio in questo caso, ed in questo solo, avviene che, discendendo l'uno dei pesi, e salendo l'altro in conseguenza, il loro centro di gravità si sposta sopra un piano orizzontale.

Torricelli non è andato molto più in là nel trarre dalle sue premesse le generalissime conclusioni di cui erano suscettibili.

Ma ciò che egli non fece, fece certamente, e non molti anni dopo, Pascal ponendo il principio di Torricelli a base di una sua trattazione generale dei problemi dell'equilibrio che, disgraziatamente, non ci è pervenuta.

Del resto al principio di Torricelli vanno connesse molte delle più importanti scoperte nel campo della statica. Basti citarne una.

Ernst Mach racconta che Giovanni e Giacomo Bernouilli, mentre passeggiavano un giorno a Basilea discutendo fra loro di argomenti matematici, si chiesero quale fosse la forma di equilibrio di una catena pesante sospesa alle sue due estremità.

Essi pensarono allora giustamente che l'equilibrio doveva esser raggiunto allorquando tutti gli anelli della catena fossero discesi il più possibile, nel senso che una ulteriore caduta di uno di essi dovesse provocare la salita di un altro ad un'altezza eguale o superiore. E ne conclusero senz'altro che la configurazione di equilibrio era quella per la quale il baricentro veniva a trovarsi nella posizione più bassa.

In realtà il problema era così completamente ed assai elegantemente risolto nel senso che la parte fisica di esso era esaurita. La determinazione della curva di lunghezza data tra due punti pure dati, il cui centro di gravità trovasi ad un'altezza minima, non è più che una questione di calcolo.

***

Spetta a Lagrange il merito di avere segnalato ciò che vi è di sostanzialmente identico nel principio di Torricelli ed in quello dei lavori virtuali: di avere cioè avvertito come sia in ultima analisi equivalente dire che in una certa configurazione di un certo sistema di corpi pesanti il centro di gravità si trova ad una altezza *minima*, ovvero dire che, per una variazione infinitamente piccola della configurazione considerata, quel centro non può discendere e quindi il lavoro delle forze di gravità deve essere nullo.

Vi è solo una distinzione da fare tra i due enunciati: ed è che col principio di Torricelli non si ritrovano tutti i casi per cui il lavoro è nullo: ma si escludono automaticamente quelli in cui ciò avviene in quanto il centro di gravità si trova per esempio ad un'altezza *massima*: per esser più precisi, quelli in cui ciò avviene senza che il centro di gravità si trovi ad un'altezza minima.

Ed è ancora Lagrange che, creando la teoria generale della stabilità dell'equilibrio, darà ragione della distinzione, e mostrerà come il principio di Torricelli caratterizzi precisamente gli stati di equilibrio stabile, e quelli soli.

La distinzione è dunque della maggiore importanza.

In pratica non basta infatti saper riconoscere se un sistema occupa una posizione di equilibrio, visto che non è sempre possibile collocare esattamente il sistema in quella posizione ed abbandonarvelo allo stato di riposo assoluto.

L'equilibrio non ha un reale interesse se non quando è stabile, vale a dire quando si è certi che il sistema, eventualmente scostato di poco dalla posizione che si considera, tende a ritornarvi, non ad allontanarsene maggiormente.

Si vede subito che la questione della stabilità o meno dell'equilibrio costituisce in ultima analisi un problema di dinamica; si tratta infatti di analizzare il movimento che il sistema assume quando lo si colloca in una posizione di poco differente da quella di equilibrio, e poi lo si abbandona a se stesso.

Tuttavia, pur non volendo affatto invadere qui un campo che è affatto estraneo al nostro argomento, noi possiamo bene, e coi soli mezzi della statica, arrivare ad alcuni risultati che, proprio dal punto di vista statico, sono del maggiore interesse.

A tal fine riportiamoci ancora una volta col pensiero a quel congegno di puleggie e di rinvii che abbiamo visto utilmente impiegato da Lagrange per render ragione del principio dei lavori virtuali.

E supponiamo per un momento che ciascun punto del sistema materiale rappresentato nella fig. 37 sia vincolato a muoversi su di una curva ben determinata, e che la posizione di uno di essi sulla sua traiettoria determini completamente le posizioni di tutti gli altri punti.

Si usa allora dire che il sistema ha un sol grado di libertà, nel senso che la sua configurazione si può sempre immaginare dipendente da un unico parametro. È certo questo un caso assai particolare: altrettanto importante però, perchè realizzato da moltissimi dei meccanismi di cui la pratica tecnica ci offre l'esempio.

Rappresentiamo in un diagramma (fig. 41) in funzione dell'accennato parametro le altezze del contrappeso Q cui è affidato il còmpito di mantener costante la tensione del filo nel congegno ideato da Lagrange.

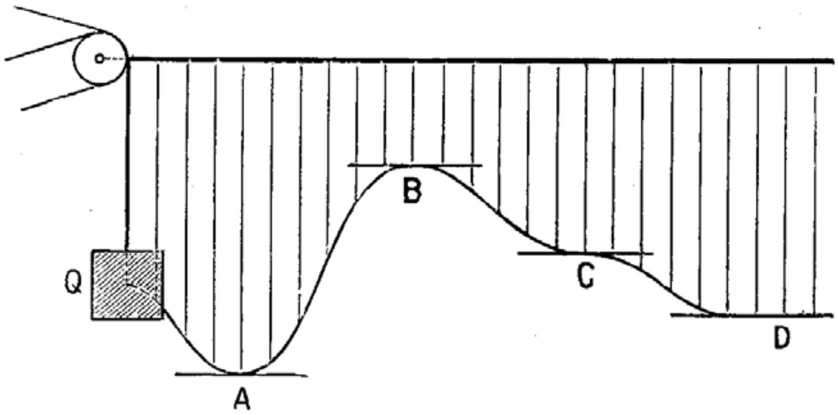

Fig. 41.

La rappresentazione si può ottenere con tutta facilità anche materialmente: basta munire il contrappeso di una penna scrivente e mentre esso, al muoversi del sistema, si alza o si abbassa, far scorrere un foglio di carta sotto la penna con opportuno moto di traslazione orizzontale.

Chi ricorda il ragionamento di Lagrange non può esitare nel riconoscere alla semplice ispezione del diagramma così ottenuto le possibili posizioni di equilibrio del sistema.

Si diceva allora, che perchè l'equilibrio potesse sussistere occorreva che, per uno spostamento *piccolissimo* del sistema, il contrappeso Q restasse immobile: nella rappresentazione grafica, ora adottata, l'eventualità verrà rappresentata da un punto del diagramma a tangente orizzontale.

Ma di tali punti ce ne possono evidentemente essere di varii generi; e precisamente di quattro generi: ci possono infatti essere i punti più bassi del diagramma (com'è in figura il punto A), i più alti (come B), e finalmente quelli che senza corrispondere nè ad una ordinata massima nè ad una minima, hanno tuttavia la tangente orizzontale, sia essa una tangente di flesso (come accade in C), sia essa addirittura identificata con un tratto finito della curva (come in D).

Ovvie considerazioni, che non è qui certo necessario ripetere, ci permettono di riconoscere nel primo caso le caratteristiche dell'equilibrio stabile, nel secondo e nel terzo quelle dell'equilibrio instabile, nell'ultimo finalmente, quelle dell'equilibrio indifferente.

Che se poi si vuole tener presente la possibilità già prospettata a suo tempo, che tra i vincoli imposti al sistema ce ne sia anche qualcuno unilaterale, occorre prevedere altresì la possibilità che il diagramma presenti dei punti angolosi, vertici o cuspidi, verso l'alto ovvero verso il basso.

S'intende che al primo di questi casi non corrisponde equilibrio di sorta, neppure instabile: mentre che il secondo sta a denotare uno di quei casi di equilibrio, sicuramente stabile, che abbiamo a suo tempo riconosciuti caratterizzati da valori non nulli, ma negativi, della somma dei lavori virtuali.

Se ora noi immaginiamo di rinunciare alla limitazione dell'unico grado di libertà che momentaneamente ci eravamo imposta — se cioè ammettiamo che i singoli punti del sistema materiale considerato si possano muovere anzichè su una semplice linea, su di una superficie, o addirittura in tutta una porzione dello spazio, e se di più rinunciamo alla condizione che i loro movimenti possano tutti farsi dipendere in modo unico da quelli di uno solo tra essi — allora le cose si complicano assai, e non è più possibile esprimerle mediante la semplice ed intuitiva rappresentazione grafica di cui ci siamo poc'anzi serviti.

Le cose si complicano anche di più se ammettiamo, come dobbiamo necessariamente ammettere per fare il caso più generale, che al muoversi dei varii punti le forze ad essi applicate non si mantengano già costanti in grandezza e direzione, ma possano variare secondo leggi ben determinate ma affatto arbitrarie.

Se però si tiene presente che nel ragionamento di Lagrange le salite e le discese del contrappeso stanno a rappresentare nè più nè meno che i lavori negativi o positivi delle forze applicate, si può anche ai casi più complessi e generali estendere la portata delle considerazioni che precedono, alla sola condizione che invece di parlare di massimi o minimi di altezza del contrappeso si parli di minimi o massimi di valore della funzione " lavoro ".

Noi sappiamo bene infatti che, ad ogni passaggio di un sistema di punti da una ad un'altra qualunque sua configurazione, corrisponde un certo ben determinato lavoro delle forze applicate, funzione, nelle condizioni più generali, della successione delle configurazioni per cui il sistema passa.

Orbene se in questa successione di configurazioni una ve n'è nella quale il sistema considerato potrebbe restare in equilibrio, l'incremento infinitesimo del lavoro nello spostamento elementare immediatamente precedente ed in quello immediatamente susseguente alla configurazione di cui si tratta deve, pel principio dei lavori virtuali, riuscire nullo.

Potremo dunque concludere che, in generale l'equilibrio effettivamente sussisterà se, in corrispondenza di quella configurazione, la funzione considerata presenta un massimo od un minimo: sarà stabile nel primo caso, instabile nel secondo.

Che se poi, come accade nella maggior parte dei problemi naturali di cui ci stiamo occupando, le forze ammettono un potenziale, la conclusione si può anche più brevemente ed elegantemente esprimere dicendo che “ le configurazioni di equilibrio stabile sono quelle e quelle sole che corrispondono ai minimi dell'energia potenziale „.

Questo teorema fu comunicato all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1740 da Maupertuis, il quale gli aveva dato il nome di “ Loi de repos „: e fu oggetto di studii più approfonditi per parte di Eulero che ne riferì all'Accademia di Berlino nel 1751.