VIII.

LA STATICA DEI SISTEMI A VINCOLI SOVRABBONDANTI

Passiamo ora a supporre $k > 3n$.

Tra le equazioni di condizione

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ &\cdots \\ f_k &= 0 \end{aligned}$$

se ne possono allora assumere ad arbitrio $3n$ le quali, in generale, definiranno completamente la configurazione del sistema, vale a dire i valori delle $3n$ coordinate dei nodi.

Le altre $k - 3n$ equazioni di condizione dovranno essere identicamente soddisfatte da quei valori: se ciò non fosse si dovrebbe infatti concludere che la configurazione che soddisfa alle prime $3n$ condizioni non soddisfa alle rimanenti $k - 3n$, che cioè i vincoli da queste espressi non sono compatibili coi vincoli espressi dalle prime: il problema sarebbe cioè da considerarsi come insolubile per incompatibilità dei suoi dati.

Una prima conclusione è dunque questa: che quando i vincoli sono in numero sovrabbondante non possono più essere scelti a capriccio; e precisamente, imposti ad arbitrio tanti vincoli quanti ne occorrono per definire completamente la configurazione del sistema, se ne possono bensì aggiungere altri, quanti se ne vogliono, ma a condizione che essi siano compatibili colla configurazione definita.

Così per esempio, nulla ci impedisce di immaginare aggiunte delle nuove aste di collegamento nelle travature studiate nel capitolo precedente, ma, mentre alle aste allora considerate avevamo evidentemente potuto attribuire lunghezze affatto arbitrarie, salvo a dedurre da esse la configurazione del sistema, cioè la posizione dei singoli suoi nodi, alle aste sovrabbondanti dovremo invece attribuire lunghezze esattamente eguali alle distanze, già perfettamente definite, dei nodi che con esse intendiamo collegare: altrimenti le nuove aste non potrebbero neppur venire messe in opera.

Per la verità conviene avvertire che, quando si passa alla effettiva esecuzione di una costruzione qualunque, ben difficilmente le dimensioni reali delle singole sue membrature potranno corrispondere con matematica esattezza a quelle previste in sede di progetto: in pratica bisognerà sempre necessariamente accontentarsi che l'esecuzione corrisponda al progetto con quella approssimazione che i mezzi di lavorazione consentono: approssimazione che potrà essere diversissima a seconda dei casi: tutt'altro che grande se si tratta di costruzioni correnti, potrà anche divenire notevole nelle costruzioni a cui si dedicano cure speciali, per esempio nella costruzione degli strumenti cosidetti di precisione: bisogna tuttavia sempre prevedere la possibilità che le membrature sovrabbondanti vengano ad avere dimensioni più o meno diverse da quelle che teoricamente loro spetterebbero.

Orbene, fino a che le differenze non superano certi limiti (che, ripetiamo, possono essere molto diversi da caso a caso), si può in pratica effettuare egualmente il montaggio del sistema, grazie alla deformabilità dei materiali. Così, per esempio, un'asta sovrabbondante di una travatura reticolare, la quale sia riuscita leggermente più corta della distanza dei due nodi che deve collegare, può in pratica venir messa in opera esercitando su di essa uno sforzo di trazione che tenda ad allungarla, e simultaneamente agendo sui nodi da collegare nel senso di avvicinarli quanto basta perchè si possano effettuare i necessarî collegamenti.

È però intuitivo che ciò si ottiene a prezzo di una deformazione più o meno grande delle aste preesistenti, deformazione che si provoca nel modo più òvvio mediante l'applicazione di convenienti forze esterne, ma che dovrà in tutto od in parte permanere anche quando, a montaggio eseguito, quelle forze esterne potranno venire soppresse, perchè basterà la presenza della nuova asta per impedire a tutte le altre di riprendere la loro posizione primitiva e le loro primitive dimensioni.

Il sistema si manterrà pertanto in uno stato di coazione interna; le sue varie parti saranno soggette a certi sforzi, non dipendenti da forze esterne, epperò in equilibrio fra loro, i quali non potranno più eliminarsi se non sconnettendo nuovamente le connessioni sovrabbondanti. Questi sforzi sono ben conosciuti dai tecnici col nome di *sforzi di montaggio*.

L'affermazione fatta dianzi della necessaria compatibilità dei vincoli in un sistema che ne possegga in numero sovrabbondante, e della impossibilità di costituire il sistema se questa compatibilità non è matematicamente verificata, va dunque in pratica temperata in questo senso: che i piccoli difetti di costruzione delle membrature costituenti i vincoli sovrabbondanti possono bensì essere tollerati, ma dànno origine ad uno stato di coazione del sistema da cui non è sempre lecito prescindere nei calcoli degli sforzi massimi e nelle verifiche di stabilità della costruzione.

***

Resta a vedersi come si potranno determinare gli sforzi dovuti all'azione delle forze esterne.

Intanto è facile constatare qui in modo assolutamente generale, ciò che abbiamo già avuto occasione di rilevare a proposito di alcuni casi particolari, che cioè dal punto di vista puramente statico il problema ammette infinite soluzioni.

Immaginiamo infatti idealmente soppressi i $k - 3n$ vincoli sovrabbondanti, ed applicati in loro vece al sistema che resta, e che si usa denotare col nome di *sistema principale*, le rispettive reazioni: al solito queste reazioni si possono riguardare come delle forze esterne grazie alle quali l'equilibrio del sistema principale non risulta menomamente turbato. Ma questo sistema principale contiene per ipotesi tutti i vincoli riconosciuti come non sovrabbondanti: la sua configurazione è dunque da considerarsi come perfettamente definita: essa si conserverà immutata (salvo le solite deformazioni elastiche piccolissime) qualunque siano gli sforzi nei vincoli sovrabbondanti, in funzione dei quali noi siamo in grado di esprimere tutti gli altri sforzi interni del sistema: per questa ragione gli sforzi nei vincoli sovrabbondanti prendono il nome di *incognite staticamente indeterminate* o *iperstatiche.*

Al solito l'indeterminazione deriva soltanto dall'aver trascurate le deformazioni piccolissime dei materiali, e scompare appena di tali deformazioni si tenga conto.

Sotto l'azione delle reazioni sviluppate nei vincoli sovrabbondanti, il sistema principale subisce infatti delle deformazioni che sono in ogni caso delle funzioni perfettamente definite delle reazioni stesse: in particolare sono definiti in funzione delle reazioni gli spostamenti dei punti cui i vincoli sono applicati: ma questi spostamenti devono nel sistema dato essere compatibili coll'esistenza dei vincoli che quelle reazioni rappresentano.

Si intuisce dunque che in ciascun caso particolare, e per ciascuno dei $k - 3n$ vincoli sovrabbondanti, si potrà scrivere una equazione di condizione, cioè di *compatibilità* tra le deformazioni, e che questa potrà poi immediatamente trasformarsi in una equazione tra gli sforzi di cui quelle deformazioni sono funzioni.

Si otterranno così tante equazioni quante sono le incognite iperstatiche da cui la soluzione del problema dipende: questa è allora da considerarsi, in generale, come completamente determinata.

***

È molto interessante sapere che le predette equazioni possono assai facilmente ottenersi mediante ripetute applicazioni del principio dei lavori virtuali. Ed ecco come.

Noi sappiamo che, dato un qualunque sistema di forze *in equilibrio* ed un sistema di spostamenti piccolissimi dei loro punti di applicazione *compatibile cogli eventuali vincoli*, il lavoro virtuale risulta identicamente nullo.

E ci siamo sempre serviti di questo principio per *stabilire le condizioni di equilibrio delle forze*, assumendo gli spostamenti in modo che le condizioni di compatibilità fossero soddisfatte *a priori.*

Ma è evidente che, se noi invece assumessimo le forze in modo che fossero verificate *a priori* le condizioni di equilibrio, lo stesso principio potrebbe immediatamente venire utilizzato per *esprimere le condizioni di compatibilità degli spostamenti.*

Orbene, nulla di più facile che avere un sistema di forze in equilibrio: basta ripensare ad una qualunque di quelle infinite soluzioni del problema statico cui poc'anzi accennavamo, e che si caratterizzano scegliendo ad arbitrio i valori delle $k - 3n$ incognite iperstatiche, e deducendo poi in conseguenza, con uno qualunque dei metodi noti, i valori dei $3n$ sforzi del sistema principale.

Quanto agli spostamenti si assumeranno senz'altro gli spostamenti effettivi: essi sono bensì incogniti, in quanto dipendono dalle $k - 3n$ incognite iperstatiche, ma si possono sempre, nei singoli casi particolari, esprimere in funzione di queste incognite. Così l'equazione di compatibilità tra gli spostamenti si trasformerà immediatamente, come avevamo annunciato, in una equazione di condizione fra queste $k - 3n$ incognite.

Basterà pertanto ripetere l'operazione $k - 3n$ volte, variando convenientemente di volta in volta il sistema di forze considerato, ma riferendosi invece sempre agli spostamenti effettivi, espressi in funzione delle incognite, per ottenere le equazioni risolventi cercate.

Su questo artificio ingegnoso, H. MÜLLER-BRESLAU fondò un suo metodo generalissimo per la risoluzione dei più interessanti problemi della resistenza dei sistemi iperstatici. Noi naturalmente non ci addentreremo più oltre nell'argomento, al quale spetta del resto un posto d'onore nella Scienza delle Costruzioni: ci limiteremo a chiudere questo capitolo con un esempio che varrà a chiarire le considerazioni che precedono e ad indicare la via per più estese ed importanti applicazioni.

* * *

Un solido pesante (un tavolo, per esempio) poggia su di un piano orizzontale mediante quattro piedi situati ai quattro vertici di un rettangolo (fig. 149): noi già sappiamo che tra la grandezza (data) del peso P del solido, e le grandezze (incognite) delle quattro reazioni A, B, C, D del piano di appoggio, le leggi della statica dei sistemi rigidi forniscono tre sole equazioni: una dunque di quelle reazioni è da considerarsi come staticamente indeterminata.

Per determinarla basta prendere in considerazione le deformazioni che certamente si producono sia nel solido sia nel corpo che gli offre appoggio. Supponiamo, tanto per fissar le idee su di un caso schematicamente molto semplice, che i quattro piedi del solido sieno elasticamente cedevoli, e che a fronte dei loro

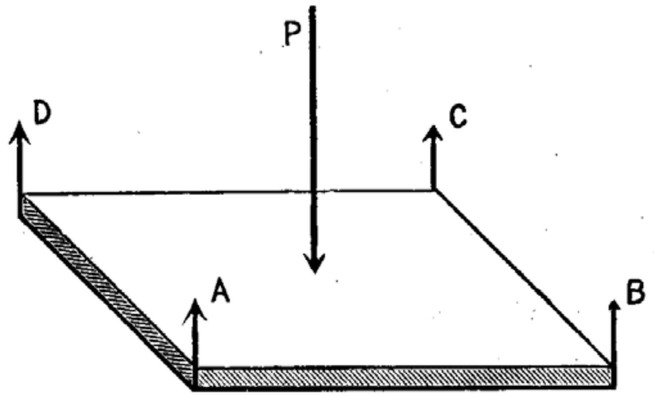

Fig. 149.

cedimenti, riescano trascurabili tutte le altre deformazioni. Supponiamo inoltre che quei cedimenti siano proporzionali alle rispettive reazioni: supponiamo cioè che, dette a, b, c, d quattro costanti, essi possano rispettivamente ritenersi misurati da

$$a \,.\, \mathrm{A} \qquad b \,.\, \mathrm{B} \qquad c \,.\, \mathrm{C} \qquad d \,.\, \mathrm{D}$$

Ciò posto, si immagini idealmente soppresso il peso P del solido, e si attribuiscano alle quattro reazioni dei valori arbitrarî,

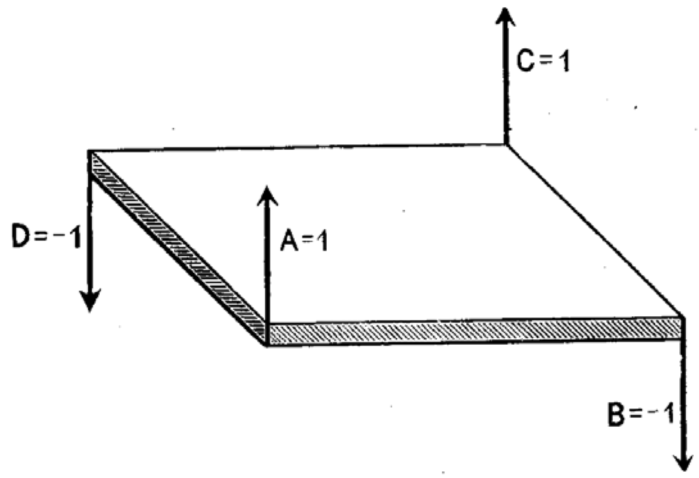

Fig. 150.

purchè soddisfacenti alle predette tre equazioni della statica. Ciò può evidentemente sempre farsi in infiniti modi assumendo ad arbitrio il valore di una delle reazioni, e deducendo in conseguenza i valori delle altre tre. Nel caso concreto si vede subito che si soddisfa alle equazioni della statica ponendo (fig. 150):

$$A = C = 1 \qquad e \qquad B = D = -1$$

Se ora si scrive l'equazione dei lavori virtuali per questo particolare sistema di forze e per gli spostamenti che i loro punti di applicazione subirebbero se i quattro piedi del solido si deformassero proprio come si deformano effettivamente quando, sotto l'azione del peso P, si determinano in essi le reazioni incognite A, B, C, D, si ottiene:

$$a \, . \, A - b \, . \, B + c \, . \, C - d \, . \, D = 0$$

e questa equazione, unitamente a quelle della statica, determina completamente la soluzione del problema proposto.