VII.

LA STATICA DEI SISTEMI A VINCOLI COMPLETI

Nell'esporre il classico procedimento ideato da Lagrange per la ricerca delle configurazioni di equilibrio di un sistema di n punti materiali, soggetto a vincoli ed a forze date, abbiamo accennato alla possibilità che esso offre di determinare insieme anche le reazioni dei vincoli.

Orbene vi sono dei casi in cui proprio a questa determinazione si riduce tutto il problema, in quanto la configurazione di equilibrio figura fra i dati: sono quelli in cui il numero k dei vincoli (o più precisamente delle equazioni di condizione che li traducono analiticamente) eguaglia o supera il numero delle variabili geometriche, per esempio delle $3n$ coordinate cartesiane, che definiscono la configurazione del sistema. In questi casi infatti le posizioni di tutti i punti del sistema sono da considerarsi come intieramente definite, e l'equilibrio non può che sussistere qualunque siano le forze applicate, in quanto nessun movimento è compatibile coi vincoli imposti.

Questa è la ragione per cui in un primo tempo noi avevamo ritenuto opportuno di escludere questi casi dalle nostre considerazioni: ma conviene ora che togliamo questa limitazione in vista dell'estrema importanza che i problemi di questo genere hanno per l'ingegnere.

Basta infatti pensare alle costruzioni murarie, alle strutture in cemento armato, alle travature metalliche portanti delle coperture e dei ponti: è ben evidente che in tutti questi casi l'ingegnere non avrà mai occasione di chiedersi se, sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne, l'opera ammetta o meno una configurazione di equilibrio, e quale essa sia. La configurazione egli l'avrà fissata una volta per tutte nell'atto di progettare la costruzione in base a criterii che, nella maggior parte dei casi, dipendono più dalla destinazione e da considerazioni di carattere pratico che non dalle risultanze di calcoli statici.

E questa configurazione si vuole che si conservi immutata qualunque siano le forze applicate: immutata almeno in questo senso: che sotto l'azione di tali forze i singoli punti non subiscano che quei piccoli spostamenti (da ritenersi, fino ad avviso in contrario, trascurabili) che sono una inevitabile conseguenza della deformabilità elastica dei materiali.

Ora perchè ciò avvenga non basta aver previsti teoricamente i vincoli in numero e disposizione opportuna: occorre anche saperli tradurre in opera, dando ai corpi materiali incaricati di realizzarli, forme e dimensioni adatte, sicchè le necessarie reazioni possano svilupparsi senza che in alcuna parte di essi riescano superati quei limiti oltre i quali ciascun materiale si deteriora o addirittura si rompe.

Di qui l'alta importanza pratica delle considerazioni che seguono: esse sono da riguardarsi come una specie di premessa allo studio della scienza delle costruzioni.

***

Consideriamo il solito sistema composto di n punti materiali soggetto ai soliti vincoli bilaterali senza attrito, e supponiamo che le equazioni di condizione

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ &\;\;\cdots \\ f_k &= 0 \end{aligned}$$

che rappresentano detti vincoli, siano tutte fra loro indipendenti e che sia precisamente

$$k = 3n.$$

Allora le k equazioni (1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\delta z_n=0$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\delta y_1+\ldots+\frac{\partial f_2}{\partial z_n}\delta z_n=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_k}{\partial y_1}\delta y_1+\ldots+\frac{\partial f_k}{\partial z_n}\delta z_n=0$$

a cui debbono soddisfare le componenti di un eventuale sistema di spostamenti infinitesimi perchè questo sia compatibile coi vincoli, non ammettono, in generale, altra soluzione oltre quella, evidente,

$$\delta x_1=\delta y_1=\delta z_1=\delta x_2=\ldots=\delta z_n=0$$

Il sistema, collocato in una configurazione la quale soddisfi alle k equazioni dei vincoli, non potrà più scostarsi da essa.

Se allora si immagina di applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, le $3n$ equazioni

$$\mathrm{X}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x}=0$$
$$\mathrm{Y}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y}=0$$
$$\mathrm{Z}+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}=0$$

bastano da sole per la determinazione dei k moltiplicatori, e conseguentemente delle reazioni di vincolo:

$$\begin{array}{ccc}
\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} & \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y} & \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}\\
\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x} & \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y} & \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}\\
\cdots & \cdots & \cdots\\
\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x} & \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y} & \lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}
\end{array}$$

(1) Queste equazioni non si potrebbero scrivere se le x, y, z fossero funzioni non derivabili di qualche parametro: il problema si potrebbe però sempre trattare direttamente invocando il noto teorema della media.

Fa eccezione soltanto il caso in cui

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial y_1} & \frac{\partial f_k}{\partial z_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \end{vmatrix} = 0$$

Allora infatti le k equazioni tra le componenti di spostamento ammettono infinite soluzioni in cui queste componenti non sono tutte nulle, sicchè la configurazione del sistema cessa di essere definita malgrado che i vincoli siano nel numero richiesto per definirla.

Nel tempo stesso le $3n$ equazioni tra i moltiplicatori di Lagrange dànno luogo a valori infinitamente grandi di questi moltiplicatori, e quindi delle reazioni di vincolo: risultato questo che, come è facile intendere, non ha, per se stesso, alcun senso: le forze infinite non esistono infatti in natura, per la semplice ragione che nessun corpo naturale sarebbe capace nè di svilupparle nè di sopportarle senza rompersi.

Quando pertanto un calcolo statico ci dice che una reazione di vincolo deve per l'equilibrio divenire infinitamente grande, noi non possiamo interpretare il risultato se non nel senso che nessuna forza finita è capace di mantenere l'equilibrio, e che quindi questo, nelle condizioni proposte, non può sussistere.

Non occorre dire che l'ingegnere porrà sempre ogni cura per evitare che le costruzioni che egli progetta presentino siffatte singolarità: è interessante aver assodato che, quando pure ciò inavvertitamente gli accadesse, lo stesso procedimento di calcolo cui egli dovrà ricorrere per determinare la distribuzione degli sforzi si incaricherebbe di metterlo sull'avviso.

* * *

Immaginiamo ora di sopprimere idealmente uno dei vincoli: le equazioni a cui debbono soddisfare le componenti di spostamento si riducono a $k-1$ e noi sappiamo già che si può allora, in generale, esprimere dette componenti in funzione di un unico parametro arbitrario: si dice che il sistema ha acquistato un grado di libertà.

Ma noi sappiamo anche che il vincolo soppresso può essere a tutti gli effetti sostituito da una forza, reazione di vincolo: se pertanto noi immaginiamo che essa agisca effettivamente sul sistema così ridotto come una qualunque forza applicata, questo sistema deve, nella configurazione iniziale, trovarsi in equilibrio.

Potremo dunque per il principio dei lavori virtuali scrivere che, per qualunque spostamento compatibile coi $k - 1$ vincoli conservati, deve essere nullo il lavoro compiuto dalle forze applicate e dalla reazione del vincolo soppresso.

Non deve far meraviglia se, parlando di lavoro di una reazione di vincolo, noi, forse per la prima volta, non lo eliminiamo senz'altro come nullo: conviene invero tener presente che di proposito abbiamo preso a considerare degli spostamenti che non erano compatibili con detto vincolo, tanto è vero che sono divenuti possibili solo quando il vincolo si è immaginato soppresso: per essi non v'è nessuna ragione che la reazione non compia lavoro.

Del termine che esprime questo lavoro noi dobbiamo considerare come noto il fattore spostamento, in quanto, compatibilmente coi $k - 1$ vincoli conservati, noi possiamo sceglierlo a nostro arbitrio.

Noti, o immediatamente calcolabili, sono poi tutti i termini che esprimono il lavoro delle forze applicate, perchè di essi noi conosciamo tanto il fattore forza come il fattore spostamento. L'equazione dei lavori virtuali si presta quindi senz'altro alla determinazione della reazione incognita.

Per fissare le idee, impostando la trattazione proprio su quelle basi che più direttamente interessano gli studii di applicazione, ci riferiremo al caso particolare in cui i vincoli si limitano ad imporre la costanza di certe distanze degli n punti del sistema, tra loro e da dati punti fissi dello spazio.

Questo caso particolare si realizza facilmente mediante k *aste* rettilinee, collegate alle estremità a mezzo di cerniere senza attrito: il sistema prende il nome di *travatura reticolare* e si dicono *nodi* della travatura gli n punti dati: punti in cui concorrono le aste ed in cui si intendono applicate le forze esterne.

Ciascuna asta di una travatura reticolare non si trova dunque sollecitata se non in corrispondenza delle sue due cerniere di estremità: se la pensiamo per un momento come isolata dal resto del sistema, le due forze che ad essa si devono intendere applicate, in condizioni di equilibrio, devono, naturalmente, essere eguali e opposte. A seconda che esse tendono ad allungare l'asta ovvero ad accorciarla, questa si dice tesa o compressa, e prende il nome specifico di *tirante* o, rispettivamente, di *puntone*.

Un'asta in queste condizioni trasmette inalterati gli sforzi ad essa applicati dall'uno all'altro estremo: essa eserciterà dunque sui due nodi che collega due forze alla lor volta eguali ed opposte: sono queste due forze che costituiscono nel caso specifico la reazione del vincolo: sono esse quelle che noi dobbiamo immaginare applicate al sistema allorquando vogliamo sopprimere l'asta senza tuttavia turbare l'equilibrio.

Noi supporremo sempre, nel fare questa operazione, che queste forze siano dirette in modo che tendano ad avvicinare i due nodi cui sono applicate: ciò equivale a supporre che l'asta soppressa funzioni da tirante: l'ipotesi si riterrà confermata ovvero smentita a seconda che le ulteriori indagini ci condurranno ad attribuire allo sforzo incognito un valore positivo ovvero negativo.

***

Nell'intento di illustrare graficamente i ragionamenti che stiamo per fare, ci riferiremo qui a travature reticolari piane, vale a dire, a travature reticolari le cui aste giacciano tutte in un medesimo piano contenente anche le forze esterne.

In questo caso per fissare le posizioni degli n nodi nel piano bastano evidentemente $2n$ coordinate: basteranno quindi anche $2n$ aste per definire la configurazione della travatura.

Siano I, II, III, IV i nodi di una travatura costituita da otto aste che collegano quei nodi fra loro ed a due punti fissi A B nel modo indicato nella fig. 142.

Proponiamoci di determinare lo sforzo che, sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne, si sviluppa in un'asta della travatura.

In figura il sistema delle forze esterne si è ridotto ad una forza sola F applicata al nodo IV: ma questa, come del resto tutte le altre limitazioni a cui ricorriamo per amore di semplicità, non è essenziale: il ragionamento che stiamo per fare e che ci condurrà alla identificazione degli sforzi nelle aste, continua, nella sua parte sostanziale, a sussistere indipendentemente dalle predette limitazioni, ed è quindi colle dovute avvertenze applicabile anche nei casi più generali.

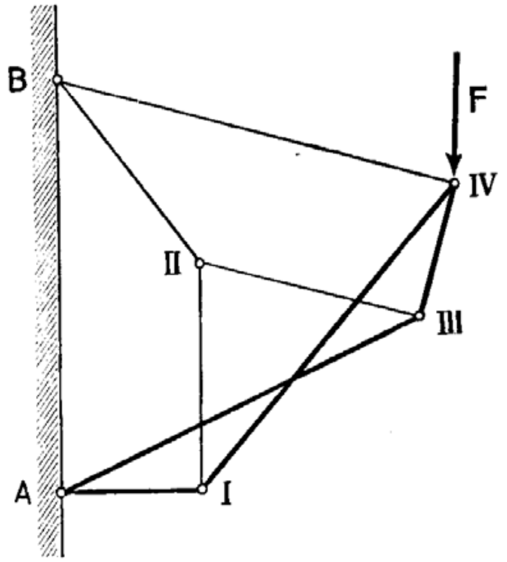

Fig. 142.

L'asta di cui vogliamo calcolare lo sforzo sia per esempio la I, IV: immaginiamola soppressa e sostituita dalla corrispondente reazione di vincolo, la cui grandezza incognita denoteremo con S (fig. 143).

Nel sistema di spostamenti che, colla soppressione dell'asta I, IV, si è reso possibile, ve ne è sempre qualcuno che deve avere una direzione nota.

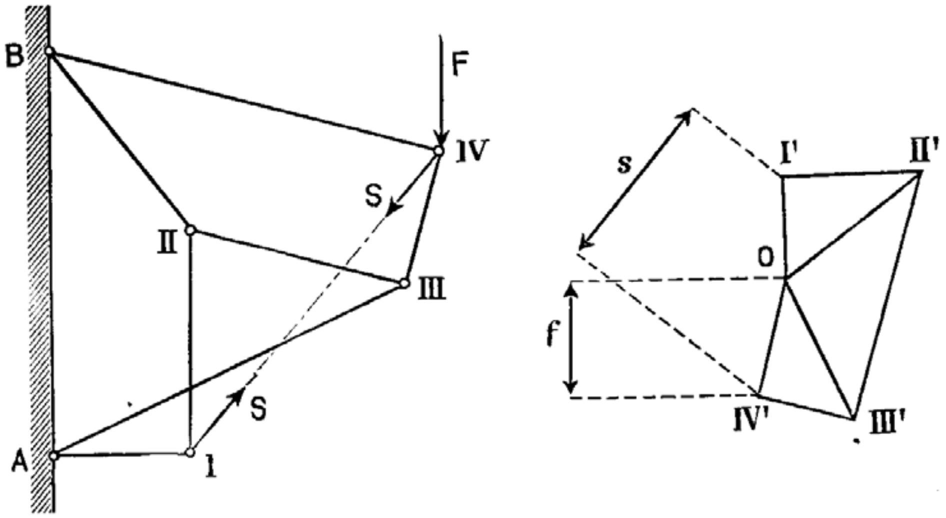

Fig. 143

Nel caso concreto ciò avviene anzi per tutti i nodi perchè a ciascuno di essi fa capo un'asta che è fissa all'altro estremo e che perciò obbliga il nodo a muoversi su di un cerchio che ha il detto estremo per centro.

Consideriamo per esempio il nodo I.

Tenuto conto che lo spostamento vuol essere infinitamente piccolo, e che perciò l'arco di cerchio effettivamente descritto dal punto I potrà sempre confondersi colla sua tangente in I, noi potremo immaginare rappresentato lo spostamento in una conveniente scala da un qualunque vettore O, I′ diretto normalmente ad I, A.

Fissato così lo spostamento di uno dei nodi è da prevedersi che anche gli spostamenti di tutti gli altri nodi risulteranno fissati in conseguenza.

Consideriamo invero il nodo II: ragioni analoghe a quelle testè svolte ci permettono di dire che il vettore O, II′ che deve rappresentarne lo spostamento deve essere diretto normalmente all'asta II, B che collega il nodo ad un punto fisso: la sua grandezza non può però più essere assunta ad arbitrio: il nodo II può anche considerarsi come estremo dell'asta I, II: le più elementari considerazioni cinematiche ci pérmettono allora di affermare che lo spostamento da esso subìto deve anche potersi ottenere come somma geometrica dello spostamento proprio del nodo I e di una rotazione elementare di II attorno ad I considerato come fisso: vale a dire come somma geometrica del vettore O, I′ e di un vettore I′, II′ normale ad I, II: si otterrà dunque il punto II′ conducendo da O la normale a II, B e da I′ la normale a I, II.

Con un ragionamento affatto identico si potrà dallo spostamento del nodo II dedurre quello del nodo III, e da questo quello di IV. Essi sono rispettivamente rappresentati in figura dai vettori O, III′ ed O, IV′.

Il procedimento è facilmente generalizzabile: nella maggior parte dei casi esso si semplifica anzi spontaneamente: ciò avviene precisamente tutte le volte che più nodi continuano ad essere connessi tra loro sì da costituire un sistema di forma invariabile che si muove rigidamente: così, come l'abbiamo esposto, il procedimento può essere applicato anche nei casi più complicati, e conduce alla costruzione di un *diagramma degli spostamenti virtuali* nel quale sono contenuti tutti gli elementi occorrenti per scrivere la voluta equazione dell'equilibrio.

Si otterrà infatti il lavoro virtuale di una forza esterna come la F moltiplicando la grandezza di questa per la proiezione sulla sua direzione dello spostamento virtuale O, IV′ del nodo IV a cui essa è applicata: proiezione che si assumerà positiva o negativa a seconda che è rivolta nello stesso senso della forza o in senso contrario.

Similmente è facile constatare che si otterrà il lavoro virtuale di una reazione di vincolo come la S moltiplicando la grandezza di questa per la proiezione sulla sua direzione dello spostamento relativo I′, IV′ dei due nodi su cui agisce: proiezione che, date le ipotesi fatte sulla positività della reazione, si dovrà considerare come positiva o come negativa a seconda che i due nodi in discorso si avvicinano ovvero si allontanano.

Nel caso della figura l'equazione dei lavori virtuali è dunque

$$\mathrm{F}\,.\,f + \mathrm{S}\,.\,s = 0$$

e fornisce subito il valore incognito dello sforzo

$$\mathrm{S} = -\,\mathrm{F}\,\frac{f}{s}$$

Vale la pena di rilevare che il risultato è completamente indipendente dalla scala adottata nella costruzione del diagramma degli spostamenti, sicchè tale scala può restare effettivamente indeterminata.

Il procedimento cadrebbe in difetto se fosse $s = 0$: in tal caso infatti l'equazione dei lavori virtuali ci condurrebbe a ritenere $\mathrm{S} = \infty$.

Abbiamo già detto che cosa dobbiamo pensare di simile risultato: in particolare abbiamo già detto che esso si verifica precisamente quando i vincoli imposti al sistema, pur essendo nel numero richiesto per definire la configurazione di esso, non bastano, per la loro particolare disposizione, allo scopo.

Siamo ora in grado di renderci direttamente conto della cosa: dire infatti che s è nullo vuol dire evidentemente che lo spostamento relativo I′, IV′ dei due nodi collegati dall'asta che stiamo studiando, è nullo esso pure, ovvero è normale alla direzione dell'asta: in un caso e nell'altro non muta la distanza dei due nodi in discorso.

Ora l'asta ha il preciso ed unico ufficio di assicurare la costanza di tale distanza: ed è compiendo questo ufficio, e così solamente, che contribuisce a definire la configurazione del sistema: ma è intuitivo che essa non si opporrà in alcun modo ad un sistema di spostamenti quale è quello di cui si tratta, in cui la distanza stessa non muta: convien dunque ritenere che il sistema di spostamenti considerato era già possibile anche nella travatura data.

***

Non è a credersi che quando si ha per iscopo di trovare gli sforzi in tutte le aste di una travatura reticolare sollecitata da determinate forze esterne, occorra ripetere per ciascuna asta il procedimento generale testè indicato.

Conviene invece procedere nel modo seguente.

Immaginiamo idealmente soppresse tutte le aste della travatura, e sostituite colle rispettive reazioni: i singoli nodi possono allora considerarsi come resi completamente liberi: dovranno tuttavia mantenersi in equilibrio sotto l'azione delle forze a ciascuno di essi applicate: per ciascuno di essi si è così condotti a considerare la forza esterna su di esso eventualmente agente, e gli sforzi relativi alle sole aste che ad esso fanno capo.

Orbene, tutte le volte che di questi sforzi ve ne sono due soli di grandezza incognita, noi potremo evidentemente determinarli, sia analiticamente servendoci delle due equazioni che esprimono l'annullarsi della somma delle proiezioni delle varie forze su due direzioni arbitrarie, sia graficamente ricordando che la poligonale delle forze stesse deve risultare chiusa.

Così si è fatto nella fig. 144 dapprima per il nodo I in corrispondenza del quale si sono potuti determinare gli sforzi delle aste I, A ed I, II in funzione dello sforzo S precedentemente calcolato. Passando poi al nodo II si sono graficamente determinati gli sforzi in II, B ed in II, III. Similmente si sono determinati, per l'equilibrio del nodo III, gli sforzi in III, A ed in III, IV. Per ultimo, ammesso l'equilibrio del nodo IV, si è identificato lo sforzo nell'asta IV, B.

Accade molte volte che i singoli poligoni di equilibrio che si è così condotti a costruire possono venire accostati l'uno all'altro per modo che ciascuno sforzo compaia in disegno una sola volta (fig. 145). Quando ciò è possibile il diagramma che così si ottiene è da preferirsi all'insieme delle n poligonali staccate, in quanto presenta notevoli vantaggi sia dal punto di vista della celerità e della esattezza, sia da quello della eleganza della costruzione.

Soltanto è da osservarsi che su di esso il senso degli sforzi

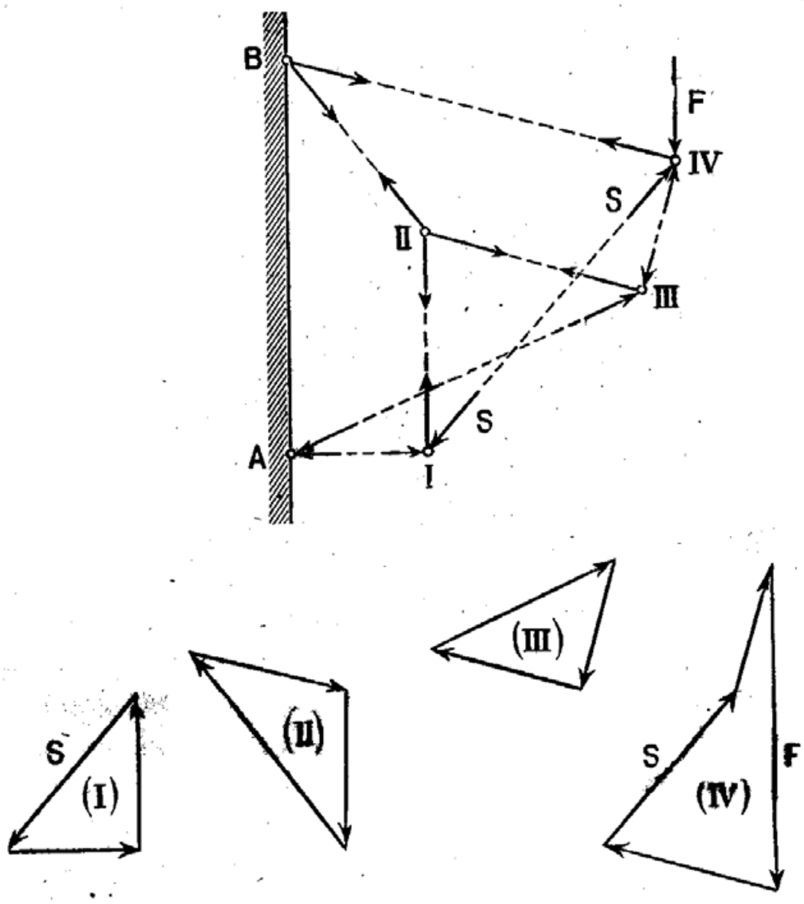

Fig. 144.

nelle singole aste non può più essere denotato con le solite

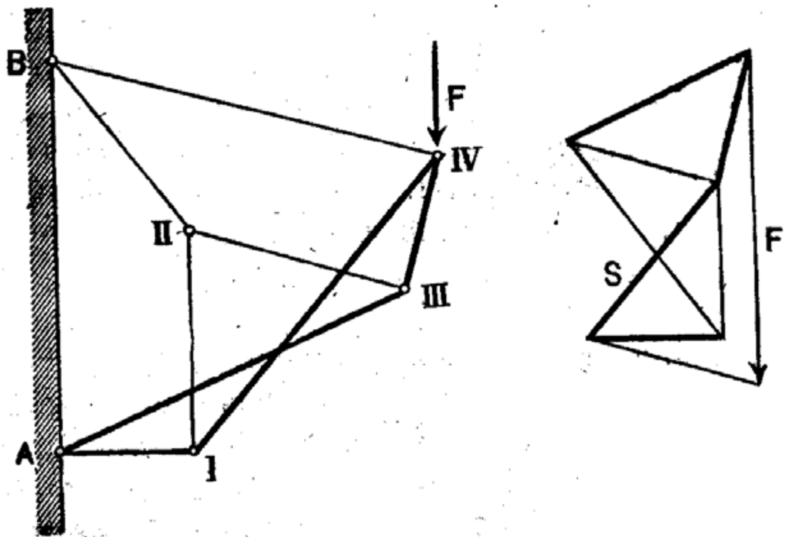

Fig. 145.

freccie perchè ciascuno sforzo compare due volte, rappresentato dallo stesso segmento da considerarsi in sensi opposti: si rimedia a questo piccolo inconveniente distinguendo con tratto sottile gli sforzi di tensione e con tratto grosso quelli di compressione: la rappresentazione diviene anche più efficace se lo stesso sistema si adotta per distinguere nello schema della travatura i tiranti dai puntoni.

***

Vi sono finalmente dei casi — e sono i più particolari dal puntodi vista teorico, ma i più frequenti tra quelli con cui ha da fare l'ingegnere nelle applicazioni — in cui si può procedere alla costruzione del diagramma degli sforzi senza bisogno di alcuna determinazione preliminare.

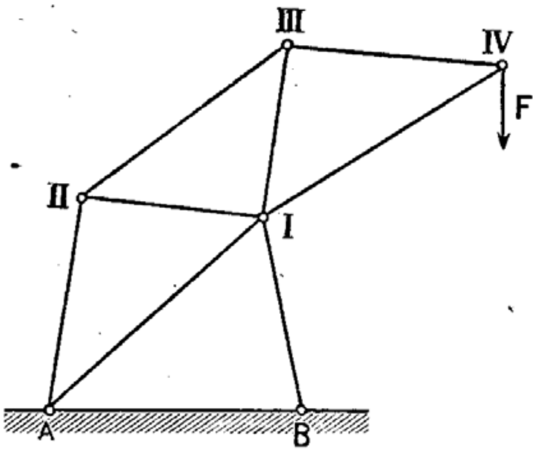

Fig. 146.

Immaginiamo per esempio una travatura la quale si possa generare nel modo seguente: un primo nodo I venga collegato mediante due aste a due punti fissi A, B (fig. 146); poi, mediante due altre aste, si colleghi un secondo nodo II al punto fisso A e al nodo I già fissato: in seguito si consideri un terzo nodo III e lo si renda fisso collegandolo ai due nodi I, II; e così via.

È evidente che nell'ultimo nodo così introdotto concorreranno due sole aste: precisamente quelle due che hanno servito a fissarlo collegandolo a due dei nodi considerati precedentemente: si potranno dunque determinare gli sforzi in dette due aste in funzione della forza esterna eventualmente applicata a tal nodo.

Che se poi, soppresso idealmente l'ultimo nodo, insieme colle due aste di collegamento che ad esso fanno capo, si riguardano gli sforzi che dette due aste esercitano sui nodi rimanenti come delle forze esterne date, si può passare a ripetere lo stesso procedimento a proposito del penultimo nodo: e così, via via, si potrà risalire ordinatamente fino al primo nodo, determinando a due a due tutti gli sforzi.

Questo procedimento si vede applicato nella nostra fig. 147.

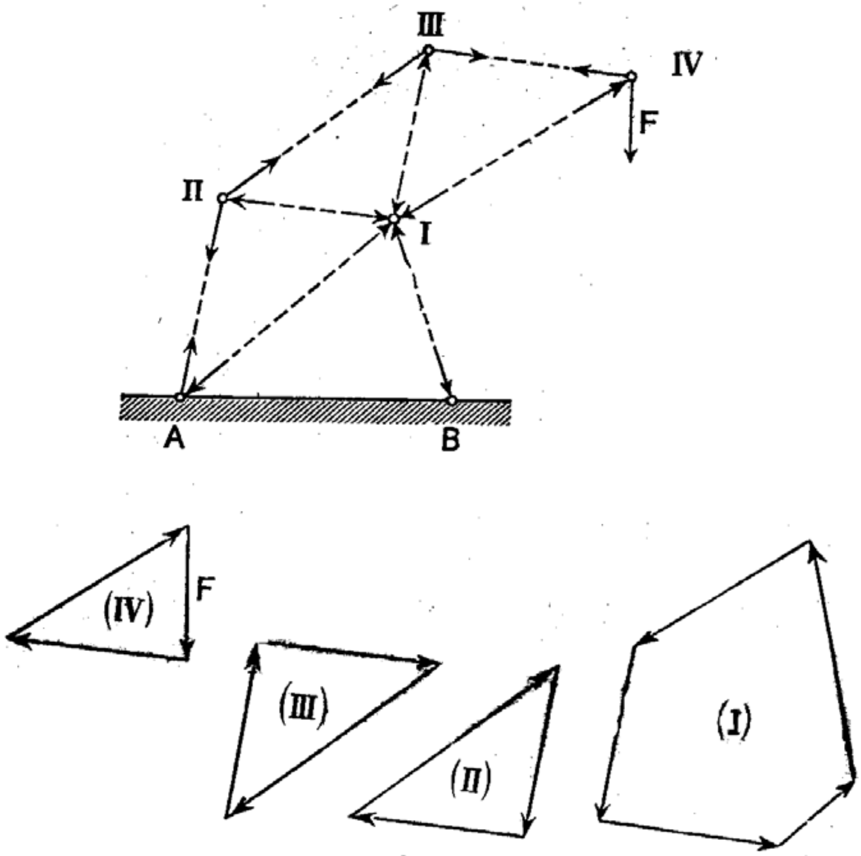

Fig. 147.

La fig. 148 rappresenta invece il diagramma che si ottiene accostando opportunamente le singole poligonali di equilibrio.

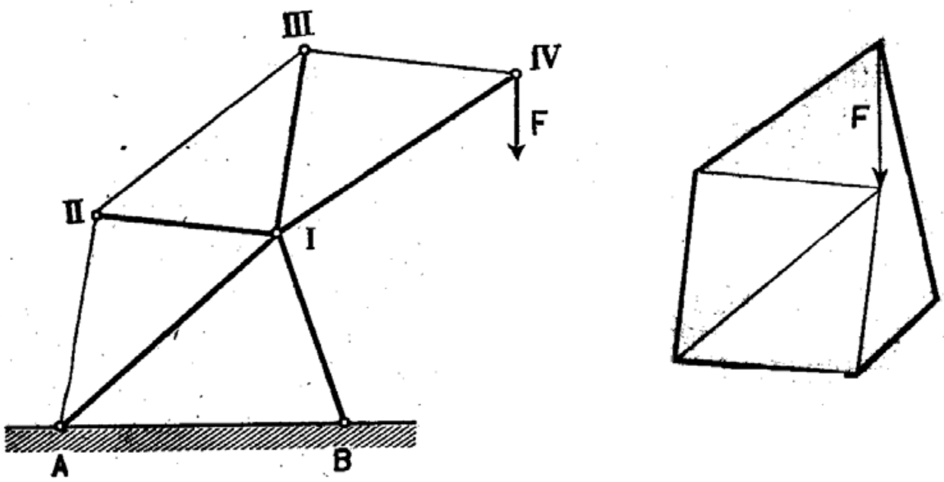

Fig. 148.

I diagrammi di questo genere formarono oggetto di eleganti ricerche da parte di L. Cremona, il quale illustrò le relazioni geometriche esistenti fra essi e gli schemi delle rispettive travature, considerando le due proiezioni piane di certi poliedri reciproci nello spazio. A questo modo di generazione, che non ha del resto per noi se non un interesse storico, va connesso il nome di diagrammi reciproci, o di diagrammi cremoniani, sotto il quale sono generalmente conosciuti i diagrammi degli sforzi.