VI.

LA STATICA DEI GALLEGGIANTI

Noi considereremo qui un liquido pesante dal solo punto di vista dei vincoli che impone ai corpi che su di esso galleggiano.

E' molto facile caratterizzare questi vincoli.

Immaginiamo infatti idealmente isolata, in una massa liquida pesante in equilibrio, una porzione qualunque di essa. Questa porzione deve evidentemente essere alla sua volta in equilibrio sotto l'azione combinata del suo peso, che al solito si riterrà applicato nel suo centro di gravità, e delle pressioni esercitate sulla sua superficie dal liquido circostante. Queste pressioni devono dunque avere una risultante eguale e contraria al peso.

Ciò premesso, se noi immaginiamo sostituita la predetta porzione di liquido da un solido avente la medesima identica forma, le pressioni agenti sulla sua superficie, supposto che il tutto si mantenga in quiete, non possono essere mutate.

Le pressioni esercitate da un liquido pesante sulla superficie di un solido in esso immerso, ammettono dunque sempre un'unica forza risultante (spinta), eguale al peso del volume di liquido spostato, diretta verticalmente dal basso verso l'alto e passante per il centro di gravità del volume stesso.

Tale l'enunciato del principio fondamentale dell' idrostatica che porta il nome di Archimede.

Da esso si deduce subito che, perchè un solido parzialmente immerso in un liquido pesante stia in equilibrio, occorre in primo luogo che il peso del liquido spostato eguagli il suo proprio peso.

Ora in condizione di equilibrio la superficie libera del liquido è naturalmente disposta secondo un piano orizzontale che noi

chiameremo *piano di galleggiamento*: diremo *linea di galleggiamento* la sua intersezione colla superficie del galleggiante: *area di galleggiamento* la porzione di piano da essa racchiusa.

Si chiama *carena* la porzione del solido che si trova immersa, cioè situata al di sotto del piano di galleggiamento: il suo volume, o *spostamento*, è da considerarsi come dato quando è dato il peso del galleggiante.

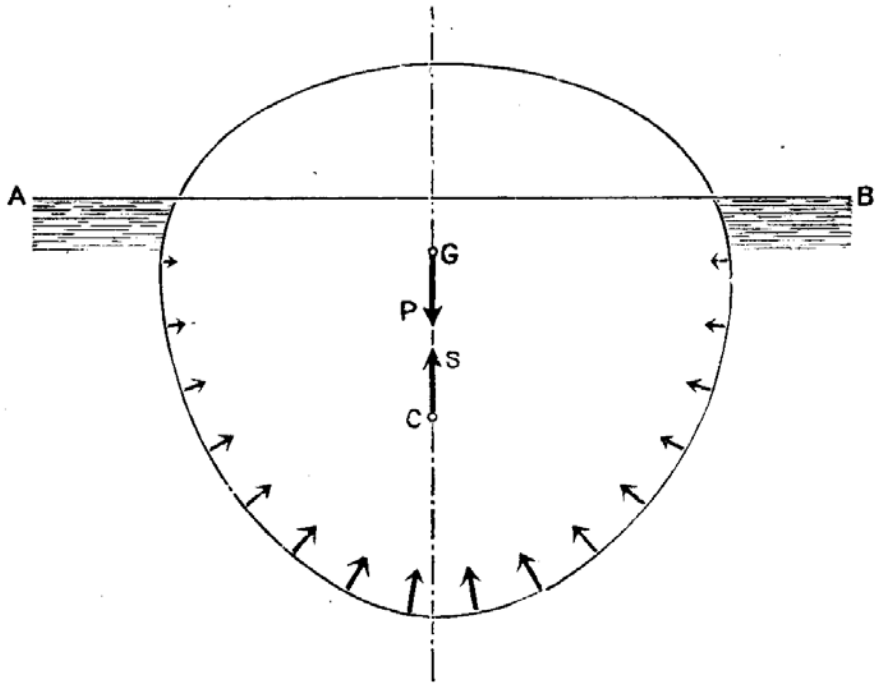

Fig. 136.

Ma vi sono evidentemente infinite posizioni del galleggiante che soddisfano a questa prima condizione: le chiameremo *isocarene*: ed è tra esse che andranno cercate le posizioni che soddisfano alla seconda condizione indispensabile per l'equilibrio del galleggiante: la coincidenza della linea d'azione della spinta con quella del peso, o, ciò che fa evidentemente lo stesso, il passaggio della prima per il baricentro G del galleggiante.

Immaginiamo per un momento che una tal posizione di equilibrio del galleggiante sia quella rappresentata nella fig. 136.

Si potrà sempre pensar di passare dalla carena così definita ad una isocarena vicinissima imprimendo al galleggiante una rotazione piccolissima attorno ad un asse opportunamente scelto nel piano di galleggiamento (asse di inclinazione).

Si viene così ad aggiungere alla carena primitiva una porzione m_1 di solido limitata da un diedro di ampiezza piccolis-

sima ϑ, porzione che prende il nome di *menisco positivo* (o di immersione): nel tempo stesso si sottrae un' altra porzione m_2 analogamente delimitata, che prende il nome di *menisco negativo* (o di emersione).

Si rendono evidenti in disegno i due menischi se, invece di rappresentare il galleggiante nelle sue due posizioni di assetto normale e di assetto inclinato, lo si tien fermo immaginando di far variare attorno ad esso il piano di galleggiamento collo imprimergli una rotazione $-\vartheta$ attorno all' asse di inclinazione sicchè la sua traccia sul piano del disegno passi dalla posizione AB alla posizione A'B' (fig. 137).

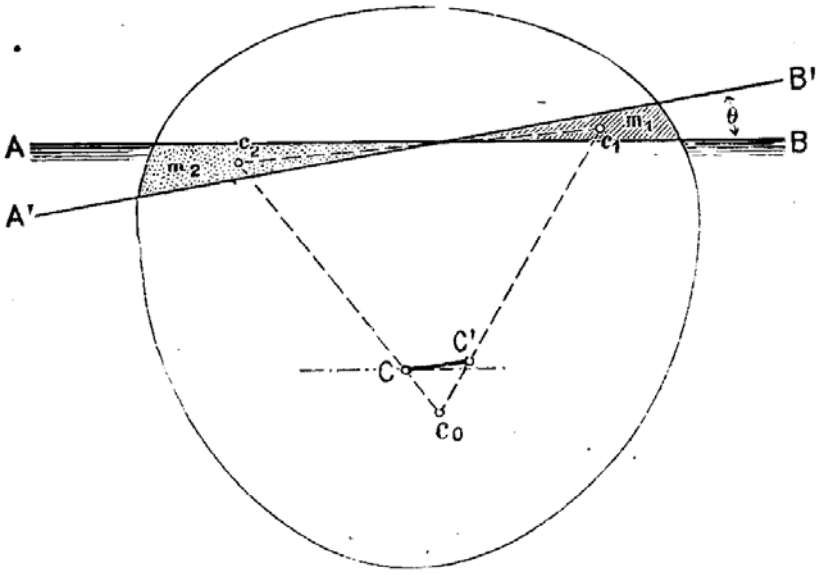

Fig. 137.

La condizione dell'eguaglianza dei volumi dei due menischi, indispensabile per l'invariabilità del volume totale, si può facilmente esprimere se si osserva che, per la supposta piccolezza di ϑ, l'elemento di volume generato nella rotazione da un elemento superficiale dF dell'area di galleggiamento primitiva situato a distanza y dell'asse di inclinazione è misurato da

$$\vartheta \, . \, y \, . \, dF$$

Integrando a tutta l'area ed eguagliando a zero, si ha l'equazione di condizione

$$\vartheta \int y \, dF = 0$$

la quale esprime che: " l'asse di inclinazione deve sempre es-

sere un asse di momento statico nullo: deve cioè sempre passare per il baricentro dell'area di galleggiamento „.

Da questo teorema, che è dovuto ad Eulero, si deduce che i piani di galleggiamento inviluppano una superficie a cui ciascuno di essi riesce tangente in corrispondenza del baricentro della relativa area di galleggiamento, superficie che è perciò anche il luogo di tali baricentri.

Da un punto di vista esclusivamente geometrico, si può rappresentarsi i movimenti del galleggiante determinanti delle isocarene, immaginando che la superficie in discorso, supposta invariabilmente connessa col galleggiante, rotoli sopra un piano orizzontale fisso coincidente colla superficie libera del liquido.

***

A ciascuna carena corrisponde naturalmente una posizione ben determinata del suo centro di gravità, cioè di quel punto C per cui abbiamo a suo tempo riconosciuto dover passare la spinta: ad esso si dà dai tecnici il nome di *centro di carena.*

Il luogo dei centri di carena è una superficie la quale gode di una importante proprietà che noi vogliamo qui molto brevemente illustrare.

Consideriamo a tal fine i centri di carena C e C′ corrispondenti ai soliti due piani di galleggiamento vicinissimi AB ed A′B′: ed indichiamo con c_0 il baricentro del volume comune alle due isocarene da essi definite, e con c_1 e c_2 quelli dei due menischi di egual volume per cui esse isocarene differiscono.

Dalle solite e ben note regole della composizione delle forze parallele, si deduce subito che la congiungente CC′ deve tagliare le c_0c_1 e c_0c_2 in parti fra loro proporzionali: deve perciò riuscir parallela a c_1c_2.

Ma per inclinazioni ϑ infinitamente piccole la direzione della c_1c_2 differisce infinitamente poco da quella della AB: lo stessso si dovrà quindi dire della direzione della congiungente CC′.

E poichè, al limite, questa viene a giacere nel piano tangente in C alla superficie dei centri di carena, e può d'altronde variare di direzione in tal piano al variare dell'asse di inclinazione considerato, si può concluderne che " il piano tangente

in C alla superficie dei centri di carena è sempre parallelo al piano di galleggiamento „.

Dal fatto poi che c_1 è sempre al di sopra di AB mentre c_2 ne è sempre al di sotto, discende immediatamente che C′ sta sempre al di sopra del piano tangente: che cioè il centro di carena corrispondente ad un determinato piano di galleggiamento è sempre il punto più basso della superficie dei centri di carena per rapporto a tal piano.

***

Tutto ciò premesso noi siamo finalmente in grado di caratterizzare tutte le possibili posizioni di equilibrio del galleggiante.

Basta osservare che quando il centro di gravità G di esso si verrà a trovare sulla verticale di C — quando cioè la congiungente GC sarà verticale epperò normale al piano di galleggiamento AB — essa congiungente dovrà anche esser normale in C alla superficie dei centri di carena.

La ricerca delle possibili posizioni di equilibrio del galleggiante si riduce così alla ricerca delle normali che da un punto dato G si possono condurre ad una superficie pure data.

Naturalmente non tutte le posizioni di equilibrio così definite saranno stabili.

Si potranno distinguere le posizioni stabili dalle instabili ricorrendo al solito principio di Torricelli.

A tal fine noi immagineremo per un momento che liquido e galleggiante siano contenuti in un vaso, di forma e dimensioni affatto arbitrarie. Per tutte le variazioni isocarene il piano di galleggiamento deve restare immutato: immutato quindi il volume racchiuso tra esso piano ed il vaso, nonchè il centro di gravità O di questo volume supposto tutto riempito di liquido (fig. 138).

Invece il centro di gravità $\mathcal{G}$ del sistema pesante costituito dal liquido effettivamente esistente e dal galleggiante, si sposterà, al variare della posizione di questo, *raggiungendo posizioni di altezza minima quando il galleggiante si troverà in condizioni di equilibrio stabile.*

Ma $\mathcal{G}$ deve necessariamente stare sulla congiungente del baricentro G del galleggiante col baricentro G′ della massa li-

quida: così come O deve stare sulla congiungente del centro C di carena con lo stesso G': ed i due punti debbon dividere quelle congiungenti in segmenti proporzionali ai pesi rispettivi del galleggiante e del liquido.

Al variare della posizione del galleggiante tutta la figura si deforma attorno ad O unico punto che rimane fisso: ma O$\mathcal{G}$ si mantiene parallela e proporzionale a CG.

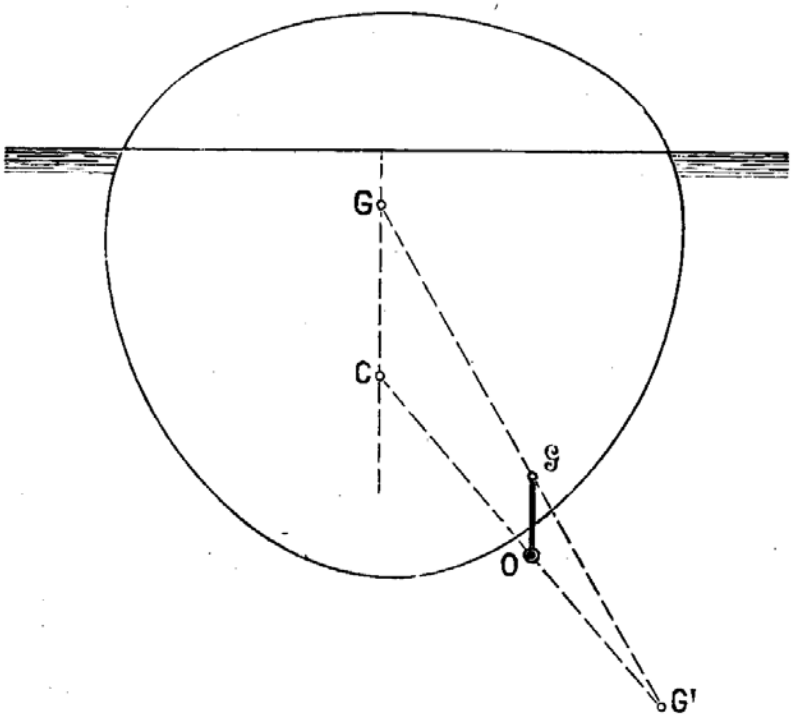

Fig. 138.

Alle posizioni di equilibrio stabile del galleggiante — cui corrispondono posizioni di altezza minima di $\mathcal{G}$ — dovranno dunque corrispondere valori minimi della distanza *verticale* CG, cioè della normale condotta da G alla superficie dei centri di carena.

***

Ma ecco che noi vogliamo questa volta spingere anche più a fondo le nostre indagini, e, non contenti di aver riconosciuto che una data posizione di equilibrio è stabile, vogliamo chiederci ancora una misura di questa stabilità: vogliamo cioè farci un'idea concreta dell'energia con cui il sistema, una volta spostato dalla posizione di equilibrio, tende a ritornarvi.

Naturalmente faremo ciò in un caso particolare.

Lo scopo della nostra trattazione — il lettore lo sa bene — non è quello di approfondire un problema di tecnica navale; bensì quello di illustrare con esempi interessanti ed istruttivi i procedimenti fondamentali della statica. Ci studiamo quindi di dare un'idea chiara e per quanto è possibile completa del modo con cui questi procedimenti si applicano, pur rifuggendo sistematicamente da ogni complicazione formale che non sia strettamente indispensabile.

Supporremo dunque in ciò che segue che il galleggiante in equilibrio ammetta un piano verticale di simmetria, ed, assunto questo come piano del disegno, ci limiteremo a considerare le variazioni di assetto parallele ad esso. Due conseguenze ne seguono immediatamente:

1) che l'asse di inclinazione sarà sempre normale a tale piano;

2) che esso coinciderà con uno degli assi principali d'inerzia dell'area di galleggiamento.

In queste ipotesi, noi ci proponiamo di indagare quel che succeda delle due forze P ed S che sul galleggiante si facevano inizialmente equilibrio.

È intanto evidente che nulla potrà sostanzialmente mutare nei confronti del peso P il quale, nella nuova posizione del galleggiante come nella primitiva, non potrà che continuare ad agire, con immutata intensità, secondo la verticale passante per il centro di gravità G.

Soltanto in causa dell'artifizio a cui abbiamo ricorso nella rappresentazione grafica, bisognerà tener presente che la verticale apparirà, come la orizzontale, ruotata in disegno dell'angolo $-\vartheta$. La forza P prenderà quindi in disegno la posizione indicata in P′ (fig. 139).

La stessa rotazione subirà naturalmente la spinta S.

Questa però dovrà poi anche spostarsi parallelamente a se stessa per assumere la posizione che le spetta come risultante della spinta iniziale S, della spinta s_1 del menisco positivo m_1, e della $-s_2$ spinta negativa (cioè rivolta verso il basso) del menisco negativo m_2.

Ancora una volta le regole più elementari della composizione delle forze parallele vengono in nostro aiuto permettendoci di prevedere che la spinta primitiva dovrà spostarsi

dalla parte del menisco positivo, cioè dalla parte del galleggiante che si è immersa.

Ad ogni modo un calcolo esatto si può fare facilmente prendendo i momenti delle varie forze componenti rispetto ad un punto qualunque ed eguagliandone la somma algebrica al momento della risultante.

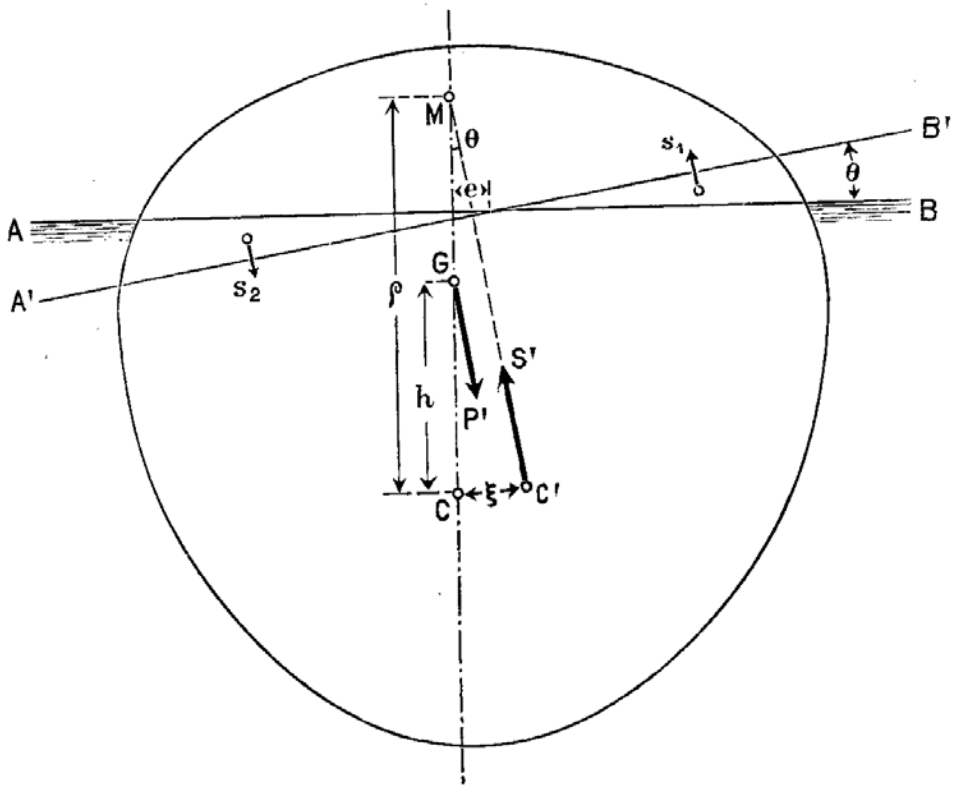

Fig. 139.

Denotata con γ la densità del liquido, con V lo spostamento, e quindi con $\gamma \cdot V$ la grandezza della spinta, ed indicata con ξ la distanza della sua nuova linea d'azione dal primitivo centro di carena C, il momento della risultante S′ riesce misurato da

$$\gamma \cdot V \cdot \xi$$

D'altra parte, se si sceglie questo centro primitivo C come centro dei momenti, il momento della spinta iniziale S si annulla: quanto alla somma dei momenti delle spinte relative ai due menischi si può sempre esprimere integrando per tutta l'area di galleggiamento il momento della spinta elementare, vale a dire il prodotto di questa spinta

$$\gamma \cdot \vartheta \cdot y \cdot dF$$

per il relativo braccio di leva, che denoteremo con

$$e + y$$

conservando ad y il significato già adottato in precedenza, ed indicando con e la distanza del baricentro dell'area di galleggiamento, e quindi anche dell'asse di inclinazione, dalla verticale passante per C.

Si ha così la relazione

$$\gamma \cdot \vartheta \cdot \int y\,(e + y)\,dF = \gamma \cdot V \cdot \xi$$

Ma il primo membro di essa si scinde subito in due termini, in uno dei quali

$$\gamma \cdot \vartheta \cdot e \cdot \int y dF$$

compare il momento statico dell'area di galleggiamento per rapporto all'asse di inclinazione, momento statico che è identicamente nullo: mentre nell'altro

$$\gamma \cdot \vartheta \cdot \int y^2 dF$$

si trova il momento di inerzia $J = \int y^2 dF$ della stessa area rispetto allo stesso asse.

Concludendo si ha semplicemente

$$\xi = \vartheta \frac{J}{V}$$

Qualunque sia l'ampiezza, sempre naturalmente piccolissima, dell'inclinazione ϑ, la nuova spinta S′ passa dunque per un punto fisso M della linea d'azione della spinta primitiva S.

Questo punto prende il nome di *metacentro* e dista da C di

$$\varrho = \frac{J}{V}$$

si trova cioè sulla verticale del centro di carena, al di sopra di esso, ad una distanza eguale al rapporto tra il momento d'inerzia dell'area di galleggiamento rispetto all'asse di inclinazione, e lo spostamento.

Si vede subito che il galleggiante viene a trovarsi in una condizione molto simile a quella di un solido pesante che fosse sospeso ad un punto fisso proprio in corrispondenza del meta-

centro: la condizione di stabilità del sistema, per rapporto alle variazioni di assetto considerate, si riduce alla condizione che il metacentro venga a trovarsi al di sopra del centro di gravità.

***

Non c'è in questa conclusione nulla che non rientri appieno nel quadro dei risultati che per altra via abbiamo stabiliti.

Basta anzi por mente al fatto che il piano tangente alla superficie dei centri di carena è sempre orizzontale e che perciò la linea d'azione della spinta coincide sempre colla normale a tale superficie, per vedere come il metacentro testè definito altro non sia che il centro di curvatura dell' linea luogo dei centri di carena nel piano del disegno (fig. 140).

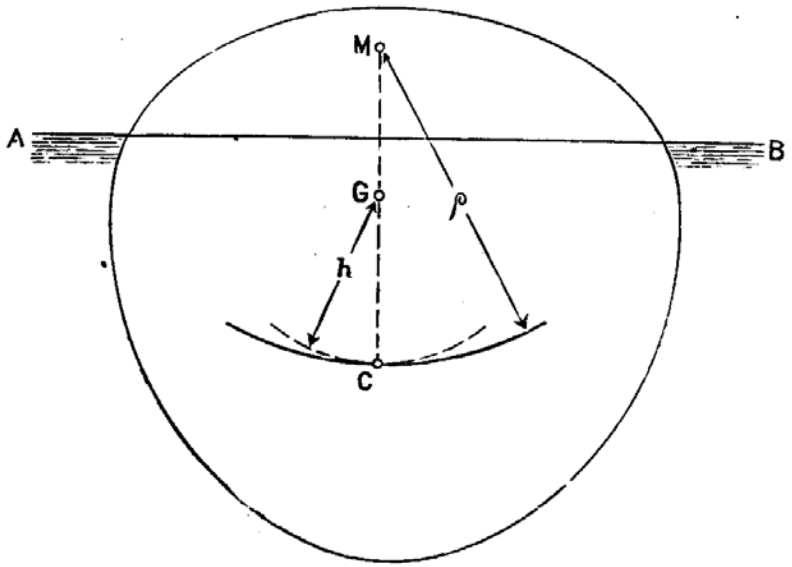

Fig. 140.

Imporre quindi che esso cada al di sopra del centro di gravità equivale precisamente ad imporre che la distanza verticale CG (normale condotta da G alla superficie dei centri di carena) sia minima. Indichiamola con h.

La coppia di raddrizzamento (fig. 139) sarà misurata da

$$\gamma \cdot V(\varrho - h) \operatorname{sen} \vartheta$$

o più semplicemente da

$$\gamma \cdot V(\varrho - h)\, \vartheta$$

Il prodotto della spinta $\gamma \cdot V$ per la distanza $\varrho - h$ a cui si dà abitualmente il nome di *distanza metacentrica*, si chiama *coefficiente di stabilità* del galleggiante.

Esso consta evidentemente di due termini ben distinti: l'uno

$$-\gamma \cdot V \cdot h$$

detto coefficiente della *stabilità di peso*, è negativo (cioè esprime una tendenza al capovolgimento del galleggiante) tutte le volte che, come avviene ordinariamente nelle navi, il centro di gravità si trova situato più in alto del centro di carena.

L'altro termine

$$\gamma \cdot V \cdot \varrho = \gamma \cdot J$$

è invece noto sotto il nome di coefficiente della *stabilità di forma*: è ad esso, vale a dire all'essere esso essenzialmente positivo, che si deve ordinariamente la stabilità effettiva del galleggiante.

Il lettore noterà che esso non contiene altra caratteristica della forma del galleggiante che il momento d'inerzia J: a parità di altre condizioni la stabilità di forma crescerà dunque come i momenti d'inerzia, cioè proporzionalmente ai cubi delle dimensioni trasversali.

***

Il coefficiente di stabilità è suscettibile di essere direttamente determinato in ciascun caso concreto per via sperimentale.

Si abbia infatti un galleggiante in equilibrio nelle condizioni generali supposte dalla nostra trattazione, e scelta su di esso una certa massa pesante situata per esempio in H (fig. 141) si operi il trasporto di essa da H in una nuova posizione K.

Sia p il peso della massa mobile, ed l l'ampiezza della traslazione HK che supporremo, tanto per fissar le idee, orizzontale e contenuta nel piano del disegno.

Si potrà sempre immaginare la nuova posizione di equilibrio del galleggiante come dovuta all'intervento della coppia costituita da una forza p applicata in K e da una forza $-p$ applicata in H.

A questa coppia deve far equilibrio la coppia di raddrizzamento costituita dal peso P′ e dalla nuova spinta S′.

Se si tien conto della piccolezza, sempre presupposta, dell'inclinazione ϑ, si deve quindi avere

$$p \,.\, l = \gamma \,.\, \mathrm{V}\,(\varrho - h)\,\vartheta$$

donde il coefficiente di stabilità

$$\gamma \,.\, \mathrm{V}\,(\varrho - h) = \frac{p \,.\, l}{\vartheta}$$

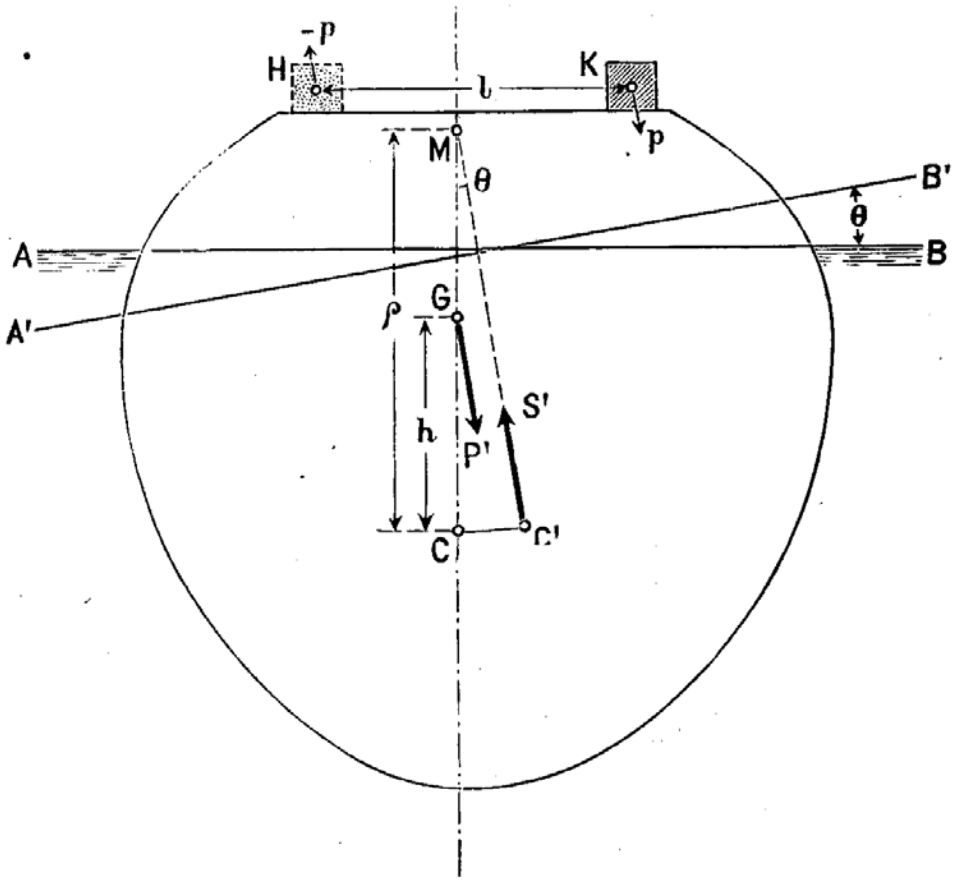

Fig. 141.

Se si opera su di una nave, si misurerà ϑ sospendendo ad uno degli alberi un lungo filo a piombo e rilevando gli spostamenti della sua estremità inferiore.

Se invece si sperimenta su di un galleggiante di piccole dimensioni, si fisserà ad esso uno specchietto, e si osserveranno le deviazioni di un raggio luminoso dallo specchietto opportunamente riflesso.