V.

LE RESISTENZE DI ATTRITO E LA LORO FUNZIONE NELLA STATICA DEI SISTEMI VINCOLATI

Di fronte a tanti problemi in cui le resistenze di attrito assumono agli effetti dell'equilibrio una funzione preponderante — e qualche volta addirittura essenziale — noi non possiamo esimerci dall'aprire qui una breve parentesi per accennare al modo con cui tali resistenze possono, quando occorre, esser tenute nel dovuto conto.

A tal fine incominciamo coll'analizzare brevemente quel che succede quando due solidi naturali vengono posti a contatto.

Noi abbiamo infatti sempre ammesso fin qui che, quando le superficie di due solidi si toccano in un punto, ciascuno di essi eserciti sull'altro una forza avente per linea d'azione la normale comune alle due superficie.

Ora un simile contatto geometrico è una pura astrazione.

In realtà, quando due solidi sono premuti l'uno contro l'altro, essi subiscono una deformazione che riesce particolarmente accentuata nelle immediate vicinanze del contatto: in causa di questa deformazione, i due solidi, anzichè toccarsi in un sol punto, vengono in generale ad avere in comune una porzione più o meno estesa, ma sempre finita, delle loro superficie.

Così stando le cose, non vi è più alcuna ragione perchè l'azione di un corpo sull'altro si riduca ad una semplice forza normale.

Ciascuno dei due corpi subisce da parte dell'altro una infinità di azioni elementari distribuite in modo affatto sconosciuto su tutta la superficie di contatto: azioni che possono anche avere le più svariate direzioni, dipendentemente dalle rugosità

che, più o meno accentuate, si riscontrano sempre nelle superficie dei corpi naturali.

Allora tutto ciò che ci è consentito di affermare, in base alla teoria generale della composizione delle forze, si è che l'insieme delle azioni esercitate dall'un corpo sull'altro si può sempre ridurre ad una forza risultante applicata in un punto arbitrariamente scelto della superficie di contatto — per esempio nel punto del contatto teorico, corrispondente all'ipotesi della assoluta rigidità — e ad una coppia.

D'altronde se per una parte è vero che i corpi naturali non sono mai rigidi in senso assoluto, non bisogna d'altra parte neppur dimenticare che nella maggior parte dei casi pratici che ci interessano, essi sono però abbastanza rigidi perchè la estensione della superficie di contatto si mantenga molto piccola a fronte delle lor dimensioni.

Accade allora che anche la coppia di cui si è testè fatto cenno riesce molto piccola e può, nello studio di molti problemi statici, venire senza inconvenienti trascurata.

Quanto alla forza, giova sempre considerarla decomposta in due componenti: l'una normale alla superficie teorica di contatto, l'altra tangente a questa superficie: la prima, detta " pressione normale „, è in evidente correlazione colla resistenza che i due corpi oppongono alla mutua penetrazione: la seconda ci dà invece un'idea della resistenza che si oppone allo scorrimento dell'uno sull'altro, e prende il nome di " resistenza di attrito „.

Ora l'esperienza anche più grossolana ci avverte che questa resistenza può crescere colla pressione, mantenendosi però ordinariamente nei limiti di una frazione, relativamente piccola, di essa.

Si giustifica così come, a titolo di prima approssimazione, si sia potuto supporre l'azione mutua dei due corpi ridotta alla sola pressione normale: e come, in un secondo grado di approssimazione, ci si possa accontentare di introdurre la resistenza di attrito esprimendo la sua dipendenza dalla grandezza della pressione col ritenerla semplicemente proporzionale ad essa.

In realtà se — in conformità al classico e notissimo procedimento con cui Coulomb ha per il primo sperimentalmente studiate le leggi dell'attrito — si considera un corpo pesante

appoggiato con una sua faccia piana su di un piano orizzontale (sicchè sussista l'equilibrio tra il peso P del corpo e la risultante delle reazioni del piano) e si applica poi al corpo una forza orizzontale F di intensità gradualmente crescente, si osserva che l'equilibrio continua a sussistere fino a quando questa forza non ha raggiunta una ben determinata intensità.

In queste condizioni la risultante R delle reazioni del piano sarà necessariamente divenuta obliqua (fig. 127): la sua componente verticale (cioè normale al piano) continuerà ad essere

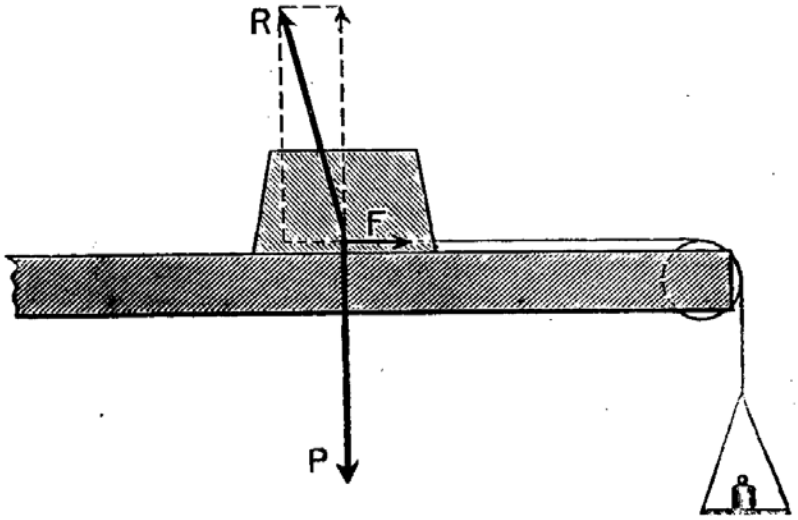

Fig. 127.

eguale e contraria al peso P: la sua componente orizzontale (resistenza di attrito) dovrà invece essere eguale e contraria alla forza F.

Solo quando questa forza F supererà il limite sopra accennato, l'equilibrio cesserà di sussistere ed il corpo prenderà a scorrere sul piano nella direzione della forza: ne dedurremo naturalmente che la resistenza di attrito non basta più ad equilibrare la F.

Ora il massimo valore che può assumere la resistenza di attrito — o, ciò che fa evidentemente lo stesso, il minimo valore di F per il quale l'equilibrio cessa di sussistere — è, nelle circostanze più comuni, sensibilmente proporzionale al peso: ed il coefficiente di proporzionalità è sensibilmente indipendente dalla estensione della superficie di appoggio: dipende soltanto dallo stato di essa, variando entro limiti estesissimi al variare della natura dei materiali in contatto e delle condizioni in cui si trovano le loro superficie.

A questo coefficiente di proporzionalità, rapporto fra quel valore di F che determina il primo scorrimento, ed il peso P

$$f = \frac{F}{P}$$

si dà il nome di " coefficiente di attrito „.

Si chiama poi " angolo di attrito „ l'angolo φ che la risultante R delle reazioni del piano fa colla normale a questo nell'atto in cui lo scorrimento sta per prodursi. Si ha evidentemente

$$\operatorname{tg} \varphi = f.$$

***

Tutto ciò premesso, riprendiamo brevemente in considerazione uno qualunque dei problemi di equilibrio di cui ci siamo occupati alla fine del precedente capitolo: quello per esempio del quadro appeso obliquamente ad un muro verticale.

Ed introduciamo l'ipotesi che tra quadro e muro vi sia attrito: vale a dire che la reazione del muro non sia più necessariamente orizzontale, cioè diretta secondo la normale alla sua superficie, ma possa fare con detta normale un angolo non superiore ad un valore dato φ.

È allora evidente che la condizione della concorrenza in un medesimo punto delle forze in gioco — peso P, tensione T della fune di sospensione e reazione R del muro — potrà realizzarsi tutte le volte che il punto di incontro delle prime due (le cui linee d'azione sono date per ogni data

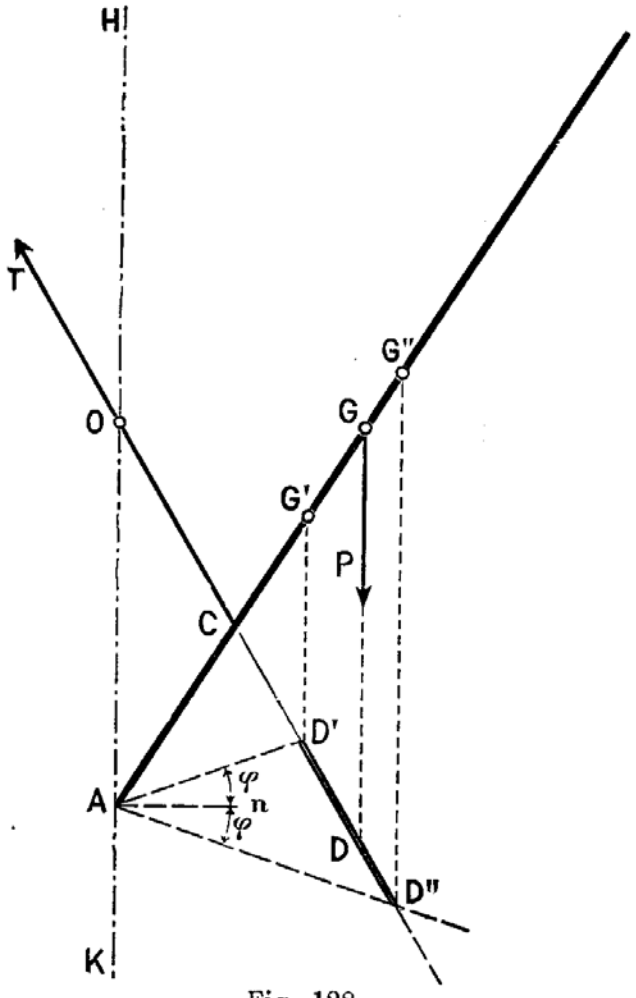

Fig. 128.

posizione del sistema) cade entro l'angolo formato dalle due rette AD′ ed AD″ condotte per il punto A di appoggio del quadro contro il muro, e facenti, colla normale An al muro, un angolo eguale a φ da una parte e dall'altra di essa (fig. 128).

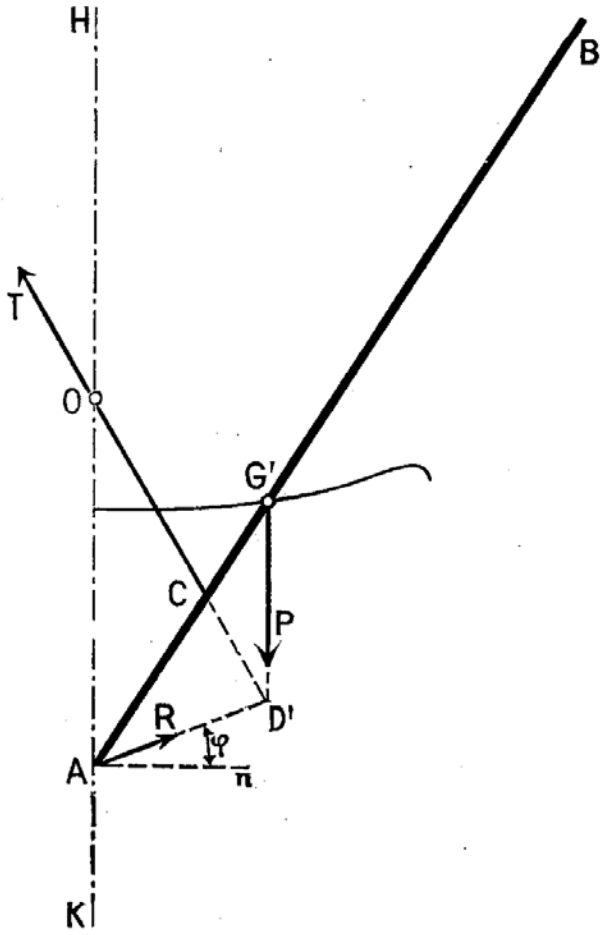

Fig. 129.

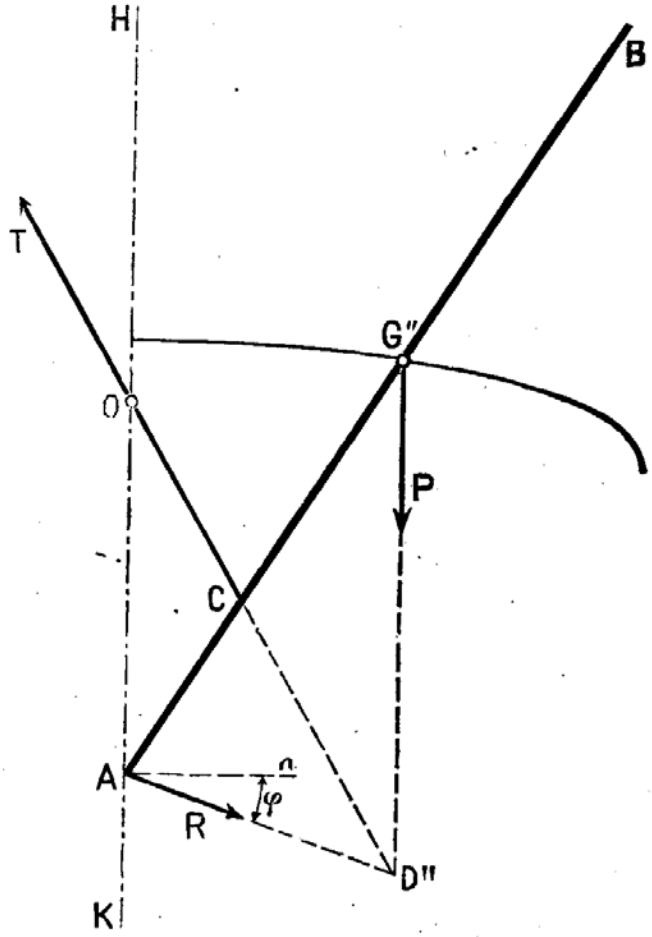

Fig. 130.

Supposta per esempio data la posizione del quadro, e quindi la linea d'azione della tensione T, l'equilibrio sarà possibile sempre quando la linea d'azione di P (verticale passante per il baricentro G) incontrerà la linea predetta in un punto D interno al segmento D′D″.

Le due figure 129 e 130 rappresentano il sistema nelle due condizioni di equilibrio limite, corrispondenti alle posizioni estreme di G, e fanno vedere come in esse la resistenza di attrito sia diversamente diretta, e precisamente come essa si opponga a quel movimento rispettivamente di raddrizzamento o di ribaltamento del quadro che, per la diversa posizione del

baricentro ed il conseguente diverso andamento della sua possibile traiettoria, tenderebbe nei due casi a determinarsi.

***

Non meno tipico è il problema dell'equilibrio di una scala a mano appoggiata col suo piede A su di un pavimento orizzontale OK, e colla sua estremità superiore B contro una parete verticale OH (fig. 131).

Anche qui in assenza di resistenze di attrito l'equilibrio riesce impossibile.

Qualunque sia infatti la posizione del punto C di applicazione della risultante del peso proprio della scala e del peso dell'uomo che sale su di essa, sempre la traiettoria di C è un arco di ellisse che ha OH ed OK per assi, e la cui curvatura è quindi rivolta verso il basso. Un'unica posizione di equilibrio instabile, priva del resto di ogni interesse pratico, si avrebbe quando C occupasse la posizione C_0 più alta dell'ellisse, cioè quando la scala si trovasse in posizione verticale, aderente alla parete OH.

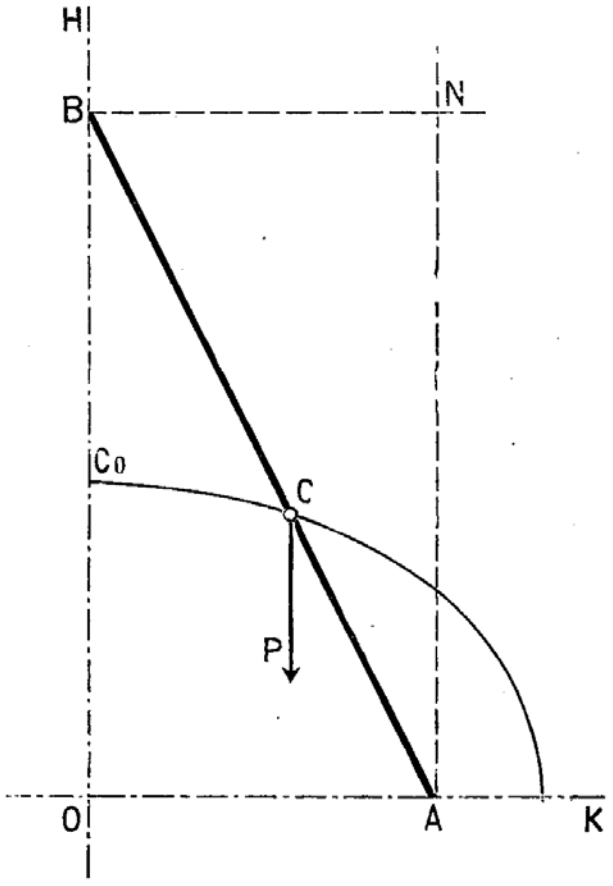

Fig. 131.

Eccezion fatta per questo caso limite, e per l'altro, neppur realizzabile in pratica, in cui C coincida col piede A della scala, è d'altronde ben evidente che la forza P non potrà mai essere equilibrata da due reazioni le cui linee d'azione coincidano colle normali AN e BN.

Per rendere l'equilibrio praticamente possibile basta che una resistenza di attrito si sviluppi in corrispondenza dell'appoggio del piede A della scala sul pavimento OK.

Allora infatti la reazione in A può assumere tutte le direzioni comprese fra la normale AN ed una retta AM (fig. 132)

che faccia colla prima l'angolo φ di attrito. Perciò insieme colla reazione in B (che continueremo pel momento a supporre diretta secondo la normale BN) essa può far equilibrio a qualunque forza P la cui linea d'azione incontri la BN in un punto interno al segmento NM.

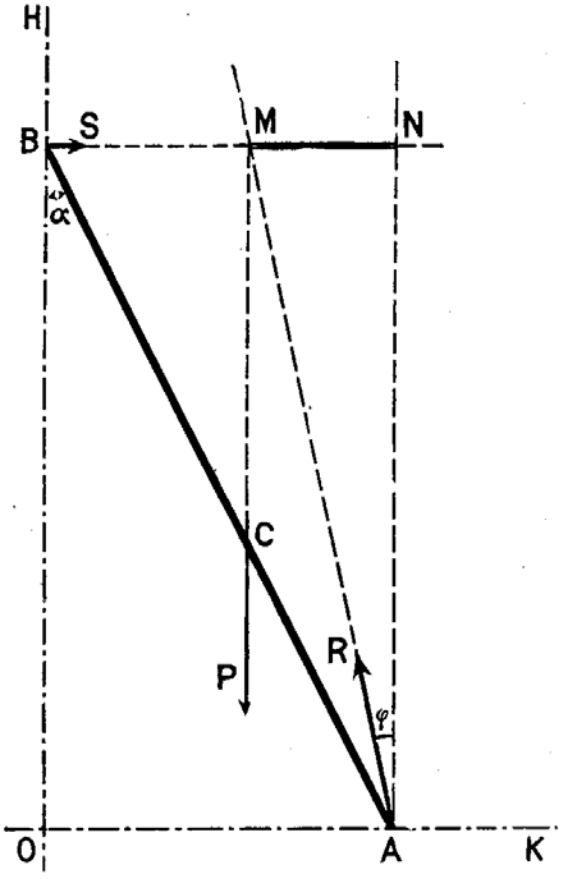

Fig. 132.

L'equilibrio sussisterà dunque sicuramente fino a che, salendo l'uomo sulla scala, il punto di applicazione della risultante P si sposta da A fino in C (fig. 132).

Quando questo punto giunge nella posizione C situata sulla verticale per M si ha la condizione di equilibrio limite rappresentata in figura.

Che se poi il punto di applicazione di P si porta tra C e B l'attrito previsto non basta più ad assicurare l'equilibrio e la scala scivola sul pavimento.

Di qui la doppia opportunità pratica di costruire la scala in modo che il suo peso proprio sia relativamente grande e sia applicato il più in basso possibile: e di collocarla in guisa da rendere l'angolo α che essa fa colla parete verticale minimo, compatibilmente colle esigenze pratiche di chi deve servirsene.

Se α è minore di φ l'equilibrio resta assicurato qualunque sia la posizione di P.

L'intervento dell'attrito anche in corrispondenza dell'appoggio B non altera sostanzialmente le suesposte conclusioni.

Il segmento NM della figura 132 viene soltanto sostituito dall'area N′M′M″N″ della figura 133 per ogni punto della quale si possono condurre due reazioni passanti rispettivamente per A e per B e facenti colle relative normali angoli minori od eguali ai rispettivi angoli di attrito.

L'equilibrio è da considerarsi possibile tutte le volte che la

linea d'azione di P ha qualche punto in comune con detta area: e poichè, in generale, i punti in comune saranno infiniti, l'equilibrio sarà, in generale, da considerarsi possibile in infiniti modi diversi.

L'indeterminazione scompare, ed il problema ritorna ad ammettere una soluzione unica e ben determinata, solo in condizioni di equilibrio limite: quando cioè la verticale di P passa per il punto M′ in cui si incontrano le linee d'azione delle due reazioni nella ipotesi che uno scorrimento stia per avvenire tanto in corrispondenza dell'uno come dell'altro appoggio.

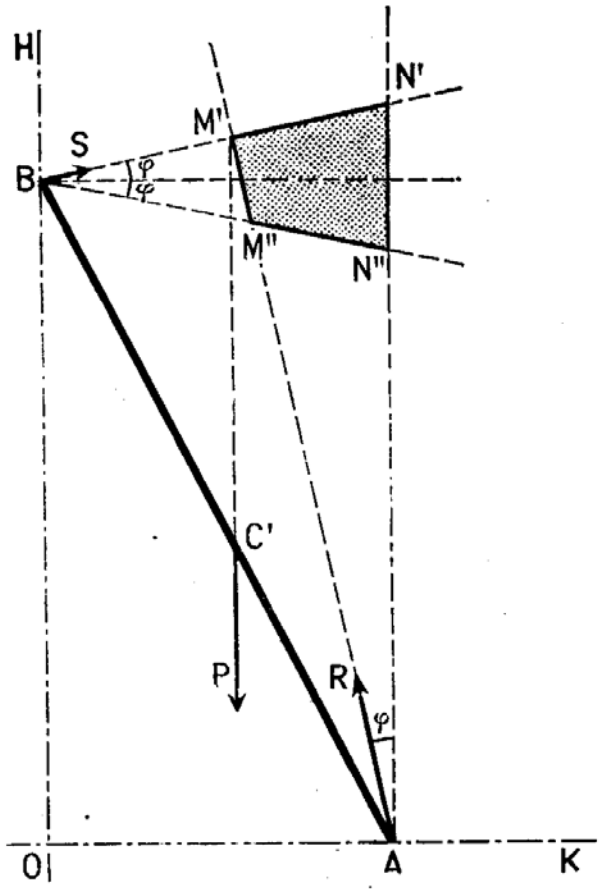

Fig. 133.

***

Passando per un momento dal caso particolare al problema generale, è naturale chiedersi: che uso si può fare, quando esistono le resistenze di attrito, del principio dei lavori virtuali?

Rispondiamo subito che il principio è senz'altro applicabile, a condizione che si trattino queste resistenze (il cui lavoro non è più nullo) come se fossero delle forze esterne date.

Naturalmente non bisogna poi dimenticare che esse non sono date affatto, ma incognite, che possono assumere tutti i possibili valori inferiori a quel certo limite in corrispondenza del quale si manifesta il primo scorrimento.

Le equazioni che si ottengono contengono quindi queste nuove incognite che vengono ad aggiungersi alle solite, cioè alle variabili geometriche da cui la configurazione dipende. Se le equazioni erano sufficienti a determinare la configurazione di equilibrio del sistema nell'ipotesi dei vincoli senza attrito, non basteranno più in generale a caratterizzare l'equilibrio che si realizza in presenza di resistenze di attrito.

Il problema è diventato, per sua stessa natura, indeterminato.

Ridiviene determinato quando si suppone che lo scorrimento sia sul punto di verificarsi: allora infatti ciascuna resistenza di attrito è una funzione nota della corrispondente pressione normale: le nuove incognite automaticamente si eliminano: e quei medesimi procedimenti che a suo tempo abbiamo riconosciuti idonei alla determinazione delle reazioni dei vincoli senza attrito riacquistano la loro piena efficienza e valgono a caratterizzare quello che noi abbiamo già avuto occasione di chiamare col nome di equilibrio limite.

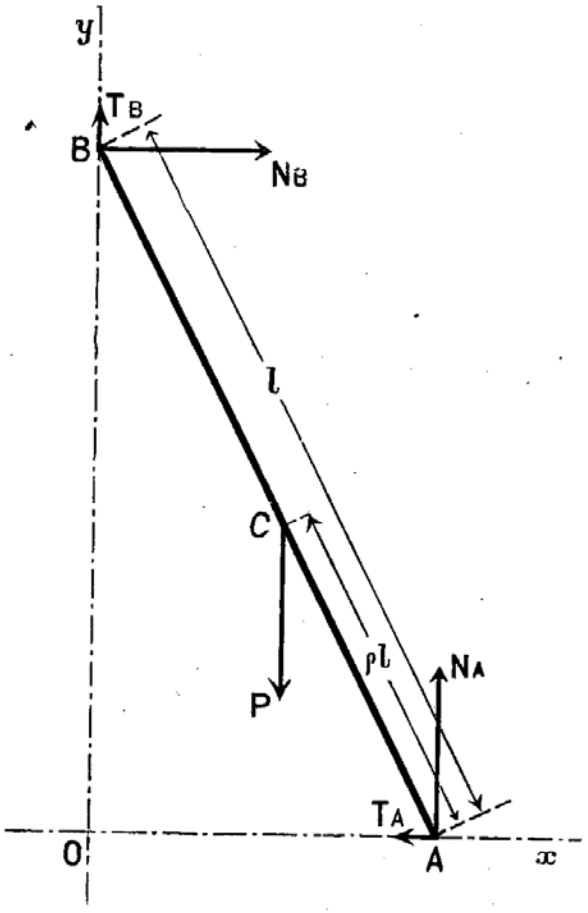

Fig. 134.

***

Per renderci ben conto del modo con cui ciò avviene nei singoli casi concreti, riprenderemo ancora una volta in considerazione il problema della scala a mano, ed assunti il profilo del pavimento orizzontale e quello della parete verticale come assi coordinati delle x e delle y (fig. 134) e denotate con N_A ed N_B le due componenti normali (pressioni) delle due reazioni di vincolo, e con T_A e T_B le relative resistenze di attrito, rivolte in modo da opporsi al possibile scorrimento della scala, immaginiamo che questo scorrimento si avveri.

Poichè le N_A ed N_B non fanno lavoro, l'equazione dei lavori virtuali si riduce alla forma

$$-P \cdot dy_C = T_A \cdot dx_A - T_B \cdot dy_B$$

nella quale, tenute presenti le notazioni della figura e detto

al solito α l'angolo che la scala fa colla parete verticale, riterremo

$$x_A = l \,.\, \text{sen}\, \alpha$$
$$y_B = l \,.\, \cos \alpha$$
$$y_C = \varrho \,.\, l \,.\, \cos \alpha$$

e quindi

$$dx_A = l \,.\, \cos \alpha \,.\, d\alpha$$
$$dy_B = -\, l. \,\text{sen}\, \alpha \,.\, d\alpha$$
$$dy_C = -\, \varrho \,.\, l \,.\, \text{sen}\, \alpha \,.\, d\alpha$$

Sostituendo e riducendo, l'equazione dei lavori diviene

$$P \,.\, \varrho = T_A \,.\, \text{cotg}\, \alpha + T_B$$

Ad essa possono al solito aggregarsi le altre due equazioni che applicando il metodo degli spostamenti si ottengono coll'immaginare attribuite al sistema, idealmente liberato dai suoi due vincoli, due traslazioni elementari parallele agli assi coordinati:

$$P = N_A + T_B$$
$$N_B = T_A \,.$$

Il problema resta indeterminato fino a che non si introduca qualche particolare ipotesi sul valore di una almeno delle resistenze di attrito.

Ma supponiamo che lo scorrimento stia per prodursi, che cioè si abbia

$$T_A = f \,.\, N_A$$
$$T_B = f \,.\, N_B$$

Queste due equazioni, unitamente alle due precedenti, determinano allora subito i valori delle componenti delle due reazioni

$$N_A = \frac{P}{1 + f^2} \qquad T_A = \frac{f \,.\, P}{1 + f^2}$$

$$N_B = \frac{f \,.\, P}{1 + f^2} \qquad T_B = \frac{f^2 \,.\, P}{1 + f^2}$$

mentre la prima delle equazioni da noi scritte serve a caratterizzare la supposta condizione di equilibrio limite.

Se per esempio si considera come data la posizione della scala, cioè l'angolo α, da quell'equazione si ricava subito il valore del rapporto

$$\varrho = \frac{f \cdot (f + \operatorname{cotg} \alpha)}{1 + f^2}$$

e quindi la posizione estrema che, compatibilmente coll'equilibrio nelle condizioni date, può essere raggiunta dal punto di applicazione della risultante dei pesi.

Se invece l'angolo α viene assunto come variabile, la stessa relazione varrà a determinarne il valore che conduce all'equilibrio limite per un valore dato di ϱ.

S'intende che se si vuole $\varrho = 1$, se si vuole cioè che la risultante dei pesi possa elevarsi fino all'estremo superiore della scala senza che l'equilibrio venga compromesso, si ritrova la condizione già nota

$$\alpha = \varphi.$$

***

Non chiuderemo questi nostri brevi e schematici cenni sulla funzione delle resistenze di attrito nella statica dei sistemi vincolati, senza dire una parola di un caso tipico ed importantissimo per le sue svariate applicazioni pratiche: quello di una fune avvolta, o anche semplicemente accavallata, su di un cilindro fisso.

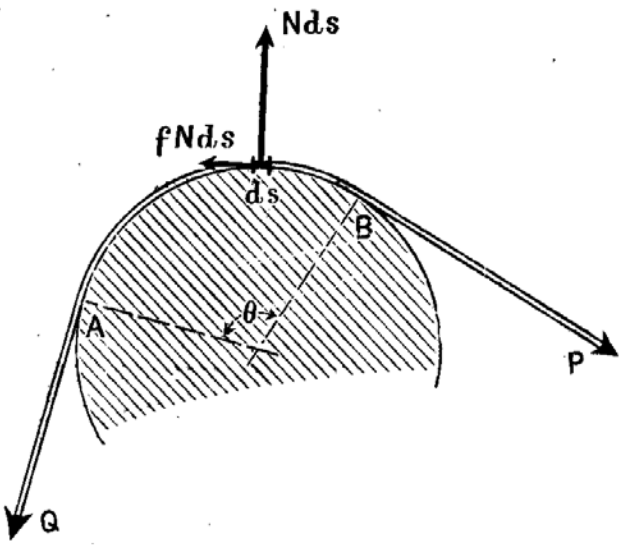

Fig. 135.

Siano le cose disposte come è chiaramente indicato nella figura 135. Niun dubbio che l'equilibrio sussiste fin che le tensioni P e Q dei due rami liberi della fune sono eguali in grandezza: nulla ci vieta infatti in tal caso di supporre la tensione ovunque costante, nella quale ipotesi, qualunque sia la curva sezione retta del cilindro secondo cui la fune è costretta ad atteggiarsi, questa si potrà sempre considerare come la funicolare

di certe pressioni normali perfettamente determinate che il cilindro fisso svilupperà in corrispondenza dei suoi varii elementi.

Ma l'esperienza dimostra che in pratica, grazie all'attrito, si può entro determinati limiti far crescere una delle tensioni, per esempio P, mantenendo l'altra invariata, senza che l'equilibrio cessi per questo di sussistere.

La cosa si spiega subito se, analogamente a quanto abbiamo ammesso nel caso del contatto fra due solidi, noi riteniamo che la reazione del cilindro contro un elemento generico ds di fune possa sempre constare, oltrechè di una pressione normale diretta verso l'esterno del cilindro, anche di una resistenza di attrito diretta tangenzialmente e rivolta in senso contrario allo scorrimento che il prevalere di P su Q tenderebbe a produrre.

Detta $N.ds$ la grandezza della pressione normale, indicheremo al solito con $f.N.ds$ il valore che, in condizioni di equilibrio limite, può venire raggiunto dalla corrispondente resistenza di attrito.

Denotiamo con T e con $T + dT$ i valori della tensione della fune ai due estremi dell'elemento considerato; ed immaginiamo proiettate tutte le forze che sollecitano l'elemento stesso sulla direzione della tangente e su quella della normale.

Tenuto presente che le tangenti in due punti distinti di ds formano un angolo eguale a $\frac{ds}{r}$ (essendo r il raggio di curvatura) e che, al tendere di ds verso zero, il coseno di detto angolo tende all'unità, mentre il seno tende al valore dell'angolo, si trovano, per l'equilibrio, le due condizioni:

$$dT = f.N.ds \qquad N ds = T.\frac{ds}{r}$$

le quali dànno:

$$\frac{dT}{T} = f\frac{ds}{r}$$

Integrando si ha (colle notazioni della fig. 135)

$$\log \frac{P}{Q} = \int_A^B f\frac{ds}{r}$$

Per eseguire l'integrazione al secondo membro basta mettere in evidenza l'angolo di contingenza

$$d\vartheta = \frac{ds}{r}$$

si ha infatti, supposto costante il coefficiente f,

$$\log \frac{P}{Q} = \int_0^{\vartheta} f \cdot d\vartheta = f\vartheta$$

ossia:

$$\frac{P}{Q} = e^{f\vartheta}$$

S'intende che questa relazione caratterizza il divario massimo tra P e Q che è compatibile coll'equilibrio.

In essa figura l'ampiezza angolare ϑ dell'avvolgimento: è scomparso il raggio di curvatura r; la possibilità dell'equilibrio di una fune avvolta su di un cilindro fisso (tamburo, puleggia o simili) non dipende dunque dalla forma della sezione di questo; in particolare se questo è circolare non dipende dal suo raggio; dipende soltanto dal numero di giri (o di frazioni di giro). E siccome l'esponenziale $e^{f\vartheta}$ cresce rapidamente con ϑ, basta far fare alla fune un numero di giri relativamente piccolo perchè l'equilibrio possa sussistere con valori enormemente diversi delle tensioni.

Ecco, per esempio, i valori che si ottengono supponendo $f = 0{,}5$ che è presso a poco il coefficiente di attrito di una fune di canapa su di un cilindro di quercia [1]:

numero dei giri =	valore di $\frac{P}{Q}$ =
0,50	4,81
0,75	10,5
1,00	23,1
1,25	51
1,50	111
1,75	243
2,00	533
....	.....

Le applicazioni di questi risultati sono innumerevoli e tutte interessantissime e di grande importanza nella pratica. Con essi si spiegano certi fatti che a prima vista potrebbero sembrare singolari.

Citiamo un esempio fra i tanti.

---

(1) Cfr H. Bouasse, *Statique*, pag. 325 (Paris, Delagrave, 1920).

Chiunque abbia una volta assistito alle operazioni di ormeggio di un piroscafo avrà certamente osservato che le gomene vengono semplicemente avvolte attorno a bitte e bittoni a tale scopo predisposti sullo scafo e sulla banchina d'approdo.

Le loro estremità vengono semplicemente trattenute a mano: ma il lieve sforzo esercitato da chi le trattiene riesce così moltiplicato, attraverso un numero anche non grande di giri della fune, che un sol uomo può in tali condizioni facilmente resistere a sforzi enormi, dell'ordine di grandezza delle tonnellate.

***

Un altro esempio, più espressivo ancora — perchè dà un'idea del vantaggio che si può trarre dalla differenza che intercede tra le due condizioni di equilibrio limite che corrispondono a possibili scorrimenti in sensi opposti — è il seguente che riproduciamo dall'opera già citata del Bouasse.

Un uomo è legato ad una fune semplicemente accavallata sopra un cilindro orizzontale di legno.

È evidente che egli può facilmente tenersi sospeso trattenendo fra le sue mani il capo libero della fune.

Poichè questa fa sul cilindro un mezzo giro soltanto, si dovrà assumere per valore limite del rapporto delle tensioni nei due rami della fune 4,81.

Se l'uomo pesa 70 Kg., basta dunque che egli eserciti su un ramo della fune una tensione di 12 Kg. per sostenere gli altri 58 Kg. che gravano sull'altro ramo.

E può anche sollevarsi da sè. Basta che egli alleggerisca il ramo a cui è legato riportando più di 58 Kg. sul ramo che tiene fra le mani: poi in un secondo tempo potrà raddrizzarsi prendendo nuovamente appoggio sulla legatura e trattenendo il ramo che ha fra le mani coi soli 12 Kg. di cui si è detto dianzi: e così via.

Ben inteso egli sarebbe assolutamente incapace di far muovere la fune colla trazione delle sue mani se all'altra estremità di essa fosse appeso un altro uomo, sia pure dell'identico peso di 70 Kg. Bisognerebbe infatti per far ciò che egli potesse sviluppare uno sforzo di circa 340 Kg.!