

IV.

LA STATICA DEI SISTEMI A VINCOLI INCOMPLETI

Un problema tipico ed istruttivo, pur nella sua estrema semplicità, è quello dell'equilibrio di una bilancia.

Si chiama in modo generale con questo nome un corpo o sistema rigido (giogo) liberamente girevole attorno ad un asse orizzontale.

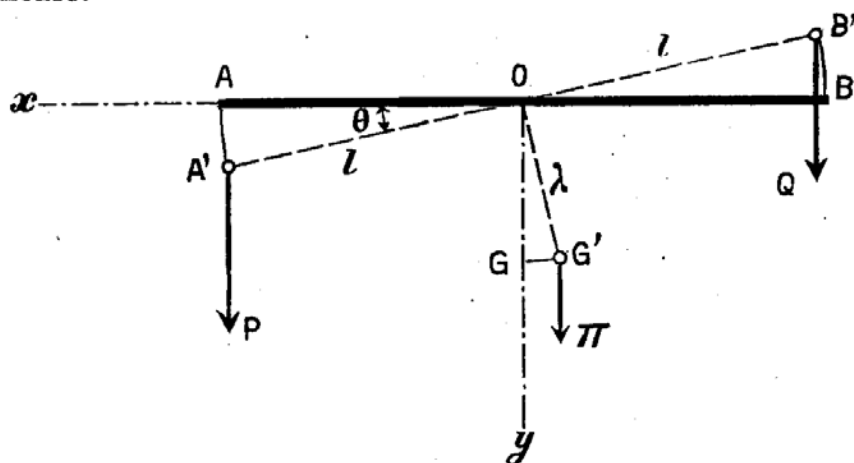


Fig. 92.

Sia O (fig. 92) la traccia di quest'asse sopra un piano ad esso normale — piano del disegno — per rapporto al quale riterremo il sistema simmetrico.

Noi incominceremo coll'ammettere, per riferirci al caso più semplice ed ovvio, che i due punti A e B sui quali agiscono i pesi (piatti, loro sospensioni e loro carichi) non solo giacciono nel piano del disegno, ma siano allineati con O e simmetricamente disposti rispetto ad esso.

Se nessuna altra forza agisse sul sistema, l'equazione dell'equilibrio si ridurrebbe allora alla pura e semplice eguaglianza

dei due pesi. D'altra parte realizzata che fosse questa eguaglianza, l'equilibrio sarebbe assicurato in qualunque posizione della leva.

Però l'identità assoluta dei pesi non è una cosa facile a realizzarsi: ed una bilancia la quale non stesse in equilibrio se non sotto l'azione di pesi identicamente eguali — salvo a presentarsi poi, quando ciò fosse, in condizioni di equilibrio indifferente — sarebbe praticamente inutilizzabile.

Quello che in pratica ci si può proporre, nello eseguire una pesata, è soltanto di rendere la differenza dei due pesi inferiore ad un valore abbastanza piccolo, opportunamente prescelto.

Convieni perciò che l'equilibrio della bilancia sia stabile: che cioè essa, sotto l'azione di piccole differenze tra i pesi, devii bensì dalla sua posizione di equilibrio normale, ma per trovare una sua nuova posizione di equilibrio deviata, rilevando la quale ci si possa fare un'idea dell'entità della prevalenza di uno dei pesi sull'altro.

Per ottenere questo risultato basta far entrare opportunamente in gioco il peso proprio II del giogo, facendo in modo che il centro di gravità G di questo si trovi fuori dell'asse di rotazione.

Al giogo, provvisoriamente liberato dai due piatti, spetta allora naturalmente una sua propria posizione di equilibrio stabile, nella quale G viene a trovarsi sulla verticale di O al di sotto di esso.

Noi ammetteremo ancora che, in questa particolare posizione del giogo, la congiungente AB risulti orizzontale.

In queste particolarissime ipotesi, che definiscono quella che si conviene di chiamare la "bilancia perfetta", è assai facile vedere quel che avviene allorquando nei due punti A e B vengono ad agire due pesi P e Q di poco differenti fra loro.

Posto infatti, per brevità di scrittura,

$$\overline{OA} = \overline{OB} = l$$

ed

$$\overline{OG} = \lambda$$

facciamo l'ipotesi che sotto l'azione della differenza $P - Q$ il giogo ruoti attorno ad O di un certo angolo ϑ .

Perchè nella nuova posizione così definita la leva si trovi in equilibrio, occorre e basta, secondo il principio dei lavori virtuali, che si abbia

$$(P - Q) \cdot l d\vartheta \cdot \cos \vartheta = H \cdot \lambda d\vartheta \cdot \sin \vartheta$$

Di qui la relazione

$$\operatorname{tg} \vartheta = (P - Q) \frac{l}{H \lambda}$$

che lega l'inclinazione del giogo alla differenza dei pesi cui essa inclinazione è dovuta.

Il rapporto

$$\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{P - Q} = \frac{l}{H \lambda}$$

si assume a misura della "sensibilità", della bilancia, vale a dire della sua attitudine ad avvertirci della esistenza della differenza $P - Q$.

Si è così immediatamente condotti a concludere che per avere una grande sensibilità conviene accrescere il più possibile la lunghezza l dei bracci, rendendo in pari tempo minimo così il peso H del giogo, come la distanza λ del suo baricentro dall'asse di rotazione.

Ora nulla vi è da eccepire in merito alla convenienza di rendere il giogo leggero e di avvicinare il più possibile il suo baricentro all'asse.

Ma per quanto si riferisce invece alla lunghezza dei bracci, le cose vanno in pratica molto diversamente da quel che la formola scritta lascierebbe supporre.

Col crescere della lunghezza dei bracci cresce infatti, e molto rapidamente, la inflessione che i bracci stessi necessariamente subiscono sotto l'azione dei pesi applicati alle loro estremità: cresce in conseguenza λ e la sensibilità diminuisce: non solo, ma quel che è più grave, diviene funzione dei pesi P e Q .

Tutto quel che abbiamo detto cessa di essere esatto: le relazioni analitiche da noi stabilite vanno sostituite da altre assai più complesse, nelle quali sia tenuto nel debito conto il fatto che i punti A , O , B , se pure allineati inizialmente (cioè a giogo scarico), non lo sono più quando al giogo si riappendono i piatti, e soprattutto quando questi vengono sovraccaricati.

Ma anche senza riprendere da capo, in nuovi termini tanto più generali, la teoria della bilancia — ciò che ci condurrebbe assolutamente fuori dei limiti che in quest'opera ci siamo imposti — il solo fatto, ormai assodato, che la sensibilità viene a dipendere tanto più marcatamente dall'entità dei carichi quanto più l è grande, basta a renderci ragione della tendenza, fondamentale nella costruzione delle bilancie di alta precisione, a raggiungere grandi sensibilità senza accrescere l oltre misura.

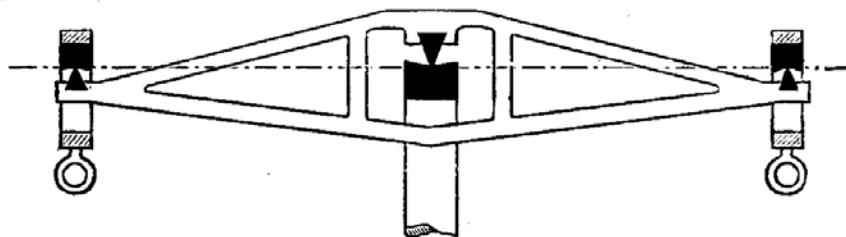


Fig. 93.

Si ottengono gioghi ad un tempo molto rigidi e molto leggeri adottando tipi di travi di grande altezza a parete verticale traforata (fig. 93).

E quando poi si vuole accrescere ulteriormente l'esattezza della misura si muniscono questi gioghi di dispositivi ottici, coll'aiuto dei quali si possono senza difficoltà apprezzare con tutta sicurezza valori anche estremamente piccoli di θ .

*
* *

Nelle bilancie destinate alle applicazioni più correnti, nella costruzione delle quali ci si preoccupa di solito più delle comodità di uso che non della assoluta esattezza della misura, si preferisce non di rado disporre i piatti al di sopra del giogo.

Naturalmente bisogna sempre che la pesata dipenda esclusivamente dalla entità complessiva dei pesi che ciascun piatto porta, non dalla loro particolare disposizione sul piatto.

Ora fin che il piatto era sospeso al di sotto del giogo, nessuna preoccupazione poteva sorgere al riguardo: la possibilità che il piatto aveva di ruotare liberamente attorno al suo coltello di sospensione stava a garantirci che esso si sarebbe, caso per caso, automaticamente disposto in guisa che la linea d'azione della risultante dei pesi ad esso applicati venisse a passare per il coltello, ed agisse perciò sul giogo col dovuto braccio di leva.

In queste condizioni ogni rotazione della leva attorno al suo fulcro implica d'altronde una semplice traslazione del piatto, nella quale tutti i punti di questo subiscono spostamenti identici a quello del coltello cui il piatto è sospeso. Il lavoro fatto dalle orze di gravità non differisce dunque da quello che esse farebbero se tutti i pesi fossero direttamente applicati al coltello.

Ma quando il piatto deve stare al di sopra del giogo non è più materialmente possibile lasciarlo libero di diversamente e liberamente orientarsi: bisogna per necessità di cose guidarlo nel suo movimento: non foss'altro perchè non si capovolga.

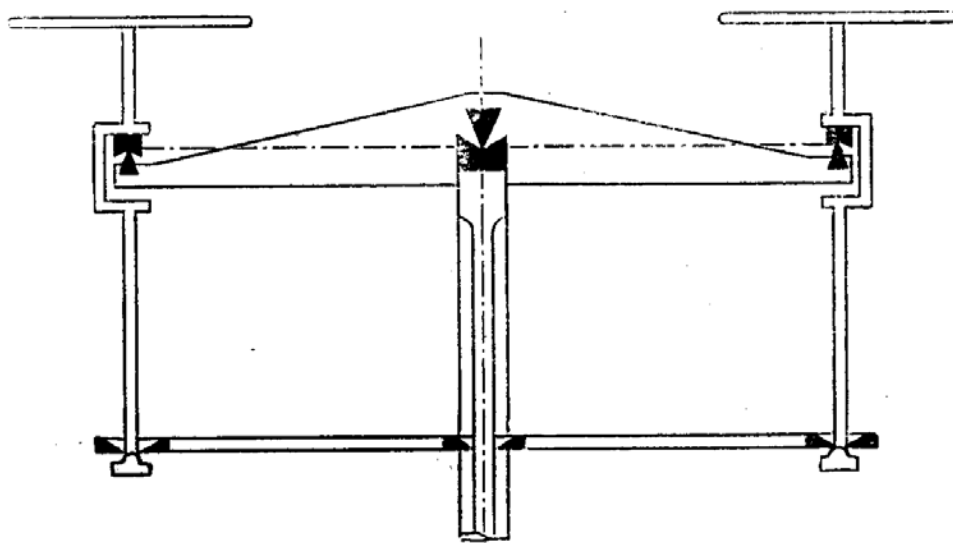


Fig. 94.

Nè si può pensare di rendere il piatto solidale al giogo, perchè, così facendo, i singoli pesi su di esso disposti verrebbero naturalmente ad agire con bracci di leva diversi, ed al ruotare del giogo subirebbero spostamenti diversi, dipendentemente dalle diverse loro posizioni.

Convienne allora procedere nel modo indicato nella figura 94: il dispositivo che essa rappresenta, ideato da Roberval, si riduce in ultima analisi ad un parallelogramma articolato di cui il giogo della bilancia costituisce il lato superiore. Il lato inferiore, parallelo al primo, è vincolato in corrispondenza del suo punto di mezzo e costringe i due montanti a conservarsi in ogni caso verticali. I due piatti che essi montanti portano alle loro estremità superiori sono perciò costretti a mantenersi sempre paralleli a se stessi: subiscono cioè delle semplici traslazioni.

Che un simile dispositivo valga a riportare su ciascun coltello d'estremità del giogo la risultante pura e semplice dei pesi comunque disposti sul relativo piatto, è cosa che si potrebbe dimostrare direttamente, partendo dal principio della composizione delle forze.

Non vale però la pena di addentrarsi in una simile analisi del problema: basta ricorrere al principio dei lavori virtuali perchè diventi immediatamente palese come il parallelogramma di guida adottato da Roberval funzioni, malgrado le diverse apparenze, in modo sostanzialmente identico alla semplice sospensione.

Anche qui infatti, qualunque sia la rotazione impressa al giogo, i varii pesi collocati su di un piatto subiscono tutti un medesimo spostamento verticale, sicchè il lavoro fatto dalle forze di gravità non dipende in modo alcuno dalla particolare loro disposizione sul piatto, ma è semplicemente misurato dal prodotto del suddetto spostamento per il peso totale.

*
* *

Quando i pesi da misurare sono relativamente grandi, e meno preme l'esattezza della misura, si ricorre volentieri all'uso della leva a braccia disuguali.

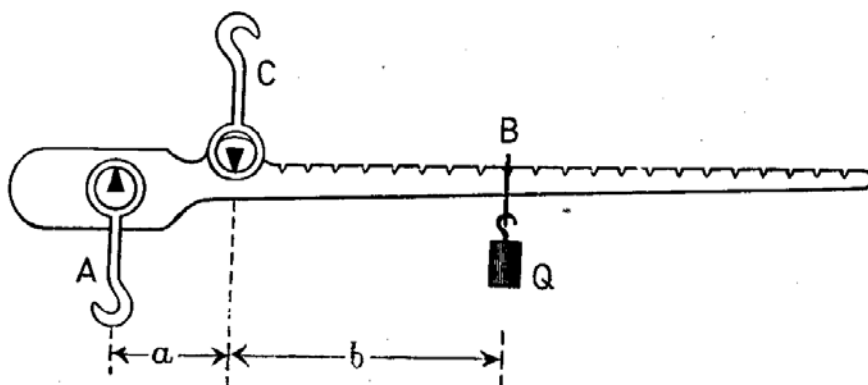


Fig. 95.

La figura 95 rappresenta un tipo di costruzione comunissimo: in esso il peso P da valutarsi viene appeso in A a distanza fissa a dal fulcro C : l'equilibrio della leva si ottiene nel modo più semplice spostando lungo di essa un contrappeso invariabile Q (romano), cioè facendo variare il braccio b con cui esso agisce.

Il peso proprio della leva interviene anche qui ad assicurare la stabilità dell'equilibrio.

Se si tiene presente che tra il peso incognito P ed il braccio variabile b interviene un semplice rapporto di proporzionalità, ci si rende subito conto della possibilità di rappresentare la legge di variazione dei pesi P segnando, sul braccio della leva su cui scorre Q , una scala *uniforme*.

Ad individuare questa scala bastano due sole determinazioni indipendenti, effettuate rilevando le posizioni di Q che rendono orizzontale la leva per due valori di P noti, arbitrariamente scelti. S'intende che per eseguire praticamente la taratura o la verifica di un apparecchio di questo genere si avrà cura di scegliere due valori di P il più possibile differenti fra loro.

Volendo realizzare grandi rapporti tra P e Q senza allungare eccessivamente il braccio della leva su cui Q si sposta non c'è che da diminuire a .

Al di sotto di un certo limite la costruzione viene bensì a presentare delle difficoltà pratiche: ma a queste si sfugge adottando il dispositivo rappresentato nella fig. 96.

Il gancio A a cui si appende il peso P è collegato alla leva, non più direttamente, ma col l'intermediario di un sistema di quattro coltelli formanti parallelogramma articolato.

Lo schema disegnato nella figura in basso mostra chiaramente come il rapporto degli spostamenti AA' e BB' di A e di B per una qualunque rotazione del sistema dipenda dalle distanze tra le verticali relative e la verticale passante per il fulcro C nel modo istesso che è caratteristico della semplice leva.

Nulla dunque è mutato in teoria.

In pratica si è realizzato il vantaggio che uno dei bracci della leva può senza inconvenienti costruttivi ridursi ad essere tanto piccolo quanto si vuole.

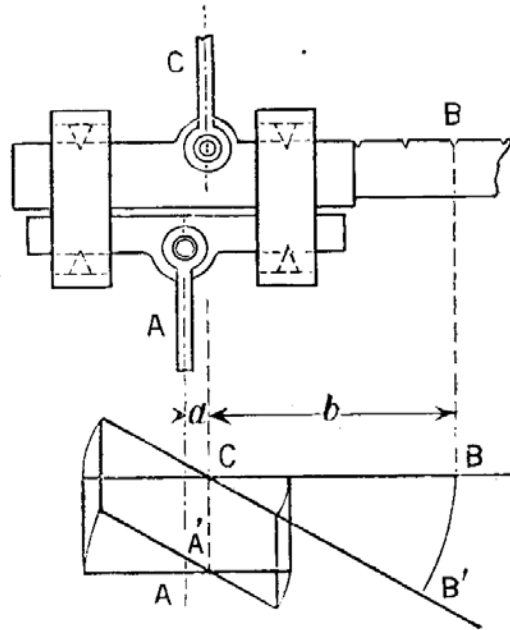


Fig. 96.

*
* *

Ricorrendo alla leva angolare si può finalmente rendere la pesata automatica.

Sia infatti O il fulcro (fig. 97) di una leva angolare in equilibrio sotto l'azione di un peso P applicato all'estremità A e di un contrappeso Q agente in G .

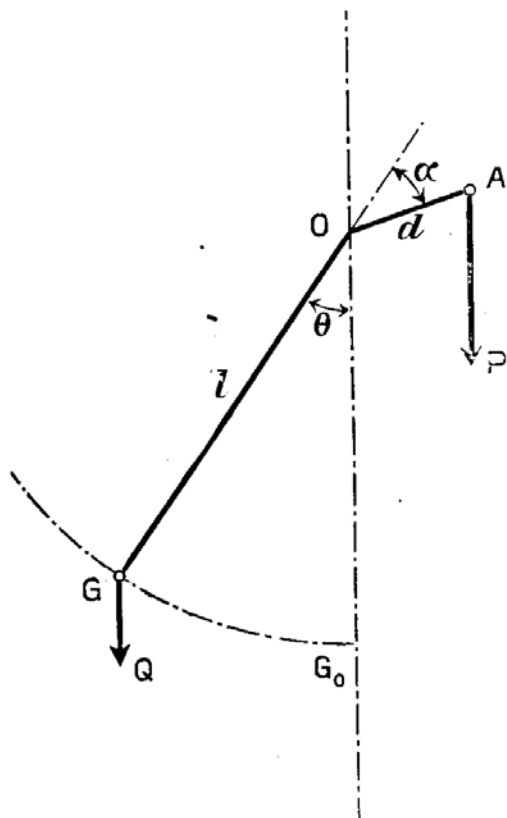


Fig. 97.

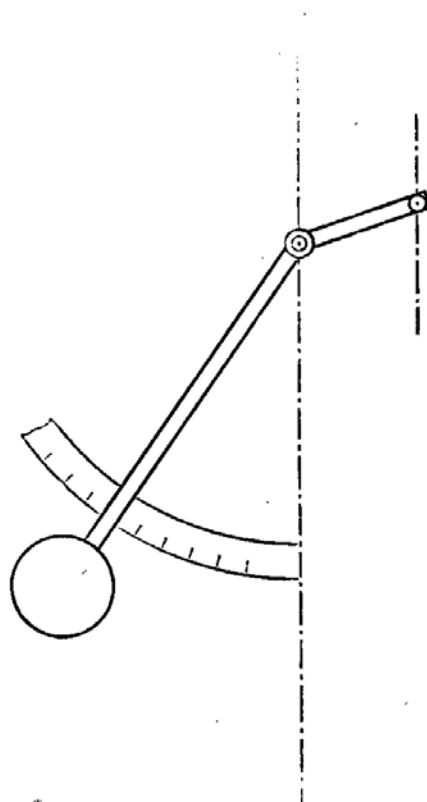


Fig. 98.

Riterremo trascurabile il peso della leva: o meglio ancora, lo immagineremo conglobato nel contrappeso Q intendendo che G sia il centro di gravità dell'intero sistema girevole formato dalla leva e dal contrappeso (fig. 98).

Denoteremo con

$$l = \overline{OG} \qquad d = \overline{OA}$$

le lunghezze dei due bracci di leva, e con α l'angolo fatto dalle loro direzioni: diremo poi ϑ l'angolo che, in una posizione generica del sistema, la congiungente OG fa colla verticale.

Per l'equilibrio deve essere (a meno del solito fattore $d\vartheta$)

$$Q \cdot l \cdot \sin \vartheta = P \cdot d \cdot \sin (\alpha + \vartheta)$$

Per $P = 0$, anche

$$\vartheta = 0$$

l'equilibrio a vuoto si ha quindi, come era ben prevedibile, quando G occupa la posizione G_0 sulla verticale per O .

A valori crescenti di P corrispondono valori crescenti di ϑ .

Si può quindi istituire un riferimento tra i pesi e gli angoli caratterizzanti le rispettive posizioni di equilibrio del sistema: si può in altre parole tracciare una scala sulla quale la leva ruotando indichi direttamente i valori di P .

Ma si vede subito che la scala è ben lungi dall'essere uniforme. Il suo tracciamento richiede quindi in pratica un grande numero di determinazioni indipendenti. Sorge inoltre il problema della scelta della porzione di scala più vantaggiosamente utilizzabile.

Siccome il rapporto

$$\frac{\sin \vartheta}{P} = \frac{d \cdot \sin (\alpha + \vartheta)}{Q \cdot l}$$

diviene massimo per

$$\alpha + \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

si cerca di solito di disporre le cose in modo che le posizioni estreme di A , al variare di P tra i limiti che gli competono, siano presso a poco simmetriche rispetto alla orizzontale per O .

L'adozione di un parallelogramma articolato con funzione analoga a quella già descritta ed illustrata a proposito della bilancia di Roberval, permette anche qui l'uso del piatto superiore (fig. 99).

Naturalmente il peso proprio del piatto e dell'equipaggio di

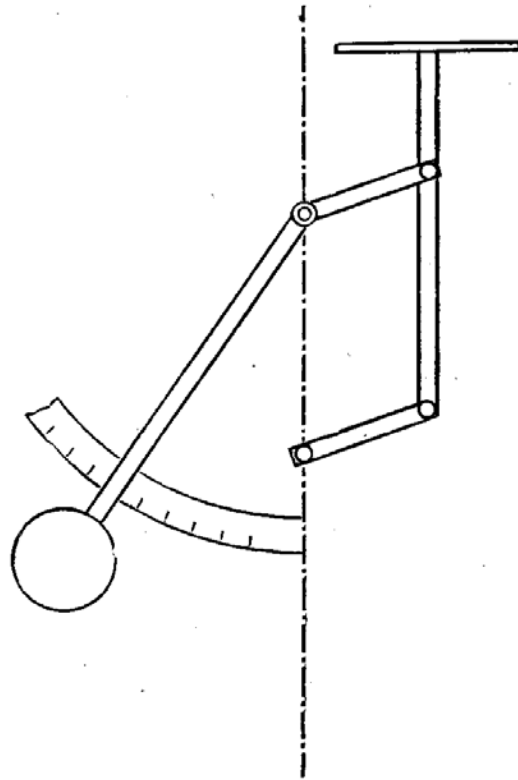


Fig. 99.

guida, quando non sia per suo conto equilibrato, interviene, epperò va tenuto in conto, nella determinazione del campo di maggiore sensibilità.

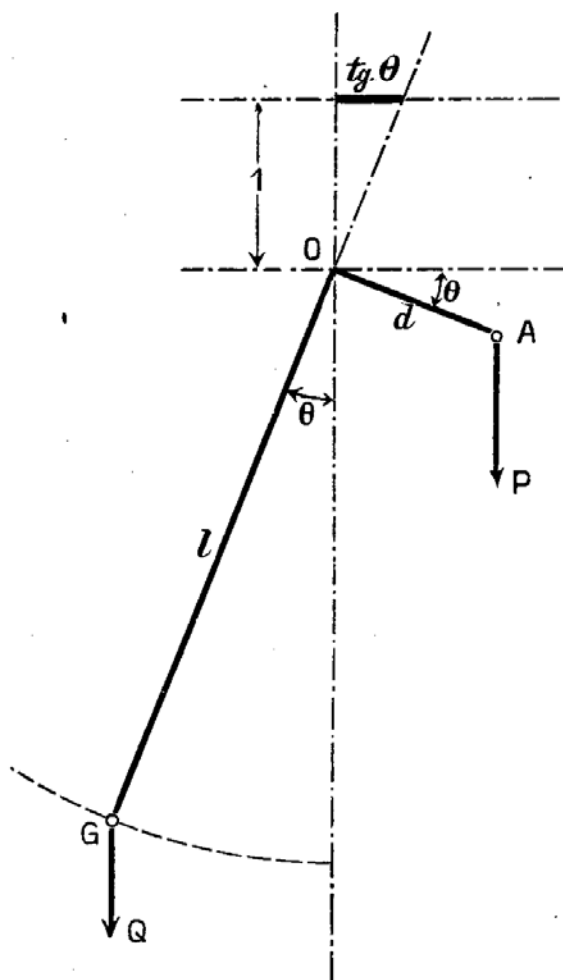


Fig. 100.

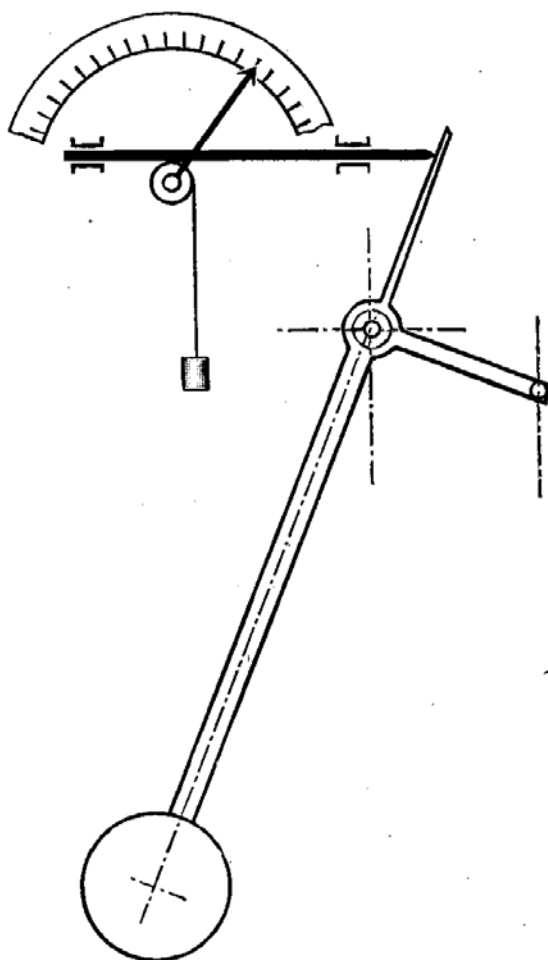


Fig. 101.

*
*
*

Una lieve variante al dispositivo testè descritto permette d'altronde di ottenere una scala rigorosamente uniforme.

Assumiamo infatti (fig. 100)

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

L'equazione generale dell'equilibrio diviene allora

$$Q \cdot l \cdot \sin \vartheta = P \cdot d \cdot \cos \vartheta$$

donde

$$P = \frac{Q \cdot l}{d} \operatorname{tg} \vartheta$$

Se perciò con un dispositivo come quello indicato schematicamente nella fig. 101 si ottiene che un'asticciuola subisca spostamenti eguali a $\operatorname{tg} \vartheta$, un indice ad essa collegato potrà, scorrendo lungo una scala uniforme, indicare direttamente i valori di P .

Due sole determinazioni sono di nuovo sufficienti per la taratura dell'apparecchio.

*
**

A questo punto della nostra esposizione ci sembra necessario sostare brevemente, onde fissare per un momento l'attenzione sopra l'artificio del parallelogramma articolato che, nella bilancia di Roberval come in ogni altro consimile caso, consente l'uso dei piatti superiori al giogo.

Abbiamo infatti detto, nell'accennare a questi dispositivi, che la indipendenza della misura dalla posizione dei pesi sui piatti era in immediata connessione col fatto che i piatti stessi non potevano subire che delle semplici traslazioni.

Ora bisogna tener ben presente che non è affatto necessario che ciò avvenga per movimenti di ampiezza qualunque —

come in realtà si verificava nei due casi particolari che noi abbiamo avuto occasione di illustrare nelle nostre figg. 94 e 99 — basta che la condizione sia verificata per quegli spostamenti piccolissimi nei confronti dei quali si deve, per l'equilibrio, porre l'eguaglianza dei lavori.

Consideriamo, per esempio, un piatto poggiante mediante due coltelli M ed N (fig. 102) su due leve AB e CD girevoli attorno ai loro estremi A e D e collegate fra loro, in corrispondenza degli altri due estremi, da un'asta, o biella di collegamento, BC .

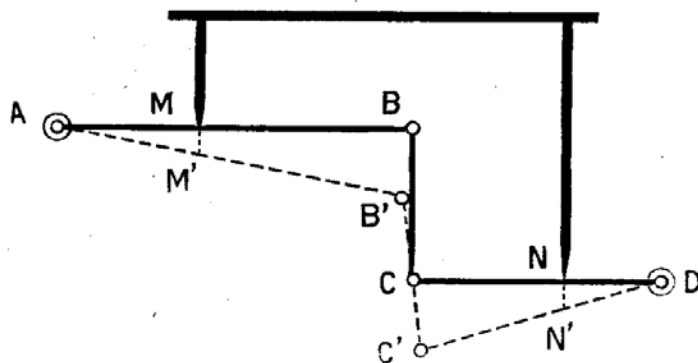


Fig. 102.

L'azione dei pesi collocati sul piatto sarà da considerarsi indipendente dalla loro particolare disposizione su di esso — e quindi funzione soltanto della loro grandezza complessiva —

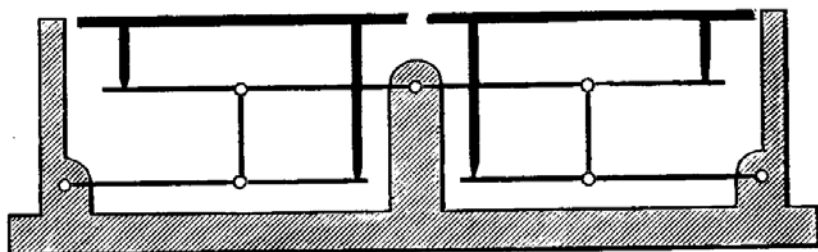


Fig. 103.

ogniquale volta per variazioni di configurazione piccolissime e compatibili col sistema articolato di sostegno, tutti i punti del piatto subiscono il medesimo spostamento verticale elementare:

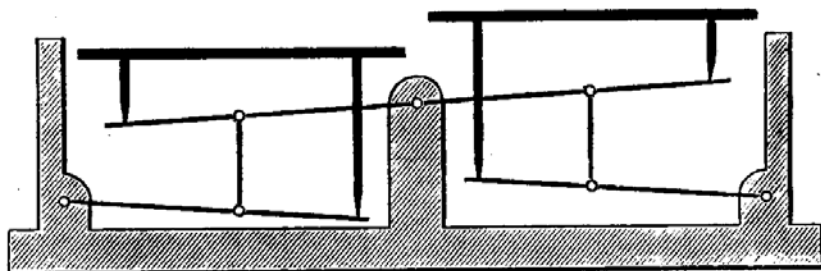


Fig. 104.

ciò che avviene ovviamente sempre quando lo spostamento verticale elementare MM' del coltello M riesce eguale al corrispondente spostamento verticale elementare NN' del coltello N .

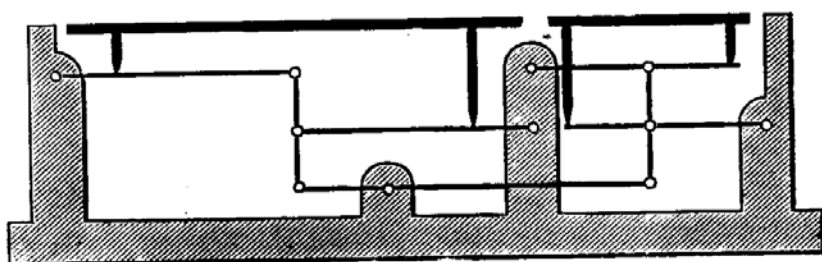


Fig. 105.

Supposto, per fissar le idee, che nella posizione considerata le leve AB e CD siano orizzontali, e la biella di collegamento BC sia verticale, la condizione imposta risulta verificata se

$$\frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC}$$

Di qui il tipo di bilancia (diffusissimo per la sua grande praticità) che la fig. 103 rappresenta, ed il cui funzionamento è a sufficienza chiarito dalla successiva fig. 104 ove lo stesso sistema articolato è stato disegnato in posizione spostata.

La fig. 105 indica come il dispositivo deve essere modificato quando si vuole che le traslazioni simultanee dei due piatti siano di ampiezze differenti: sicchè i pesi collocati sull'uno di essi possano essere equilibrati da pesi collocati sull'altro, i quali stiano ai primi in un ben determinato rapporto.

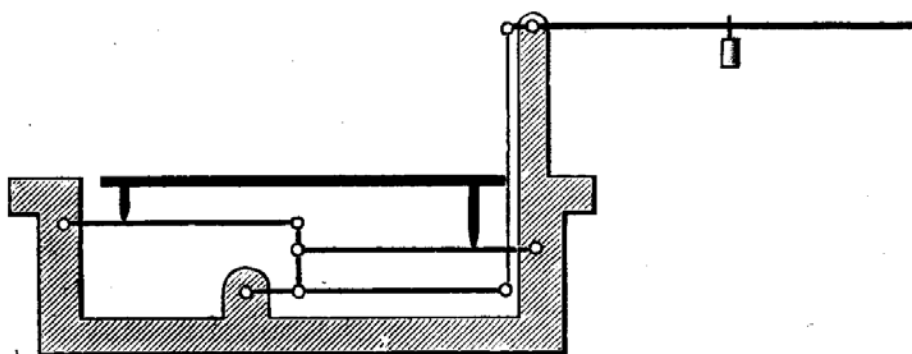


Fig. 106.

S'intende poi che al secondo piatto ed ai relativi pesi si può sempre sostituire il romano di grandezza invariabile agente con braccio di leva variabile.

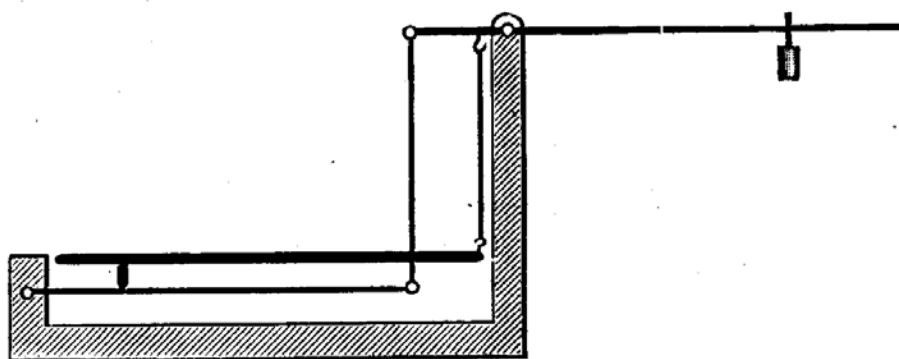


Fig. 107.

Si giunge così a dispositivi del tipo di quello rappresentato nella fig. 106. Per portate più modeste esso può anche essere semplificato nel modo indicato nella fig. 107, che rappresenta un tipo ben conosciuto sotto il nome di bilancia di Quintenz.

Certo la precisione della misura decresce, in queste bilancie, tanto più quanto più si vogliono raggiungere alti valori del rapporto fra la portata ed il peso del romano.

Non è detto però che non si possa con opportuni accorgimenti mantenere la sensibilità della misura entro limiti soddisfacenti anche in bilancie di ragguardevole portata.

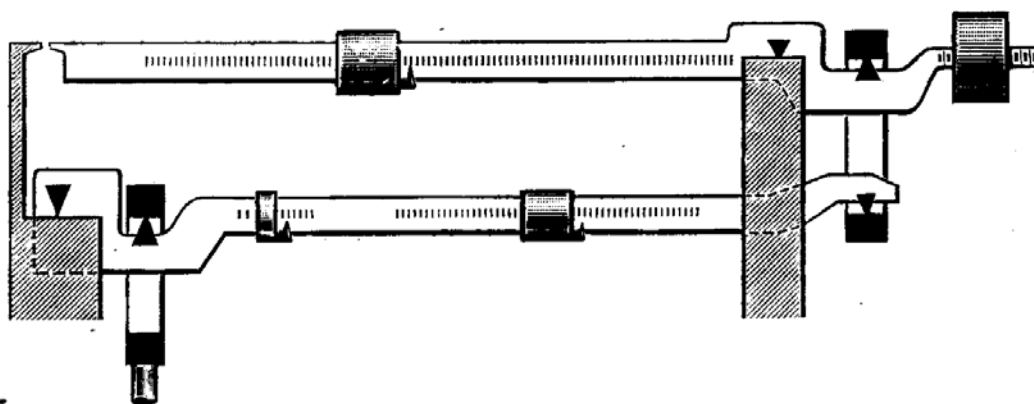


Fig. 108.

Citiamo a titolo di esempio il dispositivo a doppia leva ed a tre romani rappresentato dalla fig. 108, lasciando al lettore la cura di determinare i rapporti da attribuirsi ai singoli bracci di leva ed alle masse dei singoli romani per ottenere che questi indichino sulle rispettive scale multipli o sottomultipli determinati di una medesima unità di misura.

*
* *

Chiudiamo questa breve rassegna dei più varii tipi di bilancie con un accenno ad un dispositivo che riunisce in sè un

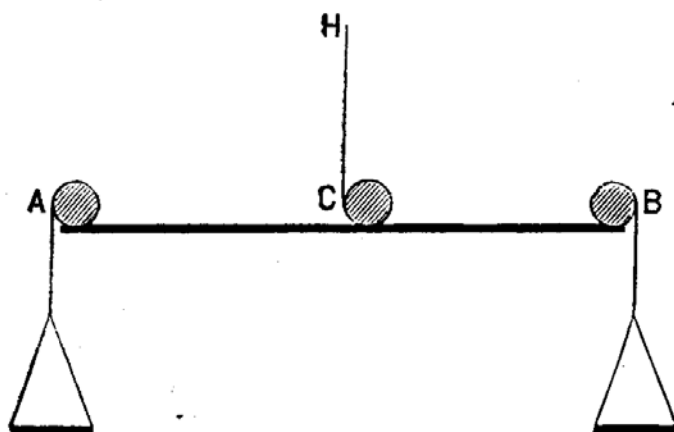


Fig. 109.

duplice pregio: quello di una estrema semplicità di struttura, che lo rende facilmente costruibile da chiunque con mezzi assolutamente elementari, e quello di una certa complicazione funzionale, che offre allo studioso l'occasione di interessanti ed istruttive osservazioni.

Il giogo è costituito da una riga piatta di legno che porta, solidali alla sua faccia superiore, e disposti trasversalmente ad

essa, tre cilindretti identici (fig. 109) per esempio tre pezzi di un medesimo tubetto di vetro di pochi millimetri di diametro.

Il cilindretto centrale è sospeso a due punti fissi H, H per mezzo di due sottilissimi fili avvolti attorno ad esso nel modo indicato nella fig. 110.

I cilindretti laterali vengono in modo analogo utilizzati per la sospensione dei piatti destinati a portare i pesi.

In queste condizioni, oscillando il giogo, il suo centro di gravità G è da considerarsi come solidale ad una circonferenza

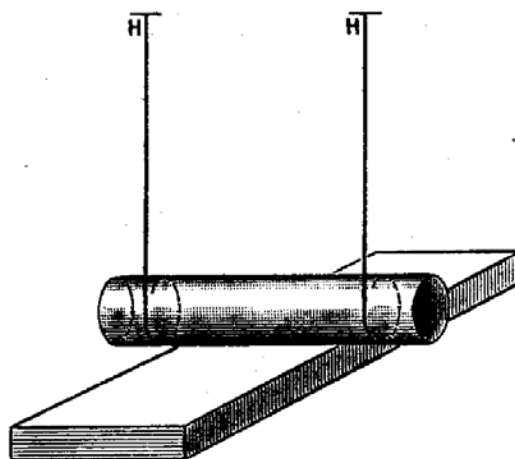


Fig. 110.

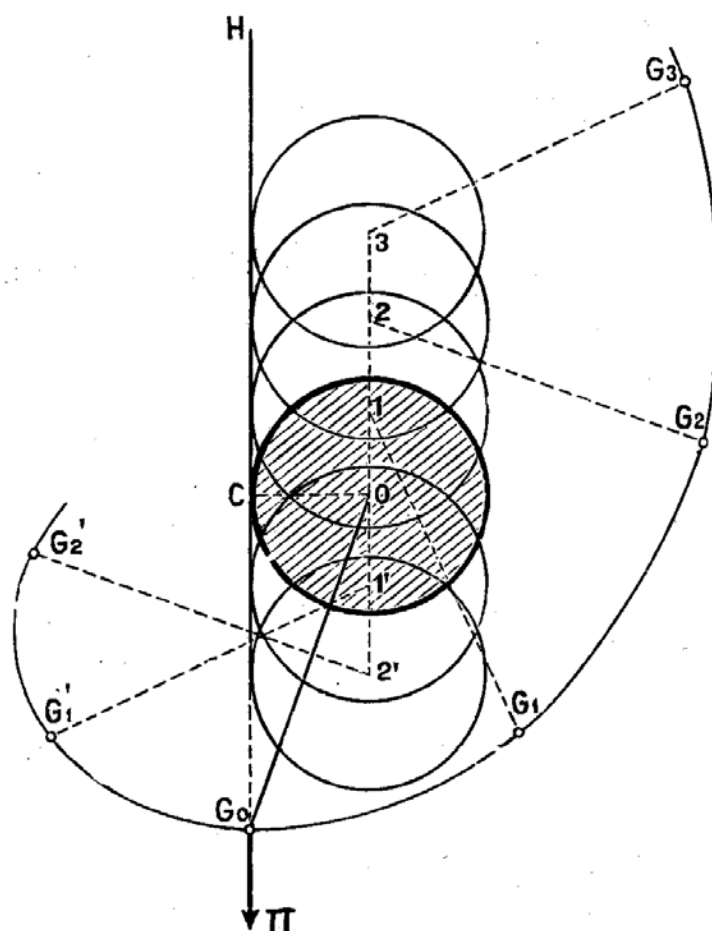


Fig. 111.

(sezione retta del cilindretto centrale) vincolata a rotolare senza strisciare sopra una retta verticale CH (fig. 111): esso descriverà quindi un arco di cicloide.

A giogo scarico il punto G occuperà sulla cicloide il punto più basso G_0 : punto che si deve naturalmente trovare sulla verticale CH , visto che la risultante delle tensioni dei fili, la quale ha la retta CH per linea d'azione, deve far equilibrio al peso II .

Il centro di curvatura della cicloide relativo a G_0 cade ovviamente nel punto

di tangenza C. Tutto si svolge quindi come in una bilancia ordinaria la quale avesse in C il suo fulcro.

In particolare la sensibilità riesce inversamente proporzionale al prodotto del peso proprio H del giogo per la distanza

$$\lambda = \overline{CG}_0 = \sqrt{\overline{OG}_0^2 - \overline{OC}^2}$$

Occorre appena avvertire che tutto quel che siamo venuti dicendo presuppone che G non cada nell'interno della circonferenza di centro O e raggio OC. Ove infatti ciò accadesse la cicloide non ammetterebbe più alcun punto a tangente orizzontale e l'equilibrio diverrebbe impossibile.

Questa limitazione non impedisce però di rendere λ piccolo quanto si vuole: è anzi molto facile raggiungere per questa via alti gradi di sensibilità.

*
**

Vogliamo ora passare ad un'altra categoria di problemi nei quali l'equilibrio potrà a volte presentarsi coi caratteri della stabilità, altre volte con quelli della instabilità. E ci proponiamo di mettere con acconci esempi in evidenza gli elementi che su questo particolare ed importantissimo aspetto del problema direttamente influiscono.

A tal fine incominceremo col riferirci al caso, particolarmente semplice ed ovvio, di un corpo sollecitato da due sole forze eguali e contrarie, per far vedere come la stabilità dell'equilibrio dipenda dal modo con cui le forze stesse mutano al mutare, sia pure di pochissimo, della posizione del corpo cui sono applicate.

È infatti evidente che se, allo spostarsi del corpo nello spazio, le due forze ad esso applicate continuassero a mantenersi fra loro eguali e contrarie, il corpo continuerebbe ad essere in equilibrio nelle sue nuove successive posizioni: non avrebbe cioè tendenza alcuna nè a ritornare verso la posizione iniziale nè a scostarsene maggiormente: ci troveremmo quindi di fronte al caso tipico dell'equilibrio *indifferente*.

Si può facilmente immaginar realizzato questo caso se si pensa ad una sfera appoggiata su di un piano orizzontale (sicchè il suo eventuale peso sia in ogni caso equilibrato dalla reazione del piano) la quale sia tirata in direzioni opposte dalle tensioni

di due fili passanti su due puleggie di rinvio convenientemente disposte, e portanti alle loro estremità libere due pesi eguali (fig. 112).

Le cose andrebbero invece ben diversamente se le due tensioni opposte agenti sulla sfera derivassero per esempio dalla esistenza di due fili (o fasci di fili) elastici, opportunamente tesi tra la sfera stessa e due punti fissi, così come è schematicamente indicato nella fig. 113.

In questo secondo caso infatti, allo spostarsi della sfera, sia pur di poco, verso uno qualunque di quei due punti fissi, le tensioni cesserebbero di essere eguali: e precisamente quella rivolta dalla stessa parte dello spostamento prenderebbe immediatamente a decrescere perchè

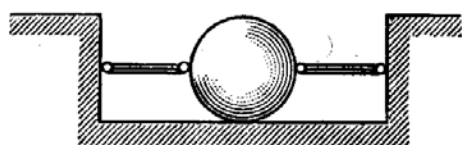


Fig. 113.

i fili sarebbero ivi liberi di accorciarsi e quindi di allentarsi: crescerebbe invece dalla parte opposta, là dove i fili sarebbero costretti ad allungarsi e quindi a tendersi maggiormente. Sulla sfera spostata

verrebbe così ad agire una forza risultante rivolta in senso contrario allo spostamento, epperò tendente a contrastarlo, vale a dire a ricondurre la sfera verso la sua posizione iniziale. La quale posizione iniziale è perciò unica posizione di equilibrio: e l'equilibrio è ivi *stabile*.

Il contrario accadrebbe — dandoci l'esempio di un equilibrio *instabile* — se le due forze applicate fossero di natura tale da dar luogo, in caso di spostamento della sfera, ad una risultante diretta nel senso stesso dello spostamento, epperò tendente ad accrescere lo spostamento stesso ed a scostare sempre più la sfera dalla sua posizione di equilibrio.

Si verifica ciò se, costruita la sfera con un materiale magnetico, la si colloca in mezzo ai due poli opposti di una calamita (fig. 114): ogni avvicinamento della sfera ad uno dei poli determina allora un accrescimento dell'attrazione su di essa esercitata da quel polo, ed una diminuzione di quella esercitata dall'altro.

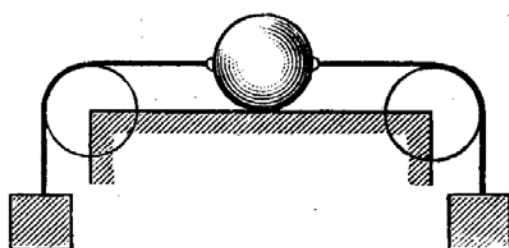


Fig. 112.



Fig. 114.

Pur troppo sono ben rari i casi, in pratica, in cui il problema dell'equilibrio si presti ad una analisi diretta della stabilità così semplice ed ovvia.

Di solito allo spostarsi del sistema materiale nelle immediate vicinanze della posizione di equilibrio, non soltanto le grandezze delle forze mutano, ma anche le loro linee d'azione: nè la legge con cui mutano è sempre conosciuta *a priori*; sovente, per esempio, quando sono in gioco reazioni di vincolo, tale legge è bensì implicita nella definizione del vincolo, ma non è sempre facile trasformarne l'espressione in modo tale che gli elementi che qui ci interessano vi compaiano in modo esplicito.

È allora che il principio di Torricelli e le conseguenze sue, di cui noi abbiamo brevemente discusso nell'ultimo capitolo della parte prima, vengono utilmente in nostro soccorso.

*
* *

Per chiarire la sostanziale identità, e nel tempo stesso, i diversi pregi dei due procedimenti, ci soffermeremo brevemente su di un altro esempio, scelto ancor esso tra i casi di equilibrio più semplici ed intuitivi.

Si abbia un cilindro a sezione retta circolare, il quale, per la non omogenea struttura del materiale di cui è costituito, abbia il suo centro di gravità in un punto G situato fuori del suo asse geometrico.

Appoggiato con una generatrice sopra un piano orizzontale, il cilindro può stare in equilibrio in due differenti posizioni: perchè il suo peso possa essere equilibrato dalla reazione del piano d'appoggio, occorre infatti che il punto G cui esso può intendersi applicato si venga a trovare nel piano verticale passante per l'asse, nel qual piano si trova necessariamente la generatrice di contatto: ma ciò può avvenire, stando G al di sotto ovvero al di sopra dell'asse (figg. 115 e 116).

Ora supponiamo di imprimere al cilindro un moto elementare di rotolamento sul piano, e consideriamo una sua posizione vicinissima a quella di equilibrio: mentre il centro C subisce un certo spostamento orizzontale CC_1 , il baricentro G passa in G_1 .

È allora evidente che se la componente orizzontale dello spostamento GG_1 del baricentro è minore di CC_1 — sicchè la

verticale baricentrica viene, dopo lo spostamento, a trovarsi compresa tra la primitiva verticale d'appoggio e la nuova — l'azione del peso tenderà a far rotolare il cilindro all'indietro, richiamandolo verso la posizione iniziale.

Che se invece la componente orizzontale dello spostamento GG_1 riesce maggiore di CC_1 — sicchè la verticale baricentrica viene collo spostamento a portarsi fuori della porzione di piano compresa tra la primitiva verticale d'appoggio e la nuova — l'azione del peso tenderà a fare ulteriormente rotolare il cilindro nel medesimo senso, scostandolo sempre più dalla posizione iniziale.

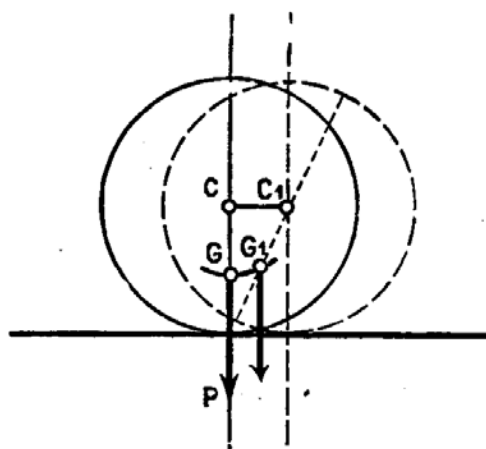


Fig. 115.

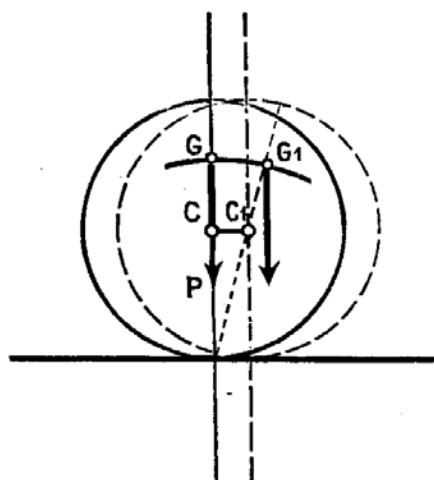


Fig. 116.

Nel primo caso, che l'analisi cinematica del problema dimostra verificarsi ogniqualevolta G sta al di sotto di C , l'equilibrio è stabile. Nel secondo, che si riconosce avverarsi quando G sta al di sopra di C , l'equilibrio è instabile.

D'altra parte il fatto stesso che, nel primo caso, le forze di gravità si oppongono allo spostamento, e tendano, quando esso è avvenuto, a far ritornare G_1 verso la posizione primitiva G , e che, nel secondo caso, lo favoriscano invece, e tendano ad accrescerne l'ampiezza, non si spiega se non in quanto G_1 risulti, nel primo caso, più alto di G , più basso invece nel secondo.

Così alla analisi diretta del modo con cui lo spostamento avviene e con cui si modificano le forze in gioco, si viene naturalmente a sostituire il criterio, eminentemente sintetico e ben più intuitivo, di Torricelli che le posizioni di equilibrio stabile od instabile identifica con quelle di ordinata minima, o rispettivamente di ordinata massima del baricentro.

L'esperienza si fa di solito, perchè riesca anche più espressiva, sopra un piano lievemente inclinato. Bisogna naturalmente che la sua superficie sia abbastanza scabra da escludere ogni possibilità di scorrimenti.

Il cilindro viene ordinariamente costruito con materiale leggero (per es.: legno), e porta incorporata nel suo interno una conveniente massa eccentrica di piombo. Esso viene appoggiato sul piano, orientato in modo che le sue generatrici riescano parallele alle linee di livello (rette orizzontali) del piano.

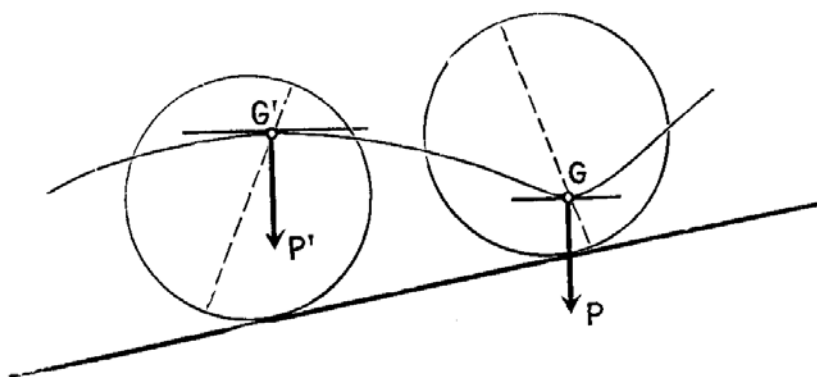


Fig. 117.

Si osserva allora che, grazie alla eccentricità del peso, il cilindro non solo può stare in equilibrio sul piano inclinato, ma, in determinate condizioni, può anche, per breve tratto, risalirne la pendenza.

Quando infatti il cilindro rotola sul piano (senza strisciare), il suo baricentro descrive una cicloide (fig. 117): i punti come G e G', in corrispondenza dei quali la tangente alla cicloide è orizzontale, caratterizzano le posizioni di equilibrio del sistema: e poichè essi sono alternativamente punti di ordinata minima e di ordinata massima, l'equilibrio risulta ivi alternativamente stabile ed instabile.

Nelle posizioni intermedie il cilindro è dal suo peso sollecitato a muoversi in quel senso che implica la discesa del baricentro, e perciò tende ad accostare il sistema alla più prossima posizione di equilibrio stabile.

Tutto ciò sta finchè l'inclinazione del piano d'appoggio non supera un certo limite.

E invero, se tale inclinazione si accrescesse fino a che le tangenti orizzontali della cicloide venissero a due a due a coincidere in una tangente di flesso (fig. 118), anche le posizioni di

equilibrio, stabili ed instabili, verrebbero alla lor volta a sovrapporsi, e l'equilibrio presenterebbe riuniti i caratteri della stabilità rispetto a certi spostamenti, quelli dell'instabilità rispetto a certi altri.

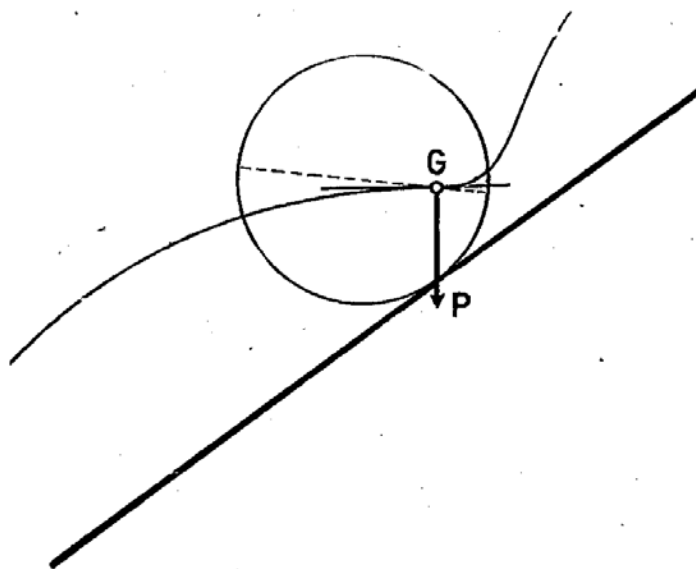


Fig. 118.

Come a suo tempo abbiamo già avuto occasione di avvertire, questo caso va praticamente classificato fra gli equilibri instabili: la stabilità infatti ha, agli effetti pratici, un senso, solo in quanto sussista per rapporto a tutti indistintamente gli spostamenti di cui il sistema, compatibilmente coi vincoli, è capace.

Per inclinazioni superiori, la cicloide non ammette più tangenti orizzontali: l'equilibrio diviene impossibile.

*
* *

Ecco ora un secondo esempio nel quale, per essere la massa pesante suddivisa in due parti distinte, ed animate da movimenti differenti, l'analisi del problema diventa un po' più complessa e nel tempo stesso un po' meno intuitiva.

Un tamburo cilindrico liberamente girevole attorno al suo asse orizzontale (fig. 119) porta due sfere pesanti P e Q: l'una direttamente, all'estremità di un braccio rigido solidale al tamburo; l'altra indirettamente, cioè per il tramite di una fune su di esso avvolta.

Detto r il raggio del tamburo, l la lunghezza del braccio (cioè la distanza del centro di P dall'asse di rotazione), ed in-

dicato con ϑ l'angolo variabile che il braccio fa colla verticale, i due momenti

$$Q \cdot r \quad \text{e} \quad P \cdot l \sin \vartheta$$

debbono, per l'equilibrio, riuscire eguali in valore e di segni contrarii.

Se $P \cdot l < Q \cdot r$ questa condizione riuscirà sicuramente verificata per due diversi valori di ϑ , fra loro supplementari, corrispondenti a due diverse posizioni dei pesi che nella nostra figura abbiamo rispettivamente indicate in P , Q ed in P' , Q' .

È facile individuare graficamente queste posizioni.

A tal fine osserviamo che il momento $P \cdot l \sin \vartheta$ del peso P per rapporto ad O è sempre proporzionale al braccio $l \sin \vartheta$, epperò può sempre da questo braccio intendersi in una certa scala rappresentato: la circonferenza descritta da P intorno ad O come centro può per-

tanto assumersi a rappresentare, colle sue ascisse orizzontali per rapporto al diametro verticale HK , la legge di variazione del momento di P .

Il momento $Q \cdot r$ del peso Q si mantiene invece costante: volendo quindi procedere ad un'analogia rappresentazione grafica di esso, si otterrebbe un diagramma rettangolare la cui ascissa orizzontale (costante) dovrebbe, per tener conto della scala prima adottata, essere eguale ad $\frac{rQ}{P}$.

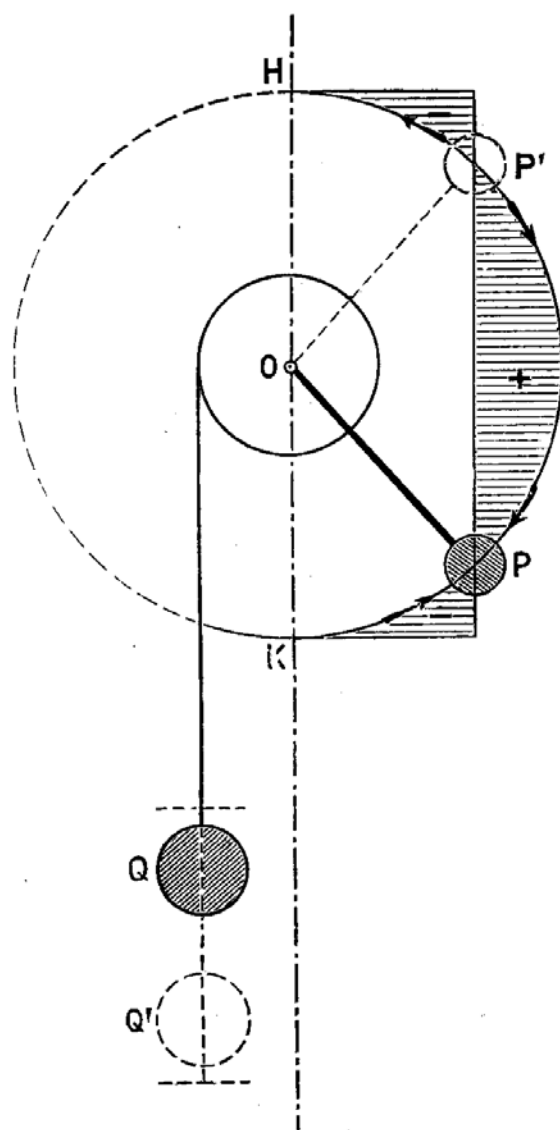


Fig. 119.

Questo diagramma rettangolare noi abbiamo sovrapposto al diagramma circolare precedente.

Per differenza tra i due si ottiene il diagramma dei momenti risultanti (tratteggiato in figura) il quale non soltanto caratterizza coi suoi punti di ascissa nulla le due posizioni di equilibrio, ma mette in evidenza come, nelle altre posizioni del sistema, prevalga l'uno ovvero l'altro dei due momenti.

Secondo questo diagramma, il momento risultante ha il segno del momento di P , epperò tende a far ruotare il sistema nel senso delle lancette dell'orologio, in tutta la regione compresa fra le due posizioni di equilibrio: al di fuori di questa regione ha invece il segno del momento di Q , epperò tende a far ruotare il sistema nel senso contrario.

Qualunque sia la posizione in cui il sistema viene collocato, esso prende quindi a muoversi in un senso tale che lo avvicina alla posizione P e lo allontana dalla posizione P' .

In P l'equilibrio è dunque stabile, instabile in P' .

Ora questa diversa caratteristica dei due equilibrii, che qui ci si presenta come la conseguenza del diverso modo di variare dei bracci di leva, senza che tuttavia se ne veda chiaramente il perchè, deve non solo risultare direttamente, ma trovare la sua spiegazione, nel modo di comportarsi del centro di gravità dei due pesi in gioco.

Ed invero se si traccia la traiettoria descritta da questo punto al variare della configurazione del sistema (fig. 120), si

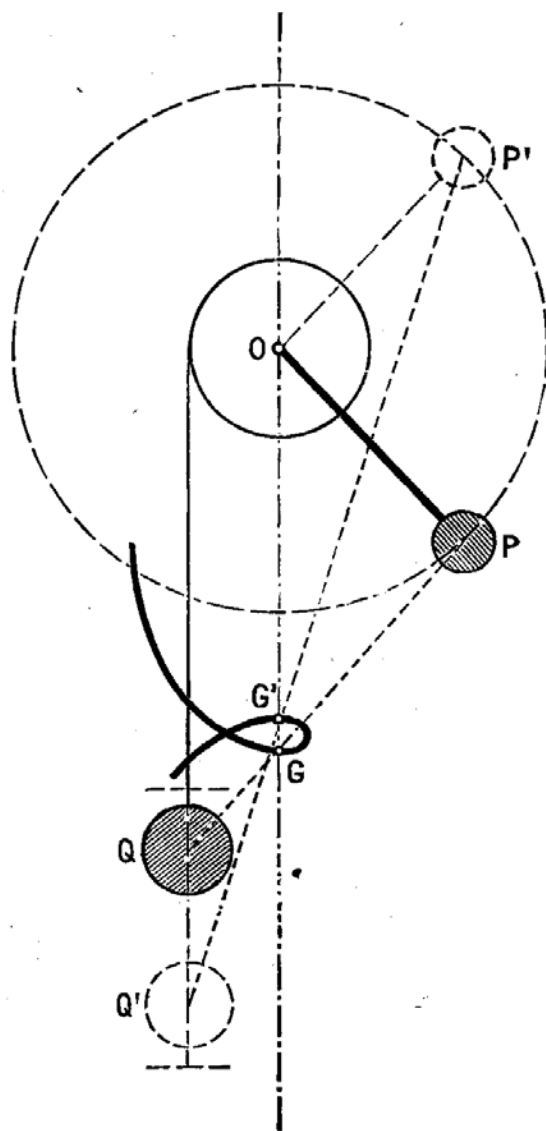


Fig. 120.

constata facilmente come le posizioni G e G' da esso assunte in corrispondenza delle posizioni di equilibrio summenzionate, siano rispettivamente delle posizioni di ordinata minima e di ordinata massima.

*
**

Ed ecco finalmente un terzo esempio nel quale la stabilità o meno dell'equilibrio si ottiene variando opportunamente le

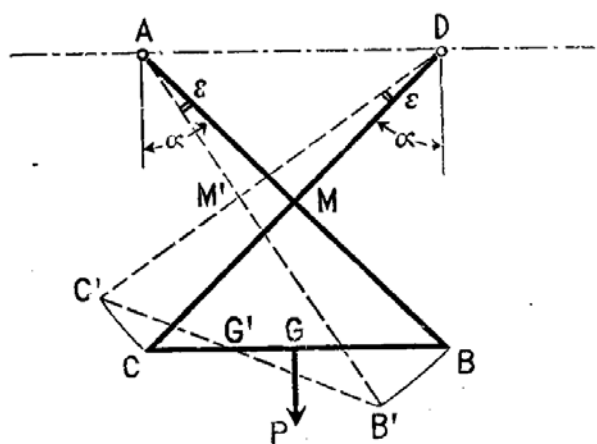


Fig. 121.

condizioni di vincolo.

Un sistema articolato $ABCD$ (fig. 121) è praticamente costituito da un'asta pesante BC sospesa pei suoi estremi, con due sottilissimi fili incrociati, a due punti fissi A e D .

Supposto impedito qualsiasi movimento del sistema fuori del piano della figura, le eventuali posizioni di equilibrio sono ovviamente

determinate dalla condizione che le tensioni nei due fili ammettano una risultante eguale e contraria al peso: per il che occorre naturalmente che il loro punto di incontro M cada sulla linea di azione del peso, vale a dire sulla verticale condotta per il centro G di gravità dell'asta.

Supporremo, per fissar le idee su di un caso molto semplice:

1) che l'asta sia prismatica ed omogenea, sicchè il punto G coincida col suo punto di mezzo, e che la sua lunghezza sia eguale alla distanza che intercede tra i due punti fissi

$$CB = AD$$

2) che questi punti fissi siano situati su di una medesima orizzontale, e che i due fili che ad essi fanno capo siano di egual lunghezza, sicchè, in qualunque posizione del sistema, si abbia

$$AB = DC = l$$

Una posizione di equilibrio è allora certamente quella che ammette per asse di simmetria la verticale condotta per il

punto di mezzo del segmento AD: su questa verticale infatti vengono necessariamente a trovarsi tanto M che G.

Per riconoscere se l'equilibrio è stabile o no, bisogna al solito immaginare impresso all'asta BC uno spostamento elementare compatibile coi vincoli ad essa imposti: uno spostamento cioè nel quale B descriva un arco di circonferenza con centro in A, e C descriva un analogo arco di circonferenza con centro in D.

Se lo spostamento orizzontale che, in questa variazione di configurazione del sistema, compete al punto G è più grande del contemporaneo spostamento orizzontale di M, l'azione del peso nella posizione spostata tenderà a richiamare il sistema verso la posizione primitiva: nella quale pertanto l'equilibrio sarà da considerarsi come stabile.

L'opposto accadrebbe, epperò l'equilibrio sarebbe da considerarsi come instabile, se lo spostamento orizzontale di G, nella variazione di configurazione considerata, risultasse più piccolo del contemporaneo spostamento orizzontale di M.

Come caso limite intermedio, si può chiedersi se sia possibile che, per una variazione elementare della configurazione del sistema, G ed M continuino a stare su di una medesima verticale.

Un tal caso — evidentemente caratterizzante un equilibrio indifferente — si può in realtà verificare.

Detto infatti α l'angolo che, nella posizione simmetrica di equilibrio, i due fili di sospensione fanno colla verticale, ed ϵ la variazione (piccolissima) che esso subisce, rispettivamente in più ed in meno, quando il sistema passa ad una posizione infinitamente vicina, lo spostamento orizzontale dei punti C e B, e quindi anche del punto G dell'asta, si può ritenere, a meno di infinitesimi di ordine superiore, misurato da

$$l \cdot \epsilon \cdot \cos \alpha$$

mentre il contemporaneo spostamento orizzontale di M si può colla stessa approssimazione valutare

$$\frac{\frac{l}{2} \cdot \epsilon}{\cos \alpha}$$

L'eguaglianza di queste due grandezze implica che sia

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

cioè

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Essa si verificherà pertanto quando, nella configurazione simmetrica di equilibrio, i quattro punti A C B D si trovano nei quattro vertici di un quadrato.

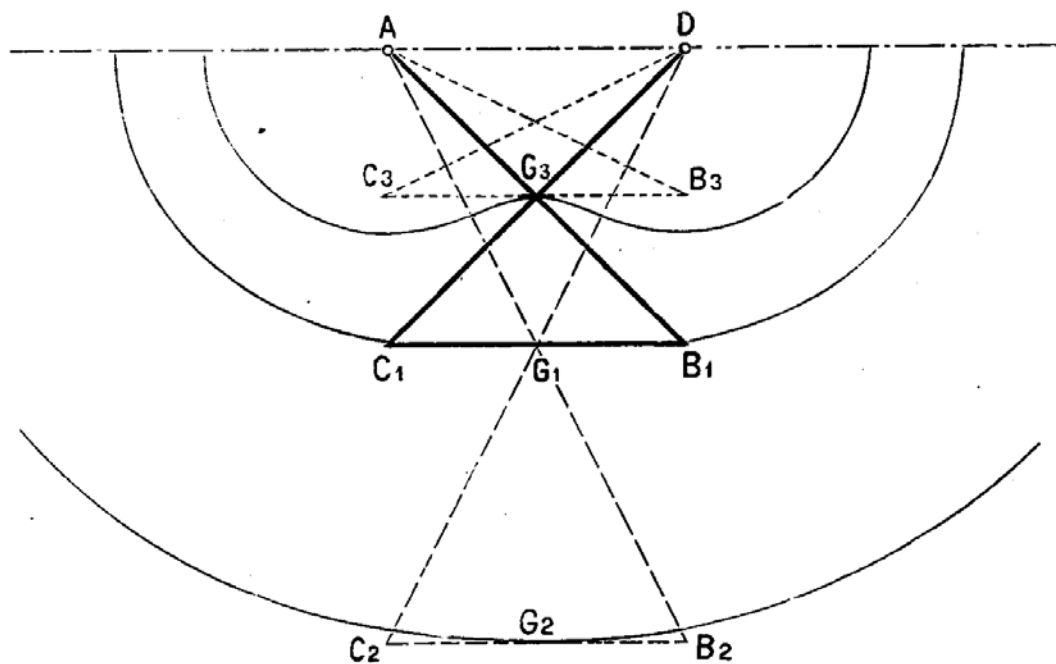


Fig. 122.

La figura 122 illustra il problema dal punto di vista delle traiettorie descritte dal baricentro. Tali traiettorie sono state in essa tracciate in tre ipotesi particolari: la prima delle quali corrisponde esattamente al caso limite testè individuato: le altre due si sono ottenute immaginando i fili di sospensione allungati, ovvero accorciati, quanto occorre perchè la distanza dell'asta dalla orizzontale dei punti fissi risultasse, in condizioni di equilibrio, raddoppiata ovvero dimezzata.

Nella prima traiettoria, quella descritta dal punto G_1 , si riconosce la sensibile orizzontalità di un lungo tratto centrale che spiega la possibilità di un equilibrio indifferente.

Nella seconda il punto G_2 si presenta come un punto di

ordinata minima in corrispondenza del quale l'equilibrio deve necessariamente presentare tutte le caratteristiche della stabilità.

La terza traiettoria ci offre finalmente in G_3 un punto di ordinata massima, e quindi di equilibrio instabile, e ci avverte della esistenza di due posizioni di equilibrio stabile simmetricamente disposte da una parte e dall'altra in corrispondenza dei due punti di minima ordinata della curva.

*
* *

Un esempio molto semplice, ma che, nella sua semplicità, mette bene in evidenza la parte che spetta ai vincoli nella determinazione della stabilità o meno dell'equilibrio, è il seguente.

Due sfere pesanti S_1 ed S_2 si trovano insieme entro una coppa o cavità sferica (fig. 123).

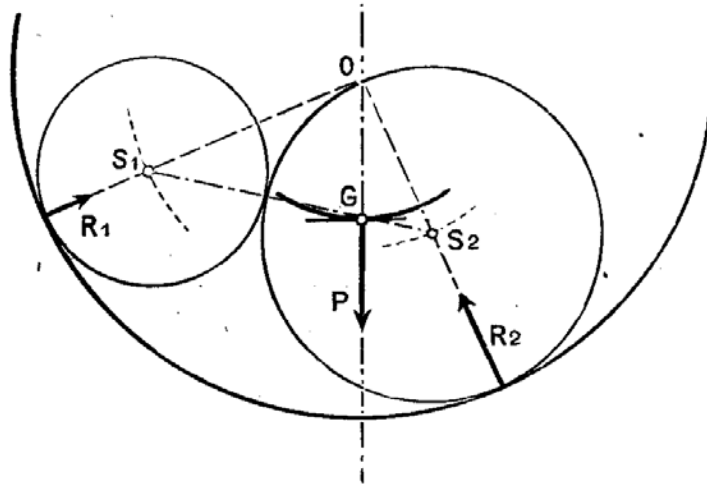


Fig. 123.

È evidente che, perchè esse siano in equilibrio, occorre che le due reazioni R_1 ed R_2 della cavità sferica ammettano una risultante eguale e contraria alla risultante dei pesi, o peso totale, P delle due sfere: occorre quindi prima di tutto che il punto di incontro delle linee d'azione di quelle due reazioni stia sulla linea d'azione di P .

Ma se si suppongono le superficie a contatto tutte perfettamente lisce e prive di attrito, e si ammette in conseguenza che le reazioni siano sempre dirette secondo le normali, vale a dire secondo i raggi, quel punto di incontro delle linee d'azione delle due reazioni R_1 ed R_2 non può che coincidere col centro O della cavità sferica.

Per l'equilibrio occorrerà dunque che il centro G di gravità del sistema formato dalle due sfere pesanti venga a trovarsi sulla verticale passante per O .

D'altra parte, se si tiene conto che in condizioni di equilibrio le due sfere pesanti sono certamente a contatto fra loro, e si considerano quindi quelle sole variazioni di configurazione del sistema in cui questo contatto permane, il centro di gravità G diviene un punto ben determinato del segmento di retta che congiunge i due centri S_1 ed S_2 .

E poichè, in ogni variazione di configurazione che conservi i contatti delle due sfere, non solo tra loro, ma anche colla cavità sferica che le contiene, i loro centri S_1 ed S_2 devono necessariamente muoversi su due superficie sferiche concentriche colla cavità, anche il baricentro G si muoverà sopra una superficie sferica di centro O .

Pel fatto che G , in condizioni di equilibrio, deve occupare su tale superficie sferica la posizione più bassa, viene così ad essere riconfermato che tale punto deve trovarsi sulla verticale per O : e resta nel tempo stesso assodato che in tale posizione il suo equilibrio è sicuramente stabile.

Così stando le cose, noi opereremo una di quelle sostituzioni di vincolo che, non mutando nulla negli elementi materiali in immediato contatto, abbiamo già avuto occasione di riconoscere lecite dal punto di vista della esistenza o meno dell'equilibrio.

Più precisamente immagineremo sostituita la cavità sferica coi due piani ad essa tangenti nei punti in cui essa è toccata dalle due sfere pesanti (fig. 124).

Ammesso che questi piani continuino ad esercitare sulle due sfere quelle medesime azioni che erano prima sviluppate dalla superficie sferica della coppa, nessuna ragione v'è perchè l'equilibrio cessi di sussistere.

E tuttavia le cose sono profondamente mutate dal punto di vista della stabilità.

Invero, anche limitando l'esame delle variazioni possibili di configurazione a quelle sole che si ottengono con movimenti paralleli al piano del disegno, si vede subito che, muovendosi le due sfere a contatto fra loro e coi piani d'appoggio, i due centri S_1 ed S_2 vengono a descrivere due rette parallele a tali piani.

Il baricentro G descriverà allora un arco di ellisse che, nella posizione considerata di equilibrio, deve bensì avere la tangente orizzontale, ma la cui curvatura è ivi certamente rivolta verso il basso. Non si tratta dunque più di un punto di ordinata minima, ma di un punto di ordinata massima, cui corrisponde un equilibrio instabile.

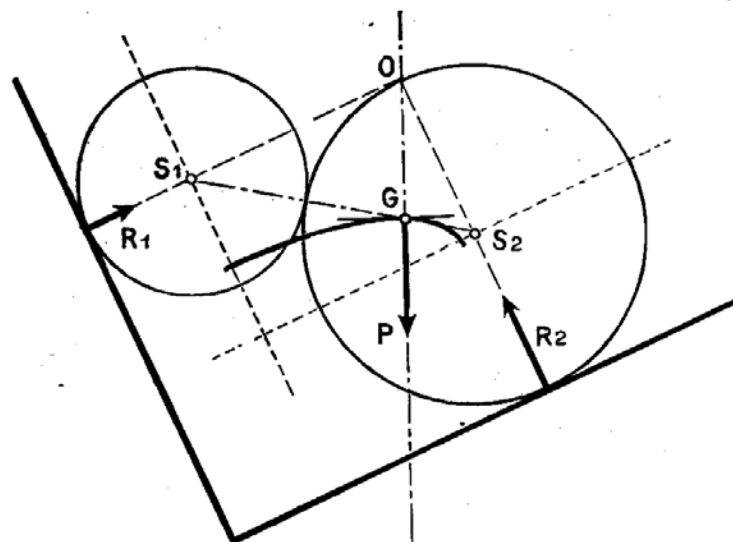


Fig. 124.

Nè diversamente si sarebbe condotti a concludere se si prendessero poi anche in considerazione le variazioni di configurazione che portano i centri S_1 ed S_2 fuori del piano del disegno.

L'esperienza d'altronde è facile a farsi.

Mentre nel caso della coppa sferica le due sfere, abbandonate a se stesse, sotto l'azione del loro peso, trovano ben presto la loro posizione di equilibrio stabile, quando il sostegno è costituito dai due piani, l'equilibrio diviene difficilissimo a realizzarsi: si può anzi dire che, se lo si realizza, ciò avviene perchè si trae, sia pur involontariamente, profitto delle resistenze di attrito che, anche tra le superficie più accuratamente levigate, non mancano mai in pratica di manifestarsi.

* *

Alla stessa conclusione si arriva se si cerca di realizzare il caso rappresentato nella figura 125.

Un'asta pesante AB riposa in C sopra una traversa orizz-

zontale, mentre coll'estremo A poggia contro una parete verticale HK.

Supposti i vincoli privi di attrito, la posizione di equilibrio raffigurata in disegno è evidentemente caratterizzata dal fatto che la verticale d'azione del peso P passa per il punto di incontro delle linee d'azione (normali alle superficie in contatto) delle reazioni dei vincoli.

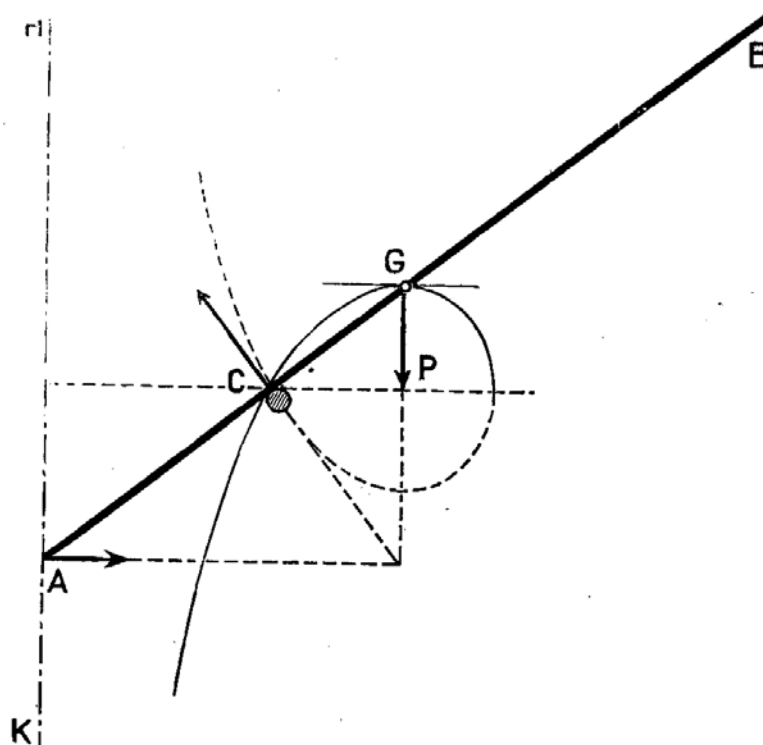


Fig. 125.

La traiettoria del baricentro G mostra chiaramente che l'equilibrio è instabile.

Una posizione di equilibrio stabile sarebbe bensì accusata dalla parte punteggiata della traiettoria, ma questa non è realizzabile fin che si suppone, come noi vogliam fare, che il vincolo imposto ad A sia unilaterale.

Se l'asta AB , invece di essere appoggiata in C , viene ivi guidata nel suo movimento per mezzo di un filo facente capo ad un punto fisso O , le cose vanno nel modo indicato nella fig. 126, la quale, colle traiettorie dei tre punti G_1 G_2 G_3 , mostra chiaramente come, a seconda della distanza a cui è collocato il baricentro, possa aversi o non aversi una posizione di equilibrio instabile.

Nell'esempio da noi prescelto il lettore avrà certamente già riconosciuto il caso tipico dei quadri che si appendono ai muri

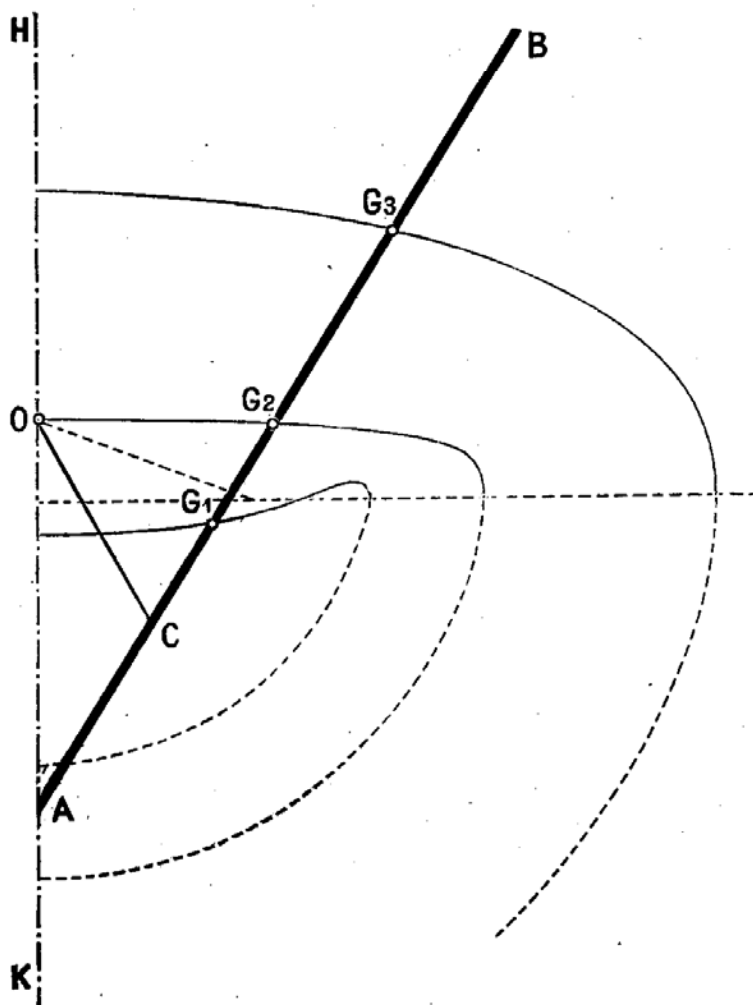


Fig. 126.

in posizione obliqua. Egli sa che in pratica l'equilibrio si realizza senza difficoltà: ma è ora avvertito che se ciò avviene si è soltanto grazie all'intervento, questa volta essenziale, delle resistenze di attrito.