
III.

LA STATICA DEI FILI MATERIALI

Tutto ciò che noi verremo dicendo qui sull'equilibrio dei fili presuppone in essi, rigorosamente verificate, due proprietà che al solito nei fili naturali non sono realizzate se non più o meno approssimativamente: la perfetta flessibilità e l'assoluta inestensibilità.

Dicendo che il filo materiale che forma oggetto del nostro studio è perfettamente flessibile, noi intendiamo affermare che esso non oppone resistenza alcuna ad atteggiarsi secondo una curva qualunque: dicendo che è inestensibile vogliamo aggiungere che, qualunque sia questa curva, l'arco compreso fra due punti materiali generici conserva sempre la medesima lunghezza.

Ciò posto, consideriamo un filo, o tratto di filo, rettilineo, libero da ogni vincolo e sollecitato soltanto da due forze applicate ai suoi due estremi. Noi già sappiamo dalla statica dei sistemi rigidi che condizione certamente necessaria (sebbene ora non più sufficiente) per l'equilibrio è certamente che le due forze siano tra loro eguali e contrarie.

Ammetteremo a titolo di postulato — in evidente dipendenza dalla supposta flessibilità del filo — che perchè un tale equilibrio effettivamente sussista, è ancora necessario che le due forze siano rivolte verso l'esterno del tronco di filo su cui si esercitano.

Ne deriva subito una importante conseguenza: siano F , — F le forze che tengono in equilibrio secondo le norme testè enunciate il filo AB (fig. 66): fissiamo un punto qualunque P del filo, ed applichiamo ad uno dei due tratti in cui questo resta diviso, per esempio al tratto AP , il criterio di equilibrio: le

forze applicate ad AP si riducono evidentemente a due: la F applicata in A e l'azione incognita che P subisce da parte dei contigui elementi del tratto PB. Designando con T questa azione noi dobbiamo ammettere che essa sia eguale ed opposta ad F ,

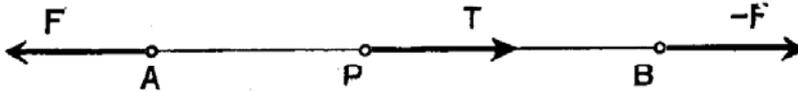


Fig. 66.

ossia eguale a $-F$. Essa è dunque identica per tutti i punti del filo: è sempre rivolta verso l'esterno del tratto di filo su cui si suppone agente: per questo le si dà il nome di *tensione del filo*.

Facendo in particolare coincidere P con A si riconosce che A subisce da parte del filo una tensione uguale alla forza $-F$ applicata all'altro estremo: l'azione si trasmette dunque inalterata lungo il filo, sempre che questo sia, come abbiám supposto, in equilibrio e non sollecitato altrimenti.

Consideriamo ora un filo sollecitato non soltanto agli estremi, ma anche in un numero finito qualunque di punti intermedi: la sua configurazione di equilibrio deve, in relazione a quanto si è detto, essere costituita da una serie di tratti rettilinei: essa prende il nome di *poligono funicolare*.

Isoliamo mentalmente dalle rimanenti porzioni di filo, un tratto LMN di questo in un punto M del quale sia applicata una forza F (fig. 67).

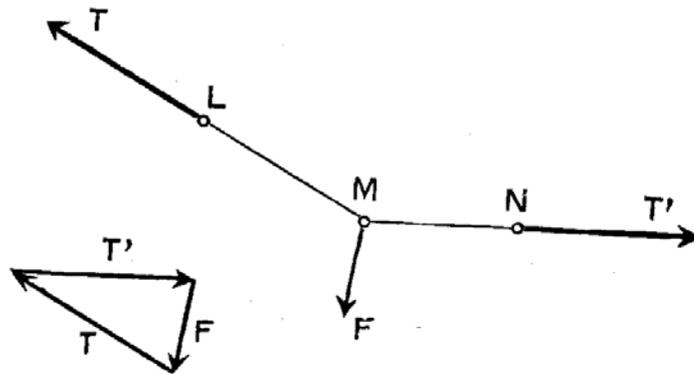


Fig. 67.

È evidente che esso dovrà trovarsi in equilibrio sotto l'azione della forza F e delle tensioni T e T' relative ai punti L ed N. Ciò vale quanto dire che F deve essere eguale e contraria alla risultante di T e di T' .

Nota dunque la forza F e le direzioni dei due tratti di filo ad essa attigui, le tensioni in essi tratti sono da considerarsi

come completamente determinate. Viceversa, date le direzioni di due tratti consecutivi del filo e le tensioni T e T' in essi esistenti, resta determinata completamente la forza che per l'equilibrio deve agire sul punto da cui entrambi si dipartono.

Tra le forze applicate ai vari punti di un filo materiale, le direzioni dei singoli tratti di filo (lati del poligono funicolare) e le relative tensioni, si viene così a stabilire un sistema di relazioni che noi ci proponiamo ora di analizzare accuratamente al duplice scopo di trarne norma per verificare se un poligono funicolare dato sia in equilibrio, e di fissare le regole in base alle quali il poligono può venire tracciato in funzione di quegli elementi che caso per caso figurano fra i dati del problema.

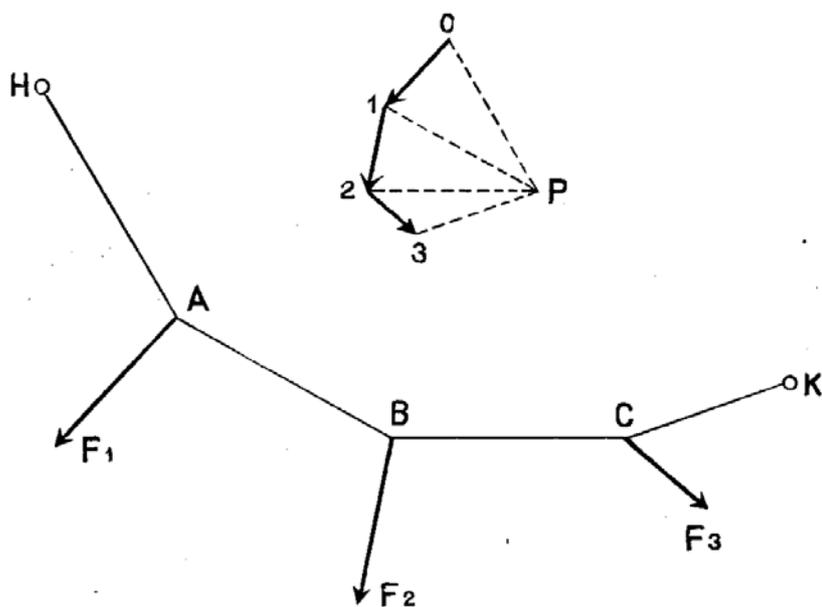


Fig. 68.

Supponiamo per un momento di conoscere le tensioni dei vari tronchi rettilinei della fune: conduciamo da un punto P scelto ad arbitrio dei segmenti $P0$, $P1$, $P2$ (fig. 68) ad esse equipollenti, vale a dire paralleli ai successivi tronchi e di lunghezza proporzionale alle rispettive tensioni. Si può dimostrare che i lati della poligonale che congiunge ordinatamente gli estremi di quei segmenti, sono equipollenti alle forze applicate, cioè rappresentano tali forze tanto in direzione che in intensità.

Consideriamo infatti uno qualunque dei vertici del poligono funicolare, per esempio il punto B : le tensioni T e T' dei due rami adiacenti del filo sono per ipotesi misurate da $P1$ e da $2P$:

ne segue subito che esse ammettono una risultante rappresentata da 2 1: ma si è dimostrato che la forza applicata in B deve essere eguale ed opposta a tale risultante; detta forza non potrà dunque che essere equipollente ad 1 2.

Reciprocamente se si costruisce la poligonale 0 1 2 3... delle forze applicate, si può affermare che ad ogni poligono funicolare che sia configurazione di equilibrio per quel sistema di forze, corrisponde un punto P tale che i raggi proiettanti da esso i vertici della poligonale delle forze misurano le tensioni dei successivi lati del poligono funicolare.

*
**

Lo studio delle relazioni che intercedono tra le due figure costituite rispettivamente, l'una dal poligono funicolare e dalle varie linee d'azione delle forze per cui esso è configurazione di equilibrio, l'altra dalla poligonale delle forze e dal fascio dei raggi che ne proiettano i vertici dal polo, costituisce un capitolo della statica di cui gli ingegneri si valgono con grande successo: esso merita quindi di essere accennato almeno nelle sue linee più generali.

Intanto una prima osservazione sorge spontanea da ciò che siamo venuti dicendo: è evidente infatti che, senza turbare l'equilibrio di ciascuno degli elementi (punti materiali) del filo a cui le forze sono direttamente applicate, queste si possono pensar decomposte secondo i lati del poligono funicolare che a ciascuna fanno capo. Si viene così a sostituire al sistema dato di forze $F_1 F_2 F_3 \dots$ un sistema come 0P, P1, 1P, P2, 2P, P3, ... (fig. 69), in cui tutte le forze intermedie sono per costruzione eguali e contrarie.

Se pertanto si pensano i punti ABC..... come appartenenti ad un unico sistema rigido, tutto l'insieme delle forze ad esso applicate può considerarsi come equivalente a due forze sole: 0P e P3.

Si noti bene che abbiamo detto: " se i punti ABC... si pensano come appartenenti ad un unico sistema rigido „ Non avrebbe infatti alcun senso parlare di ridurre a due sole forze il sistema dato se questo dovesse continuare a pensarsi applicato ad un filo: che anzi è ben evidente che in questo caso, come del resto ogni qualvolta si trattasse di un sistema co-

munque deformabile, la riduzione sarebbe in generale accompagnata da un turbamento del primitivo stato di equilibrio.

In quanto invece le forze date si pensino applicate ad un sistema rigido, la riduzione non soltanto è lecita in quel medesimo senso e con quelle stesse riserve che abbiamo già fatte a suo tempo, ma può assumere un grande interesse in quanto ci pone in possesso di un nuovo strumento di indagine il quale in molti casi facilita in modo inaspettato la risoluzione del problema fondamentale della statica dei sistemi rigidi.

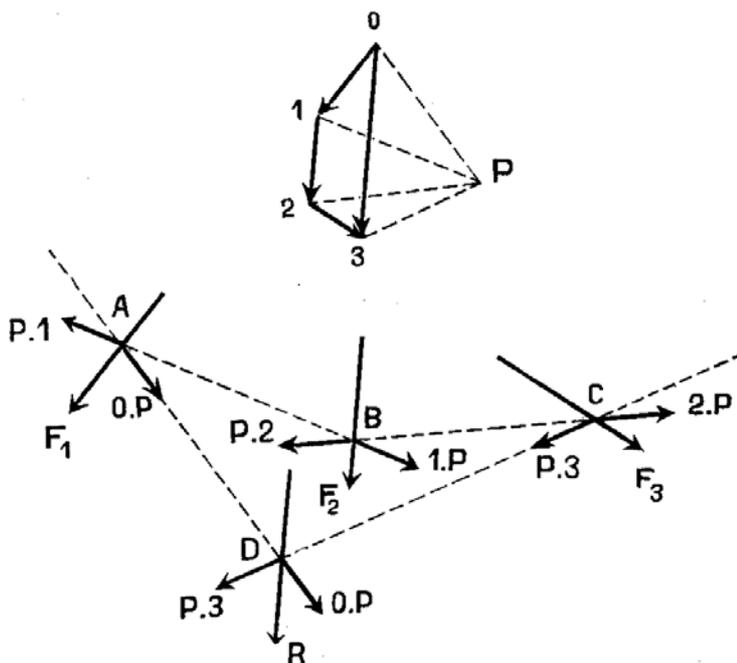


Fig. 69.

Supponiamo infatti che il sistema di forze F_1, F_2, F_3, \dots ammetta una risultante R . Mettiamoci anzi addirittura di proposito in uno di quei casi in cui la risultante esiste sempre: supponiamo cioè di aver da fare con un sistema di forze tutte contenute in un piano, e del resto genericamente disposte.

Questa risultante dovrà potersi immediatamente ottenere componendo insieme OP e $P3$: dunque si può cominciare col-l'affermare che le lor linee di azione, cioè a dire i lati estremi del poligono funicolare, debbono necessariamente incontrarsi in un punto D della linea d'azione della R .

E se si tien conto che grandezza, direzione e senso della R sono già completamente definite dal segmento 03 che va dall'inizio al termine della poligonale delle forze, si può conclu-

dere che la conoscenza di quel punto di incontro D di quei lati estremi è senz'altro sufficiente a determinare la posizione della risultante.

D'altra parte tutto ciò che siamo venuti dicendo non è proprio di uno o di un altro poligono funicolare, bensì di tutti quelli che sono di equilibrio pel dato sistema di forze, perciò si potrà in pratica ricorrere, per trovar la risultante, ad uno qualunque di essi. E precisamente si potrà procedere così.

Scelto nel piano del sistema il polo P ad arbitrio, si proietteranno da esso i singoli vertici della poligonale delle forze. Si assumerà poi, pure ad arbitrio, il primo lato del poligono funicolare parallelo al primo dei raggi proiettanti: gli altri lati riusciranno allora determinati in conseguenza: l'ultimo di essi segnerà sul primo un punto della risultante cercata.

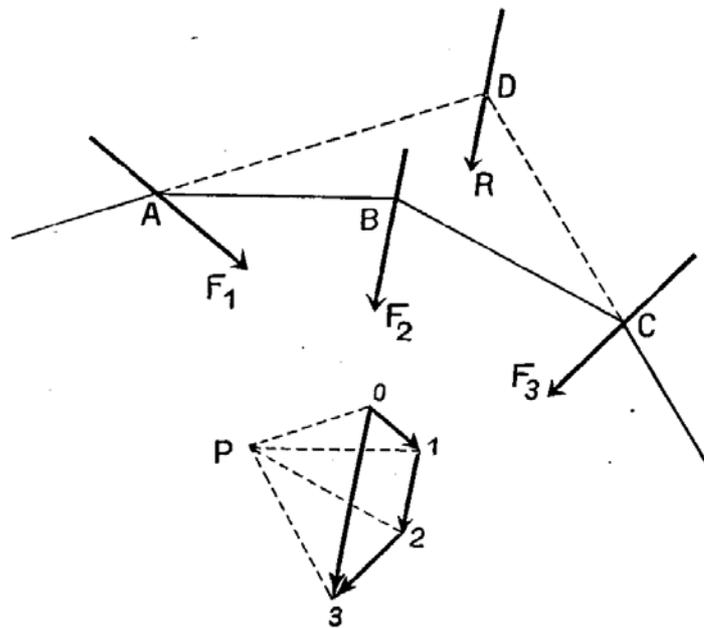


Fig. 70.

Per verità non tutti i poligoni che così si possono costruire potrebbero essere realizzati come figure di equilibrio di un filo flessibile: nella infinita varietà dei casi che così si vengono a presentare, ve ne son di quelli in cui la tensione del filo assume valori negativi (fig. 70) e allora l'equilibrio dei singoli tratti AB, BC, ... cessa di essere possibile a meno che non si escluda la flessibilità del filo lungo di essi: a meno cioè che non si pensi ciascuno di essi come irrigidito e trasformato in un'asta capace di resistere egualmente bene a sforzi di compressione come di trazione.

La cosa ha per verità dell'artificioso: tuttavia si passa sopra a questa difficoltà e si continuano a designare col nome di poligoni funicolari tutti i poligoni costruiti nel modo anzidetto, in quanto, non soltanto quelli a cui propriamente questo nome si addice, ma tutti indistintamente si prestano a servirci

di prezioso intermediario per la risoluzione dei problemi della statica dei sistemi rigidi.

Noi dimenticheremo dunque, almeno temporaneamente, il significato meccanico con cui il poligono funicolare ci si è presentato nella statica dei fili flessibili, e lo riguarderemo puramente e semplicemente come una costruzione grafica la quale ci permette di arrivare per infinite vie diverse alla identificazione della risultante di un sistema piano di forze.

*
**

È intanto prevedibile che alla categoria, così intesa, dei poligoni funicolari devono appartenere quei particolari poligoni che noi abbiamo già imparato a conoscere sotto il nome di poligoni delle successive risultanti.

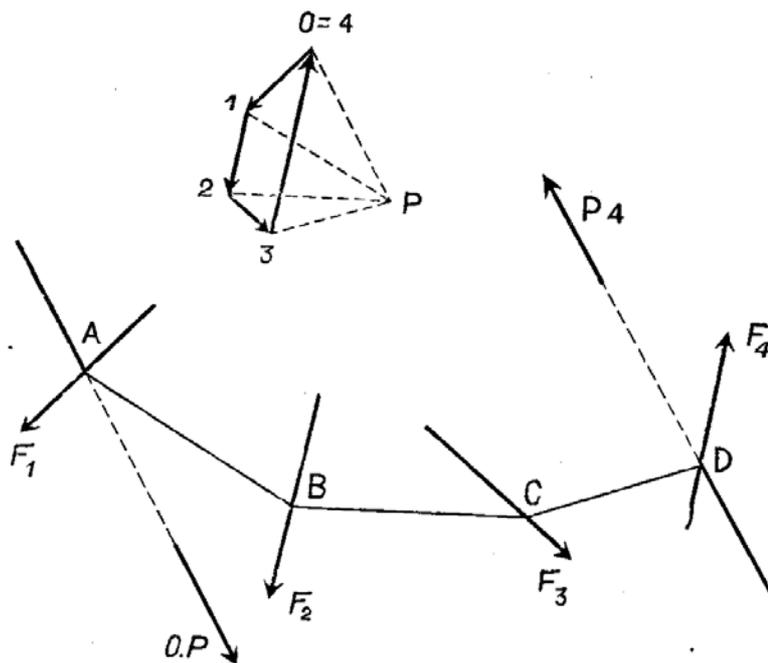


Fig. 71.

Basta, per ottenerli, assumere per polo l'origine della poligonale delle forze. Il primo raggio proiettante risulta infatti in tale ipotesi indeterminato: il secondo coincide col segmento 01 che rappresenta la prima forza: in conseguenza resta indeterminato il primo lato del poligono funicolare ed anche il punto in cui esso taglia la prima forza: ma il secondo lato non può che coincidere colla linea d'azione della forza stessa, e perciò

il secondo vertice viene necessariamente a cadere nel punto di intersezione di essa colla seconda forza. Il resto viene da sè.

E viene anche da sè che molte delle proprietà che noi abbiamo riscontrate come caratteristiche dei poligoni delle successive risultanti possono colle dovute cautele estendersi al caso più generale dei poligoni funicolari. Citiamo fra tutte la più importante: la indipendenza della posizione dei lati estremi dall'ordine in cui si sono considerate le singole forze.

Se, come caso particolare, la poligonale delle forze è chiusa, il poligono funicolare può presentare quelle medesime due alternative che abbiamo già esaminate nel caso del poligono delle successive risultanti: esso infatti deve avere i suoi lati estremi paralleli entrambi a quel raggio che dal polo proietta il punto che è ad un tempo l'origine ed il termine della poligonale delle forze (fig. 71).

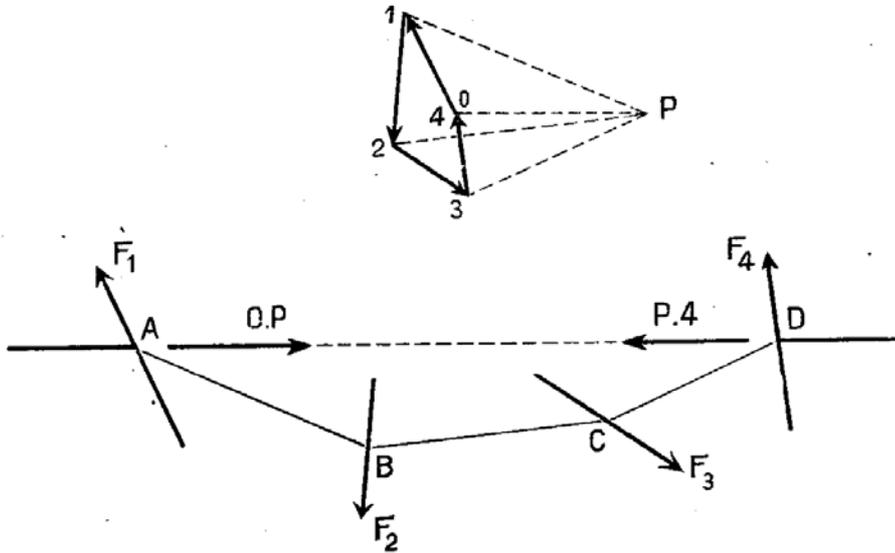


Fig. 72.

Orbene, se i detti lati estremi, pur essendo paralleli, si mantengono distinti, se cioè il poligono funicolare riesce aperto, il sistema dato di forze resta ridotto ad una coppia completamente definita dalle due tensioni estreme OP e P4.

Se invece il poligono funicolare risulta chiuso, come accade quando i due lati estremi vengono a sovrapporsi (fig. 72), le due tensioni estreme si elidono a vicenda: il dato sistema di forze è evidentemente in equilibrio.

Viceversa se un sistema di forze è in equilibrio, ridotto che sia a due forze sole, queste devono riescire eguali ed opposte:

è dunque necessario che la poligonale delle forze sia chiusa e che inoltre riesca chiuso qualunque poligono funicolare che le colleghi.

*
**

Ne segue immediatamente che quando l'equilibrio è assicurato dalla presenza di vincoli opportunamente disposti, il poligono funicolare può servire a trovare le reazioni incognite di questi vincoli.

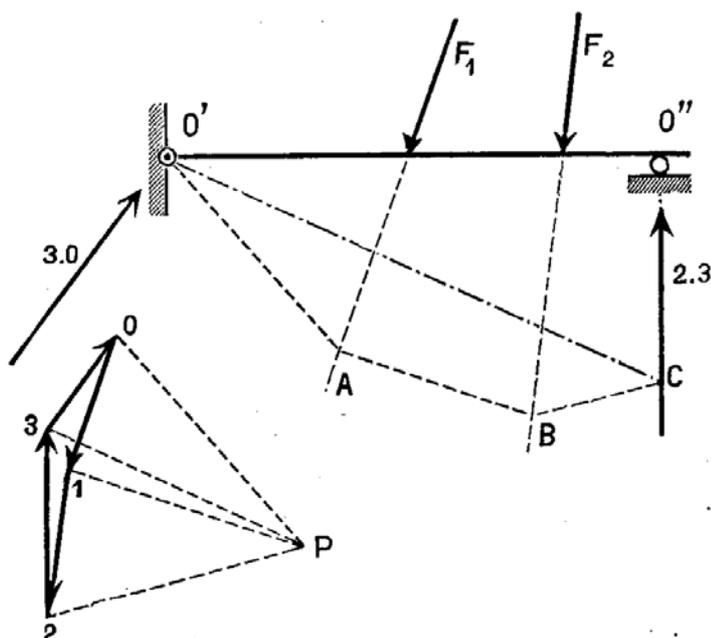


Fig. 73.

Consideriamo, tanto per fissare le idee su di un problema concreto, una trave fissa ad un estremo (cerniera) ed appoggiata all'altro su di un rullo o su di un carrello scorrevole (carrello di dilatazione).

Si può ripetere a proposito di essa quello che si è detto a suo tempo a proposito dei solidi aventi un asse fisso: la reazione relativa all'estremo fisso può essere comunque diretta: quella invece relativa all'estremo semplicemente appoggiato deve risultare diretta normalmente al piano di scorrimento.

Supponiamo per semplicità che sulla trave siano applicate due sole forze F_1 F_2 (fig. 73).

Della poligonale delle forze si possono subito segnare i segmenti 01 ed 12 equipollenti alle forze date nonchè la dire-

zione del segmento 23 che è destinato a rappresentare la reazione in O'' : resta indeterminata la posizione del punto 3 e quindi anche il segmento 30 che deve rappresentare la reazione in O' .

Tuttavia scelto ad arbitrio il polo P si può costruire una parte del poligono funicolare: precisamente si possono tracciare di esso tre lati: quelli paralleli a P0, a P1 ed a P2 rispettivamente.

Ora, se si ha l'avvertenza di approfittare della libertà di scelta del primo lato facendolo passare per O' , punto che appartiene certamente alla linea di azione incognita della rispettiva reazione, non vi è dubbio che per tal punto dovrà passare anche il lato di chiusa del poligono: ma d'altra parte questo lato di chiusa dovrà anche passare per il punto C comune al terzo lato ed alla linea di azione nota della reazione agente in O'' : esso lato di chiusa sarà dunque completamente determinato e potrà senz'altro tracciarsi.

E potrà tracciarsi quindi anche il raggio proiettante ad esso parallelo. Si verrà così a determinare in disegno il punto 3, e quindi la grandezza della reazione 23, nonché il segmento 30 e quindi le caratteristiche tutte della reazione in O' .

*
**

Chi rifletta un pochino sulla costruzione che ci ha servito a risolvere il problema testè trattato, non tarderà a riconoscere che è in essa di essenziale importanza il fatto di aver condotto per O' il primo lato $O'A$ del poligono funicolare.

Orbene manca a noi il tempo di diffonderci qui nell'esposizione dei numerosi esempi di costruzioni analoghe che nelle meccaniche applicate vengono vantaggiosamente utilizzate: ma crederemmo di lasciar una lacuna troppo grave nella presente sia pur sintetica trattazione, se non avvertissimo subito che fatti di questo genere si presentano quasi sempre nella ricerca delle reazioni che assicurano l'equilibrio di sistemi rigidi soggetti a forze date solo in parte.

Quasi sempre, nella infinita varietà dei poligoni funicolari che possono collegare un sistema di forze in equilibrio, ve ne è qualcuno che può tracciarsi anche quando non tutte queste forze sono note, ma di alcune si conosce soltanto la linea

d'azione, ovvero il punto di applicazione. E allora è precisamente a questo o a questi particolari poligoni che bisogna far ricorso perchè essi, appena costruiti, ci permettono di identificare gli elementi ancora incogniti del sistema.

Senonchè non sempre la cosa si presenta così semplice come nel caso sopra esposto: a volte le condizioni a cui il poligono funicolare deve soddisfare sono più complesse ed implicano una conveniente scelta del polo (che nel caso sopra accennato era rimasto arbitrario): e questa scelta non si può fare *a priori* perchè non se ne posseggono gli elementi indispensabili.

Bisogna allora incominciare col costruire un poligono di tentativo con un polo arbitrario, il quale in generale non soddisferà affatto alle volute condizioni, ma potrà servire alla ricerca ed alla identificazione del poligono di cui si abbisogna, se si sanno mettere in giuoco le relazioni che intercedono fra diversi poligoni funicolari colleganti un medesimo sistema di forze.

Di poligoni funicolari colleganti un medesimo sistema di forze ve ne è infatti una triplice infinità, dipendentemente da ciò che si può scegliere ad arbitrio il polo P nel piano (due indeterminazioni) e pure ad arbitrio si può assumere il primo lato parallelamente ad una data direzione (terza indeterminazione).

E tra questi ∞^3 poligoni, delle relazioni di posizione ne esistono alcune che sono conseguenza immediata delle proprietà dimostrate. È per esempio evidente che il primo e l'ultimo lato si debbono sempre incontrare sulla linea di azione della risultante, epperò debbono col loro punto di incontro descrivere questa retta al variare comunque degli elementi arbitrari da cui il poligono dipende. Ed è anche evidente che lo stesso deve accadere per i punti di incontro di due lati-qualunque, perchè essi possono sempre riguardarsi come estremi per un certo gruppo di forze, e per questo debbono individuare la linea d'azione della risultante parziale relativa a quel gruppo.

Ma a queste proprietà che sono immediata conseguenza delle proprietà meccaniche del poligono funicolare un'altra se ne può aggiungere che è, nelle applicazioni, della più alta importanza.

Consideriamo infatti i due poligoni funicolari ABC , $A'B'C'$, relativi ai poli P e P' connettenti il medesimo sistema di forze $F_1 F_2 F_3$ (fig. 74).

Tiriamo la congiungente PP' e la retta HL congiungente i due punti d'incontro delle prime due coppie di lati corrispondenti. Dalla considerazione dei due quadrangoli completi $AA'HL$ e $PP'01$ che hanno per costruzione cinque coppie di lati paralleli, si deduce che anche i due lati rimanenti HL e PP' devono essere paralleli.

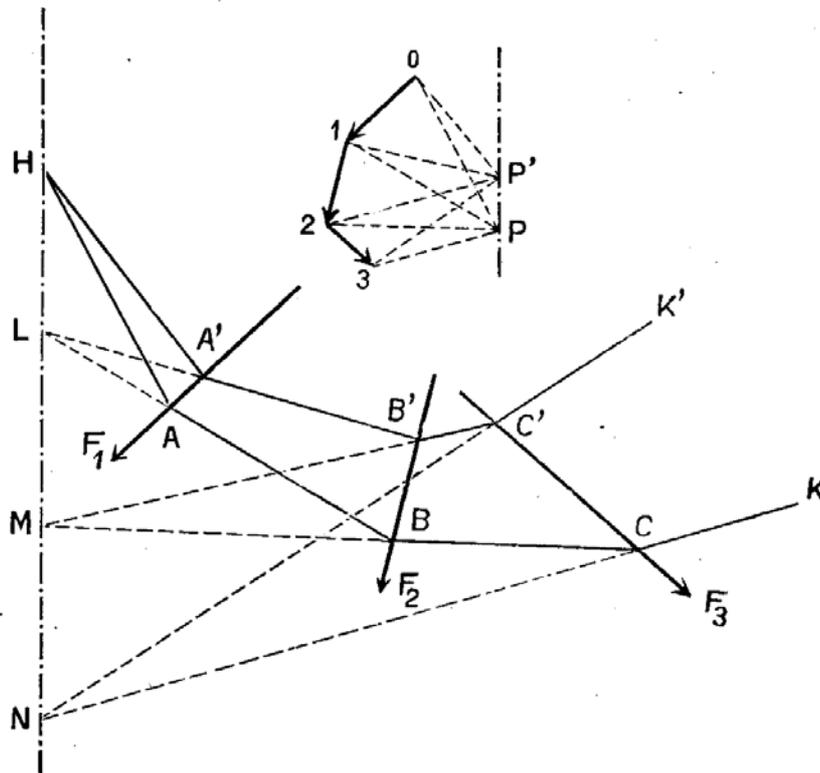


Fig. 74.

Analogamente, dalla considerazione dei due quadrangoli completi $BB'LM$ e $PP'12$ si deduce che anche LM deve essere parallelo a PP' .

Lo stesso si può ripetere per MN .

Si può pertanto concludere che i punti $HLMN$ si trovano tutti su di una unica retta parallela a PP' . In altre parole: " i lati corrispondenti di due poligoni funicolari connettenti un medesimo sistema di forze, si incontrano su di una retta parallela alla congiungente i poli di proiezione „.

Questo interessante teorema può anche essere dimostrato meccanicamente nel modo seguente:

Una qualunque delle forze che compongono il sistema dato, per esempio la F_2 (fig. 75), può essere sostituita sia dalle forze $1P$

e P_2 aventi per linee di azione due lati del poligono funicolare ABC , sia dalle forze $1P'$ e $P'2$ aventi per linee di azione i lati corrispondenti del poligono funicolare $A'B'C'$: ne segue subito che le prime due di quelle forze devono fare equilibrio alle altre due cambiate di segno.

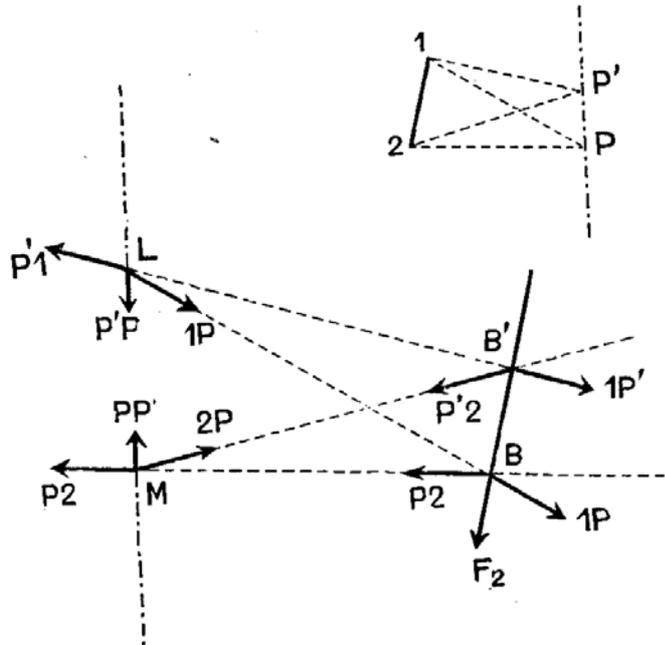


Fig. 75.

Ma la $1P$ e la $P'1$ si possono comporre in una unica forza $P'P$ applicata in L : similmente la P_2 e la $2P'$ si possono comporre in un'unica forza PP' applicata in M : queste due forze, eguali in grandezza e di segni contrarii, si faranno equilibrio a condizione che abbiano la medesima linea d'azione: a condizione cioè che la congiungente LM risulti parallela alla PP' come abbiamo sopra annunciato.

*
**

Coll'aiuto del teorema testè dimostrato si riesce facilmente a costruire il poligono funicolare di cui tre dati lati passano per tre punti fissi UVW arbitrariamente scelti nel piano del disegno.

Costruiamo infatti un primo poligono di tentativo $ABCD$ il quale soddisfi ad una delle condizioni imposte: tale, per es., che

il suo primo lato passi per U (fig. 76). Sia P il polo affatto arbitrario che ci ha servito allo scopo.

Si voglia che il terzo lato passi per V; ciò non avverrà in generale naturalmente, ma si potrà sempre ottenere procedendo nel modo seguente: prolunghiamo il terzo lato BC del poligono di tentativo fino ad incontrare in H una retta UH arbitrariamente condotta per U, retta che assumeremo come luogo dei punti di incontro dei lati omologhi del poligono di tentativo e di quello che vogliamo costruire: evidentemente il

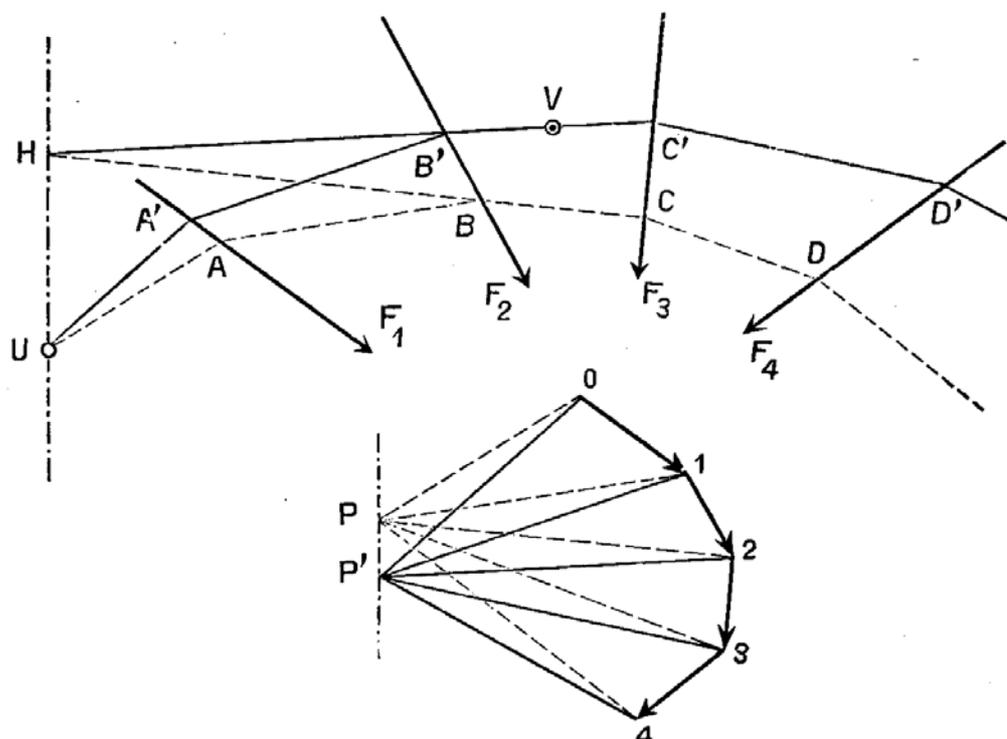


Fig. 76.

terzo lato di questo poligono dovrà passare per H: ma noi vogliamo che esso passi per V: esso è dunque completamente definito. Contemporaneamente risulta definito anche il nuovo polo P': esso infatti deve stare sulla parallela ad UH condotta per P: inoltre il raggio proiettante P'2 deve riuscir parallelo ad HV. In possesso di P' l'intero poligono A'B'C'D' potrà essere immediatamente tracciato: e si constaterà facilmente che il suo primo lato passa per U dove deve incontrare il primo lato del poligono di tentativo: esso soddisfa dunque a due delle condizioni imposte.

Volendo un poligono che, oltre a passare col suo primo lato per U e col suo terzo lato per V, soddisfi anche ad una terza condizione, per esempio a quella di passare col suo quinto lato per W (fig. 77), basterà ripetere il ragionamento testè fatto assumendo $A'B'C'D'$ come poligono di tentativo ed UV come retta luogo dei punti di incontro dei lati omologhi. In tal modo infatti si sarà certi che il nuovo poligono $A''B''C''D''$ continuerà a passare per U e per V pur andando a passare anche per W.

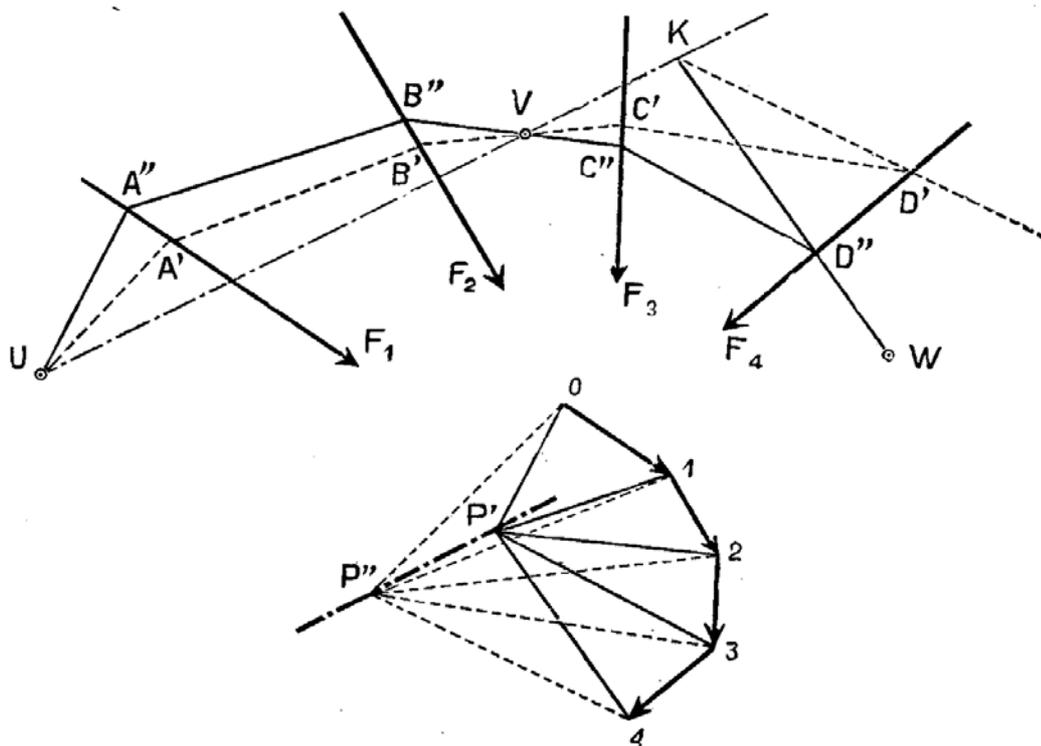


Fig. 77.

Occorre appena avvertire che questa volta non vi è più nella costruzione alcun elemento arbitrario: il poligono risolvante è dunque da considerarsi, in generale, come completamente ed univocamente definito dalle tre condizioni impostegli.

Vale la pena di dire che la costruzione di un poligono funicolare che passi per tre punti dati equivale alla soluzione di un classico problema di statica: quello dell'equilibrio di due aste articolate a cerniera senza attrito, tra loro e a due punti fissi, nel modo indicato nella figura 78.

Siano infatti F_1, F_2 le forze applicate all'asta UV: esse si possono sostituire, agli effetti dell'equilibrio dell'asta, con OP'' e $P''2$: similmente le forze F_3, F_4 applicate all'asta VW si pos-

sono sostituire con $2P''$ e $P''4$. Orbene così ridotto il sistema, la soluzione del problema diviene ovvia: $P''2$ e $2P''$ si equili-

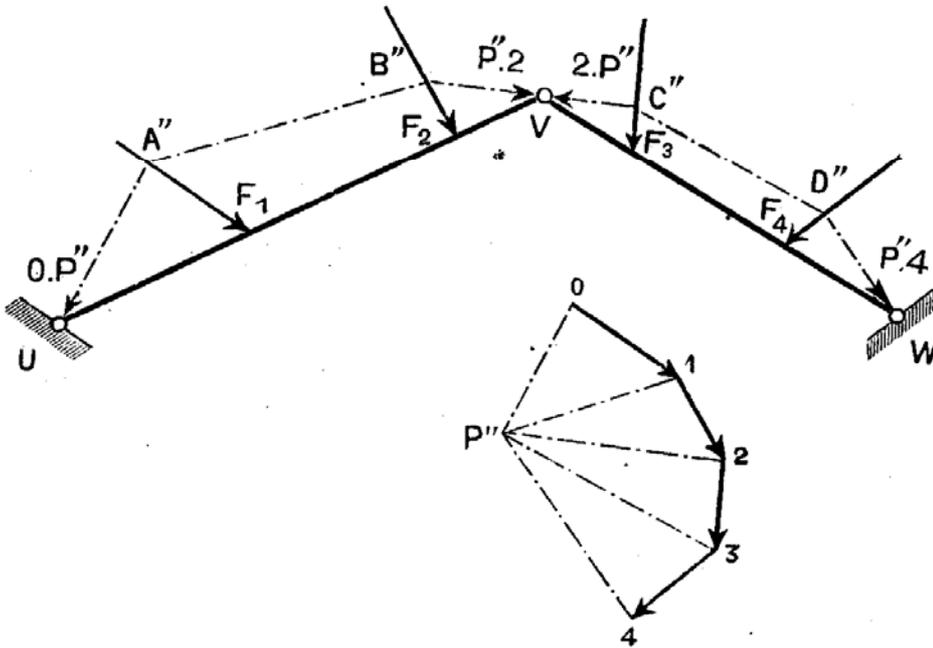


Fig. 78.

brano infatti tra loro: OP'' e $P''4$ saranno invece equilibrate dalle reazioni, ad esse eguali e contrarie, dei due punti fissi.

*
**

Due casi particolari meritano di essere accennati.

Il primo si verifica allorquando tutte le forze date sono fra loro parallele (fig. 79). La poligonale delle forze si riduce ad

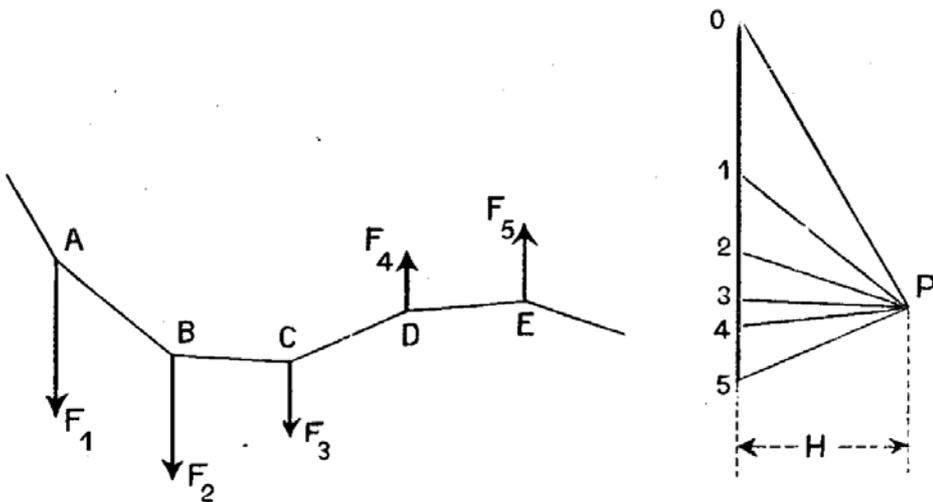


Fig. 79.

una retta: la distanza H di questa dal polo assume il nome di *distanza polare* e misura la componente, normale alla direzione delle forze, della tensione del poligono funicolare, componente che è evidentemente costante per tutti i rami del poligono stesso.

Un altro caso particolare interessante è quello in cui invece è costante il valore assoluto della tensione: occorre perciò che la poligonale delle forze sia inscritta in una circonferenza di cui il polo occupa il centro (fig. 80): le linee d'azione delle sin-

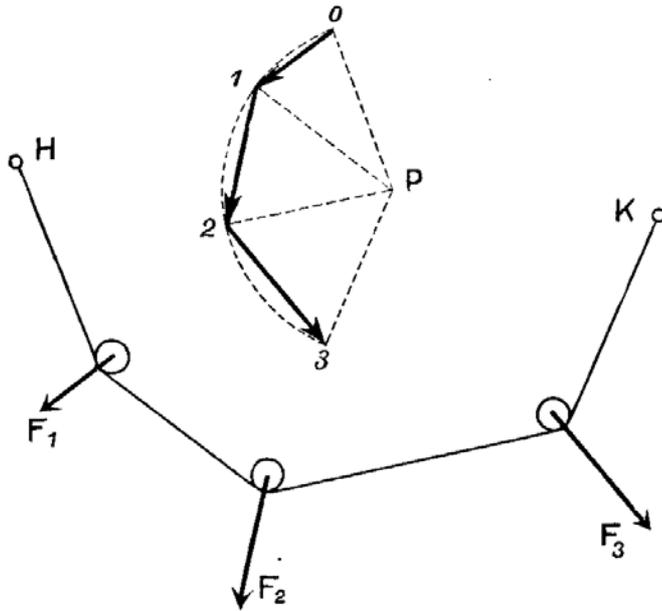


Fig. 80.

gole forze coincidono allora colle bisettrici degli angoli formati dai successivi lati del poligono funicolare. Si realizza questo caso particolare quando le forze date agiscono coll'intermediario di puleggie o di anelli in cui il filo di collegamento possa scorrere liberamente senza incontrare resistenze. Di questa proprietà dei fili di trasmettere inalterata in grandezza la loro tensione da un capo all'

altro, comunque se ne muti la direzione mediante puleggie di rinvio, noi ci siamo più d'una volta tacitamente serviti nel corso di queste lezioni: questo breve accenno è sufficiente per precisare a quali condizioni la trasmissione si verifica.

Applicazione allo studio dell'equilibrio della bilancia di Weber.

Ecco un esempio di applicazione delle cose dette, che è estremamente istruttivo, anche perchè facilmente riproducibile coi mezzi più ordinarii.

Un filo è appeso a due punti fissi A e B .- In corrispondenza di due suoi punti C e D sono sospesi due pesi Q_1 e Q_2 a fronte dei quali è trascurabile il peso del filo.

Supponiamo conosciuto il poligono funicolare ACDB (fig. 81) secondo cui il filo si dispone in condizione di equilibrio. Si può immediatamente dedurne il rapporto dei pesi.

Basta da un punto qualunque P condurre tre rette parallele ai tre lati del poligono funicolare: se 0, 1, 2 sono i punti in cui esse rette incontrano una verticale qualunque, i segmenti 01, 12 possono venire assunti come rappresentativi, in una certa

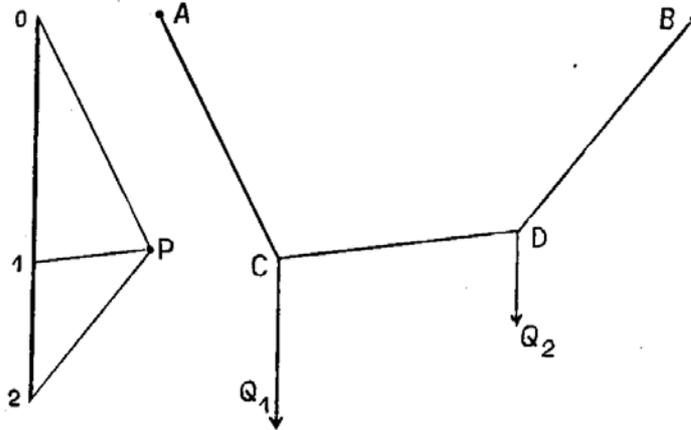


Fig. 81.

scala, dei pesi Q_1, Q_2 . Nella medesima scala P_0, P_1, P_2 rappresenteranno le tre tensioni nei tre rami del filo.

Limitiamoci per semplicità al caso in cui A e B essendo allo stesso livello, tutto è simmetrico rispetto alla verticale che passa per il punto di mezzo di AB: ciò che implica naturalmente che sia $AC = BD$ e $Q_1 = Q_2$. Denotiamo, come in fig. 82, con l la lunghezza di ciascuno dei due rami laterali di filo; con d quella del ramo intermedio: ed indichiamo con Q la grandezza di ciascuno dei pesi.

Detto α l'angolo che ciascuno dei rami laterali fa colla verticale, ed ε la variazione (piccolissima) che esso subisce allorché all'uno dei pesi si attribuisce un incremento (piccolissimo) q ed all'altro un decremento eguale, noi ci proponiamo di stabilire la relazione che lega q ad ε .

A tal fine incominciamo coll'osservare che, qualunque sia q , sussiste la relazione

$$(Q + q)r' = (Q - q)s'$$

r' ed s' essendo le lunghezze dei segmenti intercetti dai lati estremi del poligono funicolare sulle verticali dei pesi.

Basta per dimostrarlo assumere il segmento $C'D'$ come rappresentativo, in una conveniente scala, della tensione nel ramo intermedio del filo, ed osservare che per l'equilibrio i pesi $Q + q$ e $Q - q$ devono, nella medesima scala, trovarsi rappresentati rispettivamente dai segmenti s' ed r' .

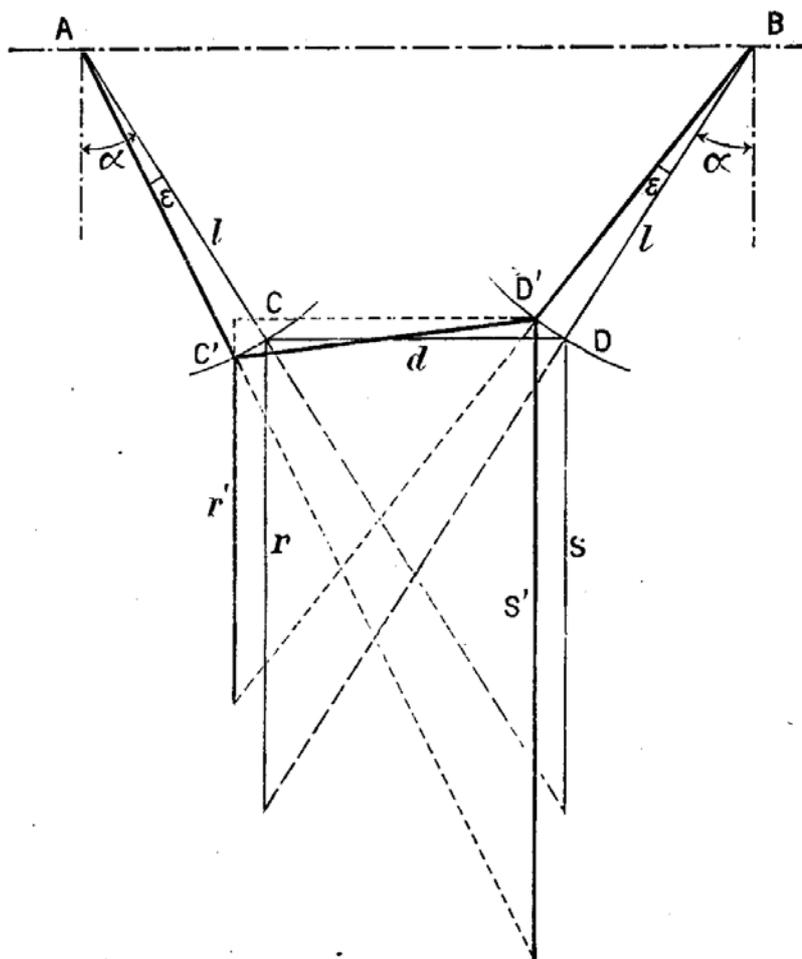


Fig. 82.

Osserviamo in secondo luogo che, per la supposta piccolezza di q per rapporto a Q , o, ciò che fa poi lo stesso, di ϵ per rapporto ad α , si può scrivere

$$\frac{q}{Q} = \frac{Q - (Q - q)}{Q} = \frac{r - r'}{r}$$

con

$$r = \frac{d}{\operatorname{tg} \alpha}$$

ed

$$r' = \frac{d}{\operatorname{tg}(a + \varepsilon)} - 2\varepsilon l \operatorname{sen} a$$

Posto

$$\operatorname{tg}(a + \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg} a}{1 - \frac{\varepsilon}{\operatorname{sen} a \cos a}}$$

epperò

$$r' = \frac{d}{\operatorname{tg} a} - \varepsilon \left(\frac{d}{\operatorname{sen}^2 a} - 2l \operatorname{sen} a \right)$$

si ha

$$\frac{q}{Q} = \varepsilon \left(\frac{d}{\operatorname{sen}^2 a} - 2l \operatorname{sen} a \right) \frac{\operatorname{tg} a}{d} = \varepsilon \frac{1 + \frac{2l}{d} \operatorname{sen}^3 a}{\operatorname{sen} a \cos a}$$

Inversamente

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sen} a \cos a}{1 + \frac{2l}{d} \operatorname{sen}^3 a} \frac{q}{Q}$$

donde la grandezza dello spostamento orizzontale di C o di D o di uno qualunque dei punti del tratto intermedio di filo:

$$\varepsilon l \cos a = l \frac{\operatorname{sen} a \cos^3 a}{1 + \frac{2l}{d} \operatorname{sen}^3 a} \frac{q}{Q}$$

Si può dimostrare che, a parità di lunghezza totale $2l + d$ del filo, si ottiene il massimo di sensibilità della bilancia, vale a dire il massimo valore dello spostamento orizzontale per un valore dato del rapporto $q : Q$, quando ⁽¹⁾

$$\frac{d}{2l} = 0,256 \quad a = 23^\circ 47'$$

Lo spostamento orizzontale è allora eguale a

$$0,1070 (2l + d) \frac{q}{Q}.$$

(1) Cfr. H. BOUASSE, *Statique*, pag. 356 (Paris, Delagrave, 1920).

Nel dispositivo ideato da Weber, lo spostamento orizzontale si valuta leggendo, sopra una scala posta a conveniente distanza.

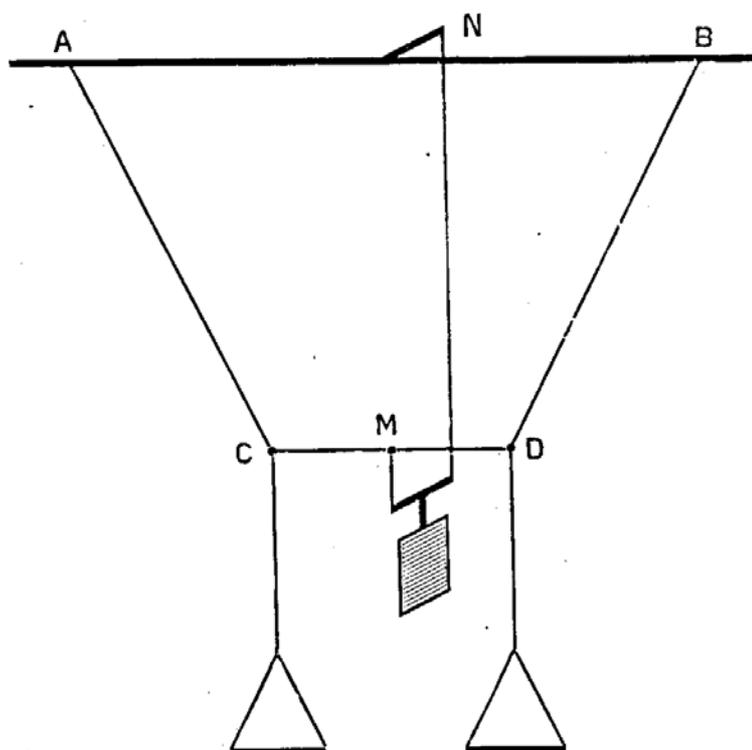


Fig. 83.

la deviazione di un raggio luminoso riflesso da uno specchietto leggerissimo appeso da una parte al punto di mezzo M del filo, dall'altra ad un punto fisso N (fig. 83).

Si può così, con tutta facilità, raggiungere una grande sensibilità di misura.

Applicazione al problema del trasporto di un carico concentrato.

Nei due punti fissi A e B (fig. 84) sono disposti due anelli nei quali un filo può scorrere liberamente senza incontrare resistenza di attrito. I due estremi del filo sono riuniti assieme in C con un nodo cui viene applicato un peso Q a fronte del quale è trascurabile il peso del filo.

Per la supposta inestensibilità del filo, la somma delle lunghezze $a = AC$ e $b = BC$ deve mantenersi costante. Il nodo C

deve dunque descrivere un'ellisse che in A ed in B ha i suoi due fuochi.

È evidente che, se nessuna altra forza agisse sul filo, questo scorrerebbe negli anelli fino a che il nodo C giungesse ad occupare, tra tutte le posizioni possibili, la più bassa C_0 : in corrispondenza di essa la tangente all'ellisse è naturalmente orizzontale.

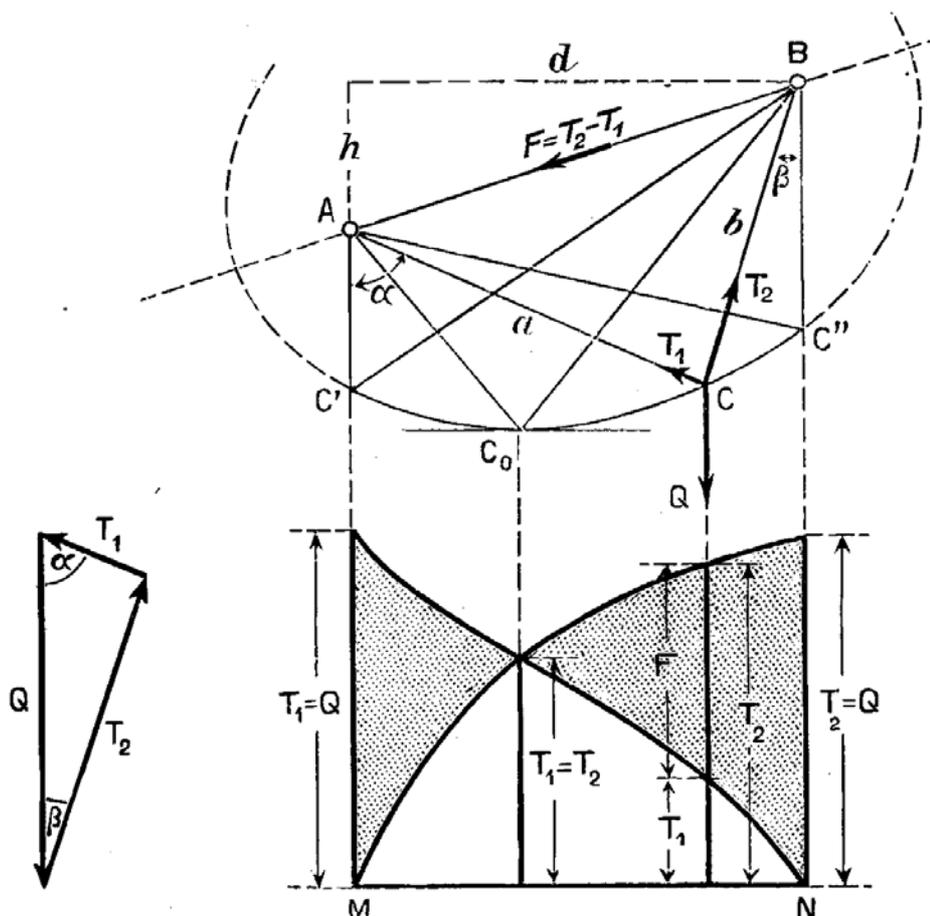


Fig. 84.

Dal punto di vista analitico, indicata con d la distanza orizzontale tra i due punti fissi A e B, e con h il loro dislivello, e detti α e β gli angoli che, per una posizione generica di C, le rette AC e BC fanno colla verticale, si potranno scrivere le due relazioni geometriche

$$b \cos \beta - a \cos \alpha = h$$

$$b \sin \beta + a \sin \alpha = d$$

nelle quali, oltre a d e ad h , è da considerarsi data anche la

somma $a + b$: queste relazioni determinano quindi, per ogni valore di a , un ben determinato corrispondente valore di β .

La condizione $a = \beta$ caratterizza il punto C_0 .

In questa particolare posizione le due tensioni che si sviluppano nei due rami del filo che sorreggono il peso Q riescono quindi eguali fra loro: come deve d'altronde essere perchè il filo non abbia tendenza a scorrere negli anelli nè in un senso nè nell'altro.

In ogni altra posizione del nodo C l'equilibrio riesce possibile solo in quanto si provveda a compensare in qualche modo la differenza inevitabile delle tensioni, per esempio applicando una forza F eguale a tale differenza in corrispondenza di un punto qualunque del ramo AB del filo.

Ma le tensioni, che denoteremo qui con T_1 e con T_2 , debbono per l'equilibrio del nodo C soddisfare alle due equazioni fondamentali della statica

$$T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = Q$$

$$T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = 0.$$

Da esse, per ogni coppia di valori corrispondenti di α e di β , si possono subito ricavare i valori di T_1 e di T_2 .

Noi però non tenteremo neppure di condurre a termine la risoluzione del problema per questa via: è questo infatti uno degli esempi tipici di problemi apparentemente semplici, in pratica complicatissimi.

Noi ricorreremo piuttosto ai metodi grafici, i quali con ben maggiore facilità e prontezza ci forniranno gli elementi occorrenti per farci un'idea chiara delle leggi che governano il fenomeno.

Basta costruire, per un certo numero di posizioni di C , il triangolo delle forze Q , T_1 , T_2 . Le singole coppie di valori delle tensioni così calcolate sono state, nella nostra fig. 84, riportate sulle corrispondenti verticali di Q , a partire da una medesima orizzontale di riferimento MN limitatamente al campo compreso tra le verticali di A e di B , campo ove le tensioni si mantengono entrambe positive, ed ove soltanto l'esperienza è perciò effettivamente realizzabile con un filo materiale dotato delle proprietà di flessibilità che noi gli abbiamo attribuite.

Si sono così ottenute due curve: l'area fra esse racchiusa (punteggiata in figura) rappresenta colle sue ordinate verticali

la legge di variazione della forza F : la quale, come avevamo previsto, si annulla in corrispondenza della verticale passante per C_0 .

L'andamento delle due curve può mutare notevolmente al mutare degli elementi caratteristici che le determinano

$$d \quad h \quad \text{ed} \quad a + b$$

Ripetendo la costruzione per valori differenti ed opportunamente scelti di essi, il lettore troverà certo argomento di istruttive riflessioni e di interessanti rilievi.

*
**

Quando le forze applicate ad un filo, anzichè essere concentrate in corrispondenza di determinati punti di esso, sono lungo di esso distribuite con continuità, la configurazione di equilibrio del filo è una curva continua che prende il nome di *curva funicolare*.

Tutto ciò che noi siamo venuti dicendo dei singoli lati dei poligoni funicolari si applica, al limite, agli elementi della curva, ciascuno dei quali deve essere in equilibrio sotto l'azione della forza esterna ad esso applicata, e delle due tensioni su di esso esercitate dagli elementi attigui: queste tensioni, per analogia a quanto abbiamo visto verificarsi nel caso delle sollecitazioni discrete, si dovranno ritenere dirette secondo i tratti di filo che stanno immediatamente da una parte e dall'altra dell'elemento considerato, vale a dire secondo le tangenti negli estremi dell'elemento. In relazione alla supposta flessibilità del filo esse dovranno sempre essere dirette verso l'esterno dell'elemento su cui si esercitano.

Detta pertanto T la grandezza della tensione in un punto generico M della curva funicolare, essa potrà sempre considerarsi come una funzione della posizione di M o, se lo si preferisce, della lunghezza s dell'arco di curva che va da una origine arbitraria A al punto M . Le componenti di questa tensione, supposta agente dell'elemento MM' (fig. 85) e riferita a tre assi cartesiani ortogonali x, y, z , saranno del tipo

$$-T \frac{dx}{ds} \quad -T \frac{dy}{ds} \quad -T \frac{dz}{ds}$$

dove i coseni direttori della tangente $\frac{dx}{ds}$ $\frac{dy}{ds}$ $\frac{dz}{ds}$ sono essi pure delle funzioni di s , e di s soltanto.

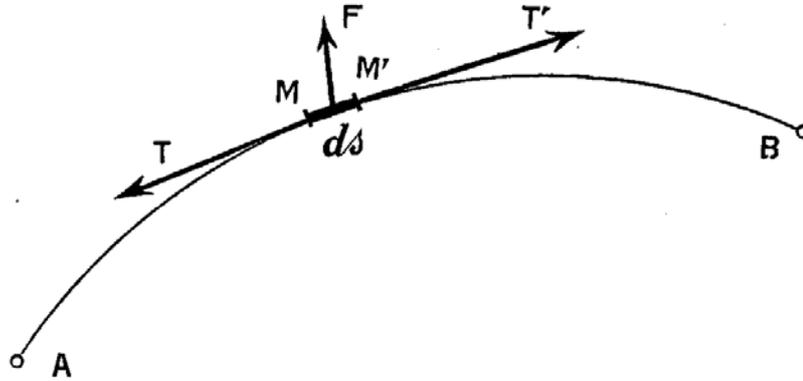


Fig. 85.

Ne segue che in un punto immediatamente successivo M' nel quale la variabile indipendente assuma il valore $s + ds$ le componenti della tensione T' , agente all'altra estremità dello elemento, potranno scriversi sotto la forma

$$T \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) ds$$

$$T \frac{dy}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) ds$$

$$T \frac{dz}{ds} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) ds$$

Dette pertanto

$$X ds \quad Y ds \quad Z ds$$

le componenti, per rapporto agli stessi assi, della forza esterna $F ds$ applicata all'elemento MM' (forza che si suppone dell'ordine di grandezza dell'elemento) le equazioni dell'equilibrio sono

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0$$

Queste equazioni insieme alla

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

che lega la prescelta variabile s alle coordinate, ed alle condizioni ai limiti esprimenti le condizioni di posa degli estremi A e B del filo, bastano, in generale, a definire x , y , z e T in funzione di s epperò determinano la forma della curva e la tensione in ciascun punto di essa.

*
**

Limitiamoci al caso in cui le forze applicate sono esclusivamente rappresentate dal peso del filo che si suppone cilindrico ed omogeneo.

Il problema si riduce subito nel piano verticale passante pei due punti d'attacco A e B: assunti in tale piano i due assi coordinati x ed y , orizzontale l'uno, l'altro verticale e diretto verso l'alto, e detto p il peso (costante) dell'unità di lunghezza del filo, e quindi $-pds$ la forza verticale che sollecita l'elemento generico ds , le equazioni dell'equilibrio divengono

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) &= 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) - p &= 0 \end{aligned}$$

Dalla prima si ha subito, integrando,

$$T \frac{dx}{ds} = H$$

ove H è una costante che rappresenta il valore della tensione T per $dx = ds$ cioè in corrispondenza del punto più basso della curva.

Eliminando poi T dalla seconda equazione, essa diviene

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{p}{H}$$

In essa $\frac{dy}{dx}$ rappresenta naturalmente il rapporto fra gli incrementi delle coordinate lungo la curva funicolare, corrispon-

denti ad un incremento ds dell'arco. Trattando l'ascissa x come variabile indipendente e l'ordinata y come sua funzione, si può dare a questa relazione la forma di una equazione differenziale fra le sole coordinate x, y dei punti della funicolare (1).

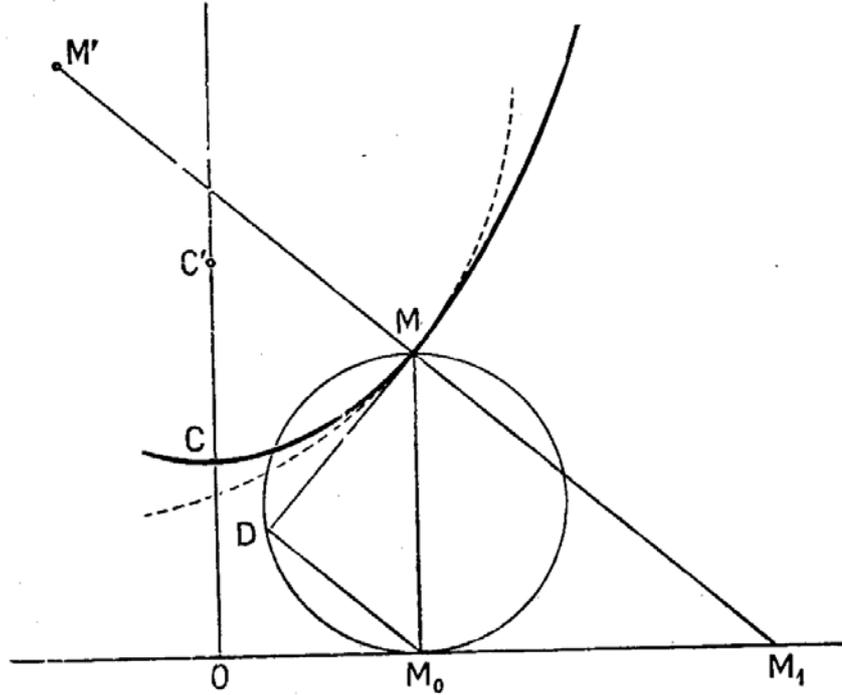


Fig. 86.

Con una scelta opportuna degli assi, l'integrale generale si può scrivere sotto la forma

$$y = \frac{H}{2p} \left[e^{+\frac{px}{H}} + e^{-\frac{px}{H}} \right]$$

La curva che essa rappresenta prende il nome di *catenaria omogenea*, e gode di alcune proprietà caratteristiche che ci limitiamo ad elencare rapidamente, riferendoci alla fig. 86 che ne rappresenta l'andamento.

Per $x = 0$ è $\frac{dy}{dx} = 0$. Il punto più basso C della curva coincide dunque colla sua intersezione coll'asse y : la sua ordinata $OC = \frac{H}{p}$ prende il nome di *parametro* della curva.

(1) Cfr. LEVI-CIVITA ed AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. I, cap. XIV (Bologna, Zanichelli, 1923).

La tensione in un punto generico M è

$$T = p \cdot y$$

è cioè eguale al peso di un tratto di filo di lunghezza pari all'ordinata MM_0 del punto.

Se, assunta questa ordinata come diametro, si costruisce un cerchio, e dal piede M_0 di essa si conduce la corda M_0D di lunghezza eguale ad OC , la congiungente DM ci dà la tangente alla curva e quindi la direzione della tensione.

Il segmento DM misura la lunghezza dell'arco CM .

Tracciata la normale in M fino ad incontrare in M_1 l'asse delle x , si ottiene il centro di curvatura M' prendendo il simmetrico di M_1 per rapporto ad M .

*
**

Un caso particolare molto interessante per la pratica è quello in cui il filo è teso fortemente agli estremi sicchè la tensione riesce molto grande rispetto al peso. Per precisare ammetteremo che il rapporto $\frac{px}{H}$ si mantenga ovunque tanto piccolo che la sua quarta potenza riesca trascurabile a fronte dell'unità.

Si potrà allora scrivere

$$e^{+\frac{px}{H}} = 1 + \frac{px}{H} + \frac{1}{2} \left(\frac{px}{H}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{px}{H}\right)^3$$

$$e^{-\frac{px}{H}} = 1 - \frac{px}{H} + \frac{1}{2} \left(\frac{px}{H}\right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{px}{H}\right)^3$$

L'equazione della catenaria si riduce immediatamente alla forma

$$y = \frac{H}{p} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{px}{H}\right)^2 \right]$$

che rappresenta una parabola ad asse verticale.

Se con una traslazione verticale degli assi coordinati si porta l'origine a coincidere col vertice della curva, l'equazione assume la forma canonica

$$y = \frac{p}{2H} x^2.$$

A questo risultato si sarebbe giunti direttamente integrando le equazioni generali dell'equilibrio nella ipotesi che il peso invece di essere distribuito uniformemente su tutta la lunghezza del filo fosse uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale: ipotesi che è naturalmente tanto più prossima alla realtà delle cose quanto più piccola si mantiene, nel tratto che si considera, l'inclinazione sull'orizzontale della tangente alla catenaria.

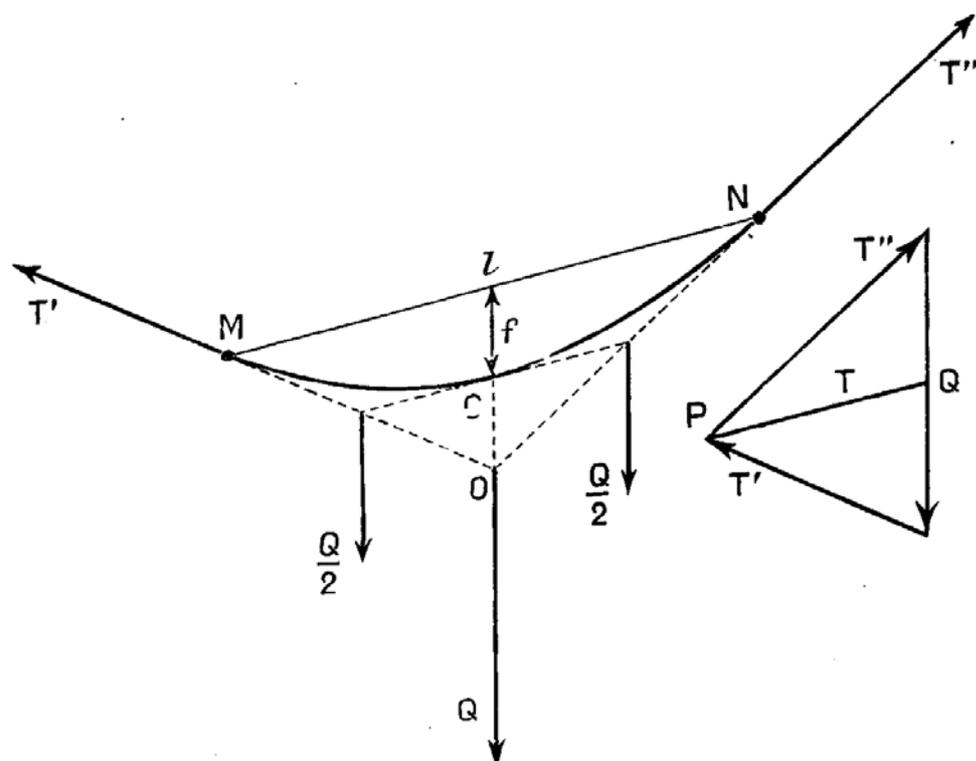


Fig. 87.

La sostituzione della parabola alla catenaria, quando è approssimata a sufficienza per gli scopi cui tendono le nostre ricerche, presenta cospicui vantaggi, non solo per le semplificazioni che introduce nelle formole, ma anche e soprattutto per i metodi grafici semplici e spediti cui apre la via.

Ripensiamo infatti al problema nei suoi termini più generali, e consideriamo un tratto di curva funicolare, compreso fra due suoi punti qualunque M ed N (fig. 87), sotto l'azione delle due tensioni estreme T' e T'' e dei pesi dei singoli elementi di filo.

La risultante Q di tutti questi pesi elementari deve, per l'equilibrio del tronco di filo, considerato nel suo insieme e supposto idealmente irrigidito, esser eguale e contraria alla risultante delle tensioni T' e T'' .

Ma se si suppone nel calcolo dei pesi identificato l'arco di curva funicolare colla sua proiezione orizzontale, questa risultante dei pesi cessa di esser funzione della curva incognita: diviene una forza nota, la quale ha per linea d'azione la verticale che passa per il punto di mezzo del segmento MN.

Data quindi la tangente alla curva funicolare in M (linea di azione della tensione T') basterà prolungarla fino ad incontrare la predetta verticale, e congiungere il punto O così ottenuto con N per ottenere la linea d'azione di T'' (tangente alla curva in N).

Un semplice triangolo ci darà le grandezze delle due tensioni.

Che se poi invece di prendere in considerazione senz'altro il peso totale Q dell'intero tronco di filo MN, si considerano separatamente i due tronchi MC e CN situati dall'una parte e dall'altra della linea d'azione di Q , e l'insieme dei pesi elementari si immagina rappresentato dalle due risultanti parziali, eguali a $Q/2$ ed agenti rispettivamente secondo la verticale equidistante da M e da C e secondo quella equidistante da C e da N — ciò che dal punto di vista dell'equilibrio del sistema irrigidito è perfettamente equivalente — si arriva subito a dimostrare:

1) che il punto C in cui la curva funicolare incontra la verticale di Q coincide col punto di mezzo del segmento sulla verticale stessa intercetto tra la corda MN e le tangenti MO ed NO;

2) che la tangente alla curva in tale punto è parallela alla corda MN, e si ottiene perciò congiungendo fra loro i punti di mezzo di MO e di NO;

3) che la tensione T nel punto C è rappresentata — nella scala prescelta per le forze — dal raggio proiettante condotto per il polo P del triangolo delle forze parallelamente alla predetta tangente;

4) che tra questa tensione e la freccia f — distanza di C dalla corda MN *misurata verticalmente* — sussiste la relazione geometrica

$$\frac{T}{Q} = \frac{l}{8f}$$

la quale permette di calcolare la tensione quando è data la freccia e viceversa.

Più generalmente, se si considera il tronco di filo MN ideal-

mente suddiviso in due tronchi qualunque MD e DN dalla verticale condotta per un punto generico D_0 della corda MN (fig. 88), e si immagina quindi l'insieme dei pesi elementari rappresentato, agli effetti dell'equilibrio del complesso, dalle due

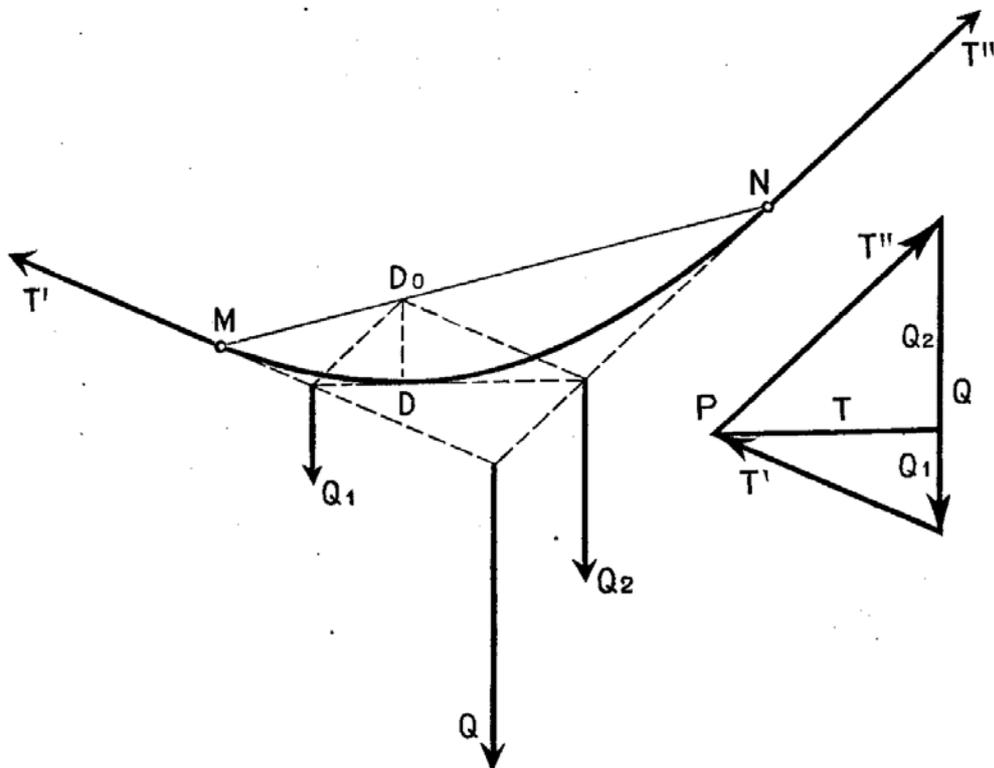


Fig. 88.

risultanti parziali Q_1 e Q_2 passanti nei punti di mezzo delle corde MD e DN (o, ciò che fa lo stesso, dei segmenti MD_0 e D_0N), si riesce a dimostrare:

1) che, condotte per D_0 le parallele a T' ed a T'' fino ad incontrare T'' e T' rispettivamente, la congiungente dei due punti così ottenuti taglia la verticale per D_0 proprio nel punto D della curva funicolare;

2) che questa congiungente è ivi tangente alla curva;

3) che la parallela ad essa condotta per il polo P del triangolo delle forze misura — nella scala delle forze — la relativa tensione.

Applicazione al calcolo delle funi portanti dei trasporti funicolari (teleferiche).

La fune è di solito ancorata ad una estremità, si appoggia un numero più o meno grande di sostegni intermedi, ed è tesa all'altra estremità da un contrappeso.

Oltre al suo proprio peso, la fune deve sorreggere i carrelli che su di essa scorrono, comandati da un'altra fune (assai più sottile e leggera della prima) cui un apposito motore imprime un movimento continuo, ed a cui i carrelli si agganciano, e da cui si liberano agli estremi della loro corsa mediante manovre opportunamente disposte.

Data la portata l (distanza *orizzontale* tra gli appoggi) ed il dislivello h di ciascuna campata, si hanno di solito delle buone ragioni per fissare entro dati limiti il valore f della freccia (massima ordinata della funicolare, misurata *verticalmente* a partire dalla corda) in una almeno delle campate, e per una ben determinata condizione di carico. E ciò, sia in dipendenza del profilo del sottostante terreno, cui la funicolare non deve mai oltre un certo limite accostarsi, sia in dipendenza di esigenze di esercizio che la pratica di consimili altri impianti avrà segnalate.

Consideriamo dunque una campata AB della fune portante ed una sua generica condizione di carico. Siano, per es., Q_2 e Q_4 i pesi dei carrelli che su di essa si trovano, e Q_1, Q_3, Q_5 le risultanti dei pesi proprii dei varii tronchi di fune delimitati dai carrelli stessi e dagli appoggi attigui.

Il problema consiste allora nel determinare la tensione della fune: e si risolve nel modo seguente.

Tracciata la retta delle forze 012345 e scelto ad arbitrio un polo P_0 , si costruirà un poligono funicolare di tentativo (fig. 89), il quale verrà a definire una possibile configurazione di equilibrio della fune supposta appesa nei due punti A_0 e B_0 in cui i due lati estremi incontrano le verticali degli appoggi.

Volendo essere precisi, diremo che il poligono è circoscritto alla curva funicolare, e che si passa dall'uno all'altra inserendo,

in corrispondenza dei singoli tronchi compresi fra le verticali

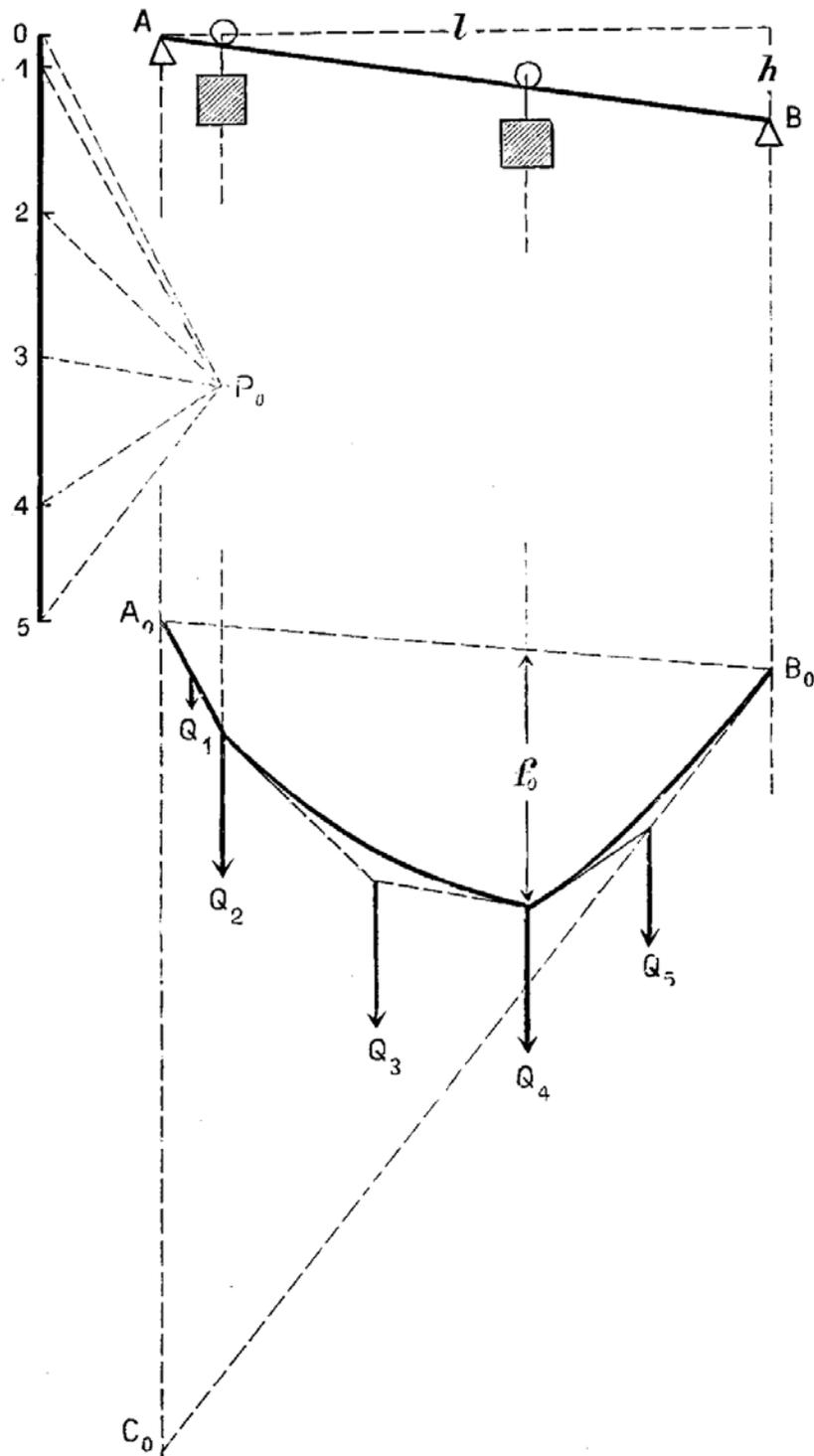


Fig. 89.

dei carrelli, gli archi di parabola che hanno i successivi lati del poligono per tangenti estreme.

Per rapporto alla retta $A_0 B_0$ congiungente dei provvisori punti di attacco, si potrà subito rilevare la posizione dell'ordinata massima, o freccia f_0 della funicolare: la sua grandezza va naturalmente letta nella scala stessa del disegno, nella scala cioè in cui è stata in disegno rappresentata la portata l .

Va da sè che quando, come nella nostra figura, quest'ordinata massima si presenta in corrispondenza della verticale di uno dei carrelli, il tracciamento effettivo degli archi di parabola si può praticamente risparmiare.

Comunque stiano le cose, la freccia così ottenuta non coinciderà però, in generale, col valore che alla freccia si vuole in pratica attribuire.

Si potrà tuttavia egualmente considerare l'ordinata f_0 come rappresentativa della freccia f desiderata, purchè si intenda adottata nel disegno una scala delle ordinate diversa da quella delle ascisse.

Naturalmente bisognerà allora — perchè il grafico acquisti un valore effettivamente rappresentativo — che tutte indistintamente le quote verticali, e quindi anche il dislivello h tra gli appoggi, siano lette nella nuova scala.

Perciò se si indica con n il rapporto tra l'ordinata f_0 del poligono di tentativo (letta nel modo prima indicato) e la freccia f che si vuole effettivamente attribuire alla fune, bisognerà disporre il poligono funicolare in modo che il dislivello tra i suoi due estremi divenga eguale ad $n \cdot h$.

Poniamo, tanto per fissar le idee, $n = 4$.

Assunta la nuova ubicazione dell'estremo destro in B_1 (fig. 90) per modo che il dislivello per rapporto all'estremo sinistro rimasto fisso in B_0 divenga $h_1 = 4h$, il tracciamento del nuovo poligono si fa valendosi di costruzioni a noi ben note.

Noi intendiamo infatti conservare, per ora, immutata la distanza polare: il nuovo polo P_1 dovrà pertanto cercarsi sulla verticale passante per P_0 .

Converrà dunque assumere la verticale per A_0 come luogo dei punti di incontro dei lati omologhi dei due poligoni. Noto il punto C_0 in cui questa verticale è intersecata dall'ultimo lato (a destra) del poligono di tentativo, si potrà senza difficoltà individuare in $C_0 B_1$ l'ultimo lato (a destra) del poligono

nuovo: poi, conducendo la parallela a tale ultimo lato dalla

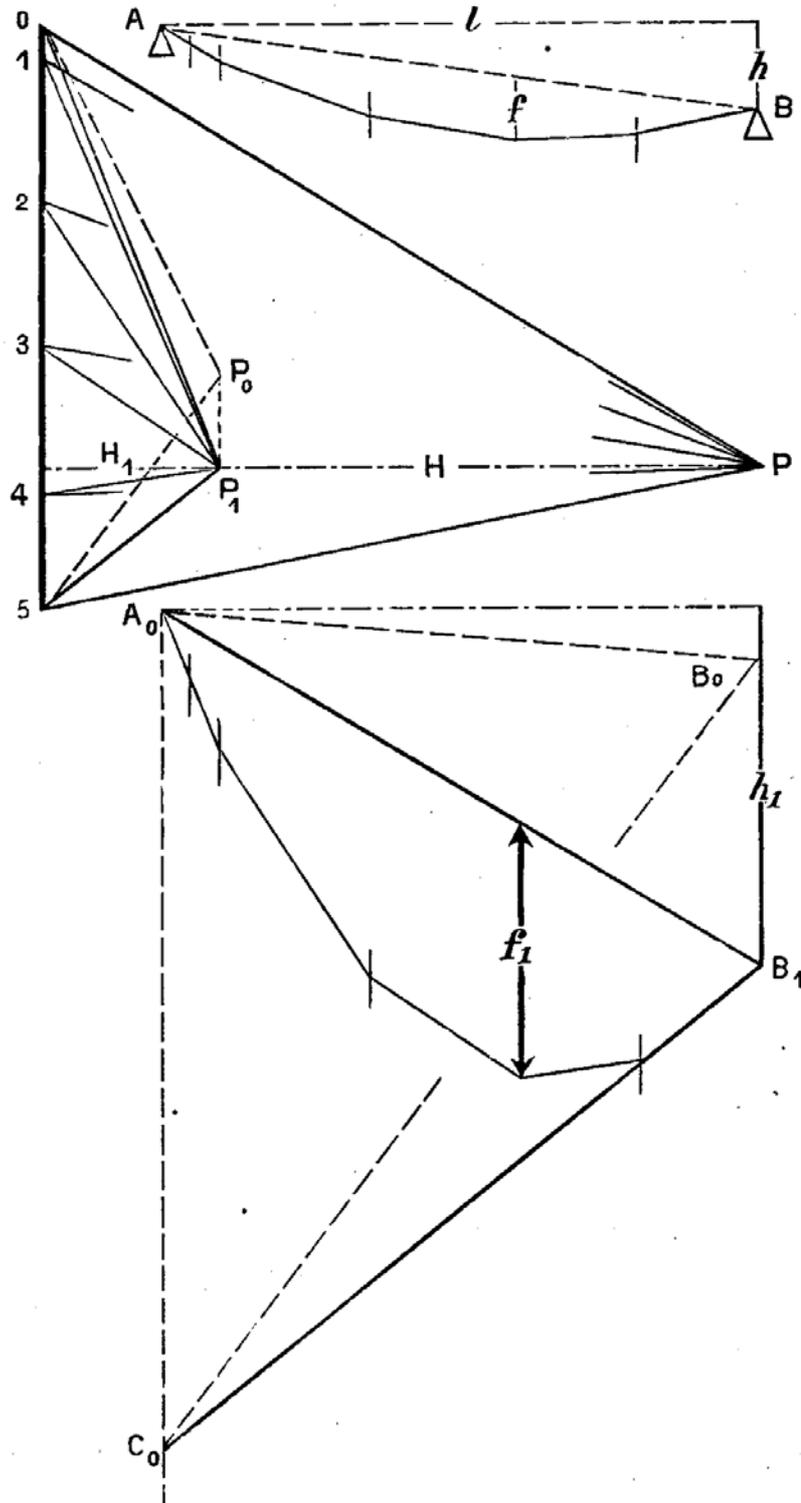


Fig. 90.

estremità inferiore della retta delle forze, si verrà ad individuare il polo P_1 .

In figura il nuovo poligono è stato disegnato per intero con tratto continuo: ma è ben evidente che, a tutto rigore, il suo tracciamento non è affatto necessario, perchè le sue ordinate, ed in particolare la freccia f_1 , non differiscono dalle corrispondenti ordinate, ed in particolare dalla freccia f_0 del poligono di tentativo.

Convieni piuttosto valersi della conoscenza del polo P_1 per risalire direttamente alla rappresentazione della funicolare nella primitiva scala del disegno. La quale funicolare dovrà ovviamente corrispondere ad un nuovo polo P situato sulla orizzontale condotta per P_1 per modo che la nuova distanza polare H risulti eguale ad n volte H_1 .

La cosa non è tanto interessante per la possibilità che ci si offre di tracciare nelle sue vere proporzioni la funicolare risolvante, così come noi abbiamo fatto nella parte superiore della fig. 90: essa funicolare riesce infatti nei casi pratici così schiacciata da far apprezzare, per la maggiore esattezza di disegno e di lettura che consentono, le alterazioni di scala di cui ci siamo precedentemente serviti.

La cosa è invece molto interessante da un altro punto di vista: è infatti evidente che, solo sulla figura tracciata adottando un'unica scala tanto per le dimensioni verticali quanto per quelle orizzontali, si potranno leggere le grandezze raffigurate da segmenti diversamente inclinati.

Ciò vale in particolare per i raggi proiettanti i varii punti della retta delle forze: raggi che solo ora, nelle loro posizioni e dimensioni definitive P_0, P_1, \dots, P_5 , vengono a rappresentare effettivamente, nella scala delle forze, le tensioni relative ai varii punti della fune.

Così il problema può dirsi completamente risolto.

Non sempre però esso si presenta proprio così come noi abbiamo da principio supposto, cioè con una preliminare determinazione della freccia e la conseguente ricerca delle tensioni.

Accade a volte che, nello studio di una data campata, sia invece da considerarsi come data la tensione in corrispondenza di uno degli appoggi: e ciò, sia perchè il suo valore è ivi effettivamente determinato dalla presenza di un contrappeso noto, sia perchè esso è a noi imposto dalle risultanze di precedenti calcoli relativi ad una campata attigua.

In tal caso il problema, invertendosi, viene a consistere nella

ricerca dello andamento della funicolare, o più semplicemente del valore della freccia.

Ma le costruzioni grafiche da noi indicate servono anche in questo caso.

Trovato infatti, nei modi sopra indicati, il polo P relativo ad una qualunque funicolare risolvete, è ben evidente che i poli relativi a tutte le altre funicolari possibili staranno sulla parallela condotta per P alla corda AB (fig. 91).

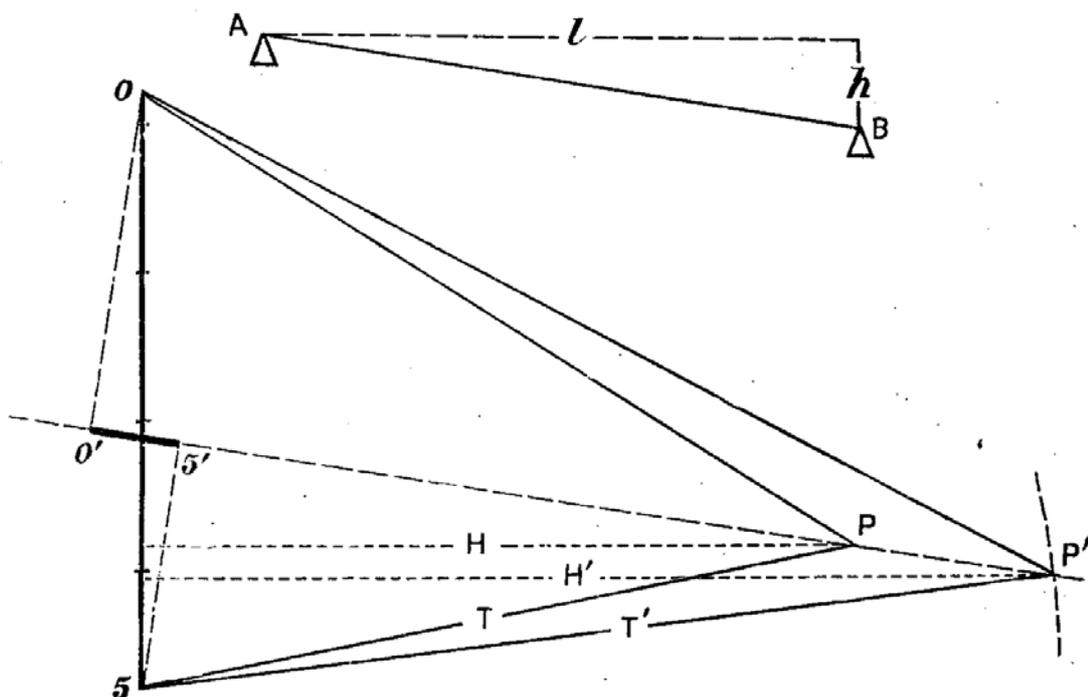


Fig. 91.

Se pertanto si vuol passare dal primo poligono costruito — nel quale la tensione in un certo punto, per es.: nel punto d'appoggio destro, aveva un certo valore qualunque T — ad un altro poligono in cui la stessa tensione abbia invece il valore dato T' , basta sulla predetta parallela individuare il nuovo polo P' mediante una circonferenza di raggio T' avente il suo centro nell'estremo 5 della retta delle forze.

S'intende che anche qui non occorrerà generalmente procedere all'effettivo tracciamento del nuovo poligono funicolare: basterà di solito sapere che la nuova freccia avrà il valore

$$f' = f \frac{H}{H'}$$

Un'ultima osservazione merita un brevissimo cenno.

Quando si deve progettare un impianto del tipo di quelli qui considerati si incomincia sempre col redigere un primo studio di massima nel quale si ammette che sui varii appoggi intermedi la fune possa liberamente scorrere senza incontrare resistenze di attrito.

Allora per una data condizione di equilibrio due rami contigui ad un medesimo appoggio vi sopportano la medesima tensione: quindi la variazione che questa presenta su tutta la lunghezza della linea dipende esclusivamente dagli incrementi e dalle diminuzioni che essa subisce nelle successive campate, ed è eguale alla lor somma algebrica.

Orbene di questi incrementi e di queste diminuzioni si può fare una valutazione, che è semplicemente approssimata, ma ha il grande pregio di non richiedere la preliminare determinazione delle singole funicolari: basta a tal fine condurre dagli estremi 0 e 5 della retta delle forze relativa a ciascuna campata le perpendicolari alla corda AB, e considerare il segmento 0'5' che esse staccano sulla retta dei poli PP' che alla corda stessa è per costruzione parallela.

Data infatti la rilevante grandezza che di solito hanno le tensioni estreme P0 e P5 o P'0 e P'5 per rapporto al complesso 05 delle forze applicate, si può praticamente ritenere che quelle perpendicolari sostituiscano con sufficiente approssimazione, nei brevi tratti nei quali vengono utilizzate, gli archi di cerchi aventi il centro nel polo, che sappiamo sicuramente situato sulla retta PP' ma di cui ammettiamo qui di non conoscere ancora la posizione effettiva.

Ne segue la regola: la differenza tra le tensioni della fune alle estremità di ciascuna campata si può misurare colla proiezione, fatta sulla direzione della corda, del carico totale che sulla campata insiste.

Calcolate quindi col metodo generale sopra illustrato, le tensioni in una determinata campata, per es.: nella campata maggiore della linea, riuscirà facilissimo, applicando più volte la regola testè enunciata, risalire per le campate che precedono e discenderè per quelle che seguono fino ai capi della linea, quando siano stati distribuiti lungo di essa i carichi in continuazione di quelli già considerati.

Gli incrementi dedotti si dovranno naturalmente considerare

come poste da aggiungersi alla tensione della campata fondamentale, quando corrispondano a campate in salita per chi le percorra partendo da quella. Si sottrarranno invece quando corrispondano a campate in discesa.

La valutazione delle tensioni ai due capi della linea, cui così si perviene, riesce in pratica abbastanza approssimata perchè si possa ad essa riferirsi nel fissare, da un lato, la resistenza e quindi le dimensioni della fune, dall'altro, l'entità del contrappeso tenditore.
