II.

LA STATICA DEI SISTEMI RIGIDI

Consideriamo un sistema rigido, libero da vincoli esterni, e soggetto all'azione di due sole forze, applicate rispettivamente a due dati suoi punti A e B.

È facile dimostrare che per l'equilibrio è necessario che quelle due forze abbiano la medesima linea d'azione e siano eguali in grandezza e rivolte in sensi contrarii.

Immaginiamo infatti impresso al sistema uno spostamento virtuale nel quale il punto A di applicazione di una delle forze non si muova: sicchè detta forza non faccia alcun lavoro. È evidente che, poichè per l'equilibrio il lavoro virtuale complessivo deve riuscire nullo, dovrà essere nullo il lavoro della seconda forza. Ma il punto B di applicazione di questa deve per la supposta rigidità del sistema mantenersi a distanza costante dal punto fisso A: ad esso si potranno attribuire tutti e soli gli spostamenti elementari tangenti ad una sfera di centro A. Dunque la forza applicata in B deve essere normale a questa sfera, cioè deve essere diretta secondo la congiungente AB.

La stessa dimostrazione serve naturalmente anche nei riguardi della forza applicata in A.

Se poi si immagina impresso al sistema uno spostamento virtuale quale deriva da una traslazione elementare parallela ad AB, il lavoro virtuale delle due forze risulta eguale alla lor somma algebrica moltiplicata per la grandezza dello spostamento: ma questa grandezza è arbitraria. Perchè dunque il lavoro sia nullo, come per l'equilibrio è necessario che sia, occorre che le due forze siano eguali e di segni contrarii.

Inversamente dimostreremo che questa condizione è sufficiente.

Immaginiamo infatti impresso al sistema rigido uno spostamento virtuale affatto arbitrario. Siano per esempio AA′ e BB′ (fig. 44) gli spostamenti che così si vengono ad attribuire ai due punti A e B. Questi spostamenti sono per ipotesi infinitesimi,

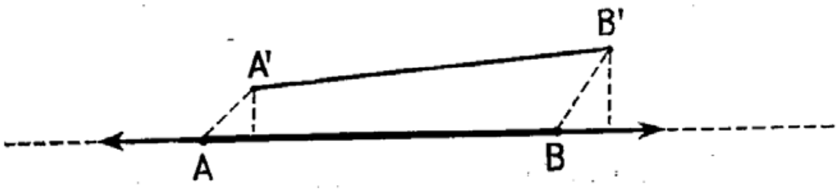

Fig. 44.

epperò trascurabili a fronte della distanza finita AB, la quale d'altra parte, per la supposta rigidità del sistema, deve mantenersi immutata. A meno di infinitesimi d'ordine superiore, la proiezione di A′B′ sulla direzione AB si può quindi ritenere eguale ad AB: ciò equivale a dire che le proiezioni sulla direzione AB dei due spostamenti devono (sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore) essere eguali.

Ma AB è anche la direzione comune delle forze, per ipotesi eguali e contrarie, applicate al sistema: il lavoro compiuto da una di esse sarà dunque sempre eguale e di segno contrario a quello compiuto dall'altra. Il sistema sarà dunque in equilibrio.

***

Segue da ciò una conseguenza importantissima: "una forza applicata ad un punto qualunque di un sistema rigido si può far scorrere lungo la sua linea d'azione fino a portarla ad agire in un altro qualsiasi punto di detta linea, purchè appartenente al sistema o rigidamente connesso con esso „.

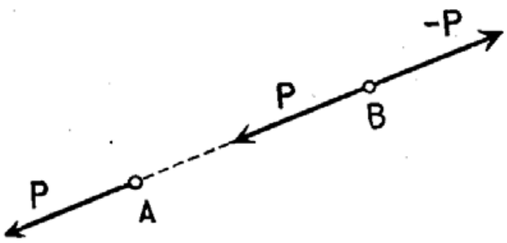

Fig. 45.

Sia infatti A il primitivo punto di applicazione di una forza P (fig. 45) e B il punto della sua linea d'azione in cui la si vuol trasportare. Si immaginino applicate in B due forze, l'una avente la stessa linea d'azione, la stessa grandezza e lo stesso senso di P, l'altra avente la stessa linea d'azione, la stessa grandezza, ma senso contrario. Niun dubbio che esse si facciano fra loro equilibrio. In virtù di un noto corollario del principio dei lavori virtuali (di cui abbiamo fatto cenno alla fine del precedente capitolo) l'eventuale stato di equilibrio del sistema materiale considerato non risulta quindi, per il loro intervento, alterato. D'altra parte noi sappiamo ormai che la forza P applicata in A e la forza — P applicata in B si fanno alla lor volta equilibrio. Per la stessa ragione possono dunque esse venir soppresse senza che con ciò si alteri lo stato del sistema: sul quale resta così ad agire la sola forza P applicata in B. Questa deve perciò venir considerata come perfettamente equivalente a quella data in A.

***

Facciamo ora l'ipotesi che le forze agenti sul sistema rigido siano tre.

È facile dimostrare che per l'equilibrio è in primo luogo necessario che le loro linee d'azione siano complanari e concorrenti in un punto.

A tal fine basta applicare il solito metodo degli spostamenti assumendo uno spostamento virtuale tale che restino fermi i punti di applicazione di due delle forze, sicchè queste non facciano lavoro. È evidente che, poichè per l'equilibrio il lavoro virtuale complessivo deve riuscire nullo, dovrà essere nullo anche il lavoro della terza forza. Ma il punto di applicazione di questa deve per la supposta rigidità del sistema mantenersi a distanza costante dai due punti fissi: deve quindi spostarsi sopra una circonferenza che ha il centro sulla congiungente di quei punti. Dunque la terza forza deve essere diretta normalmente a questa circonferenza, deve cioè giacere nel piano dei tre punti dati.

Assodato così che le linee d'azione delle tre forze devono essere complanari basterà assumere il punto di incontro di due di esse come punto fisso in un nuovo spostamento virtuale del sistema. E ripetendo tale e quale il ragionamento fatto nel caso in cui le forze erano due, si arriverà alla conclusione che anche la linea d'azione della terza forza dovrà passare per quel medesimo punto.

Dopo di che, supposte fissate ad arbitrio in grandezza, direzione e senso due delle forze, si può chiedersi quali debbano per l'equilibrio essere le caratteristiche della terza forza.

Detti α e β gli angoli che le direzioni delle prime due forze P e Q formano colla direzione incognita della terza forza R (fig. 46) immaginiamo impresso al sistema uno spostamento virtuale consistente in una traslazione elementare di

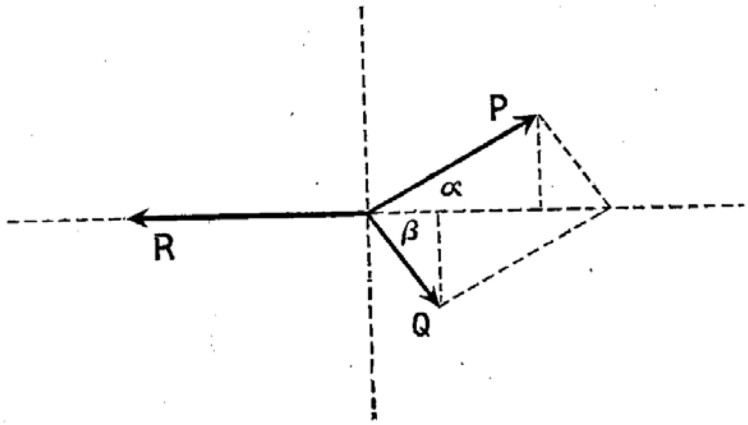

Fig. 46.

grandezza s nella direzione della R, e scriviamo l'equazione dei lavori virtuali:

$$R \,.\, s + P \,.\, s \cos \alpha + Q \,.\, s \cos \beta = 0$$

Similmente immaginiamo impresso al sistema uno spostamento virtuale consistente in una traslazione elementare di grandezza s' in direzione normale alla prima, e scriviamo di nuovo l'equazione dei lavori virtuali:

$$P \,.\, s' \operatorname{sen} \alpha + Q \,.\, s' \operatorname{sen} \beta = 0$$

Eliminati s ed s', queste due equazioni si possono subito scrivere sotto la forma:

$$-R = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = -\frac{Q}{P}$$

Esse ci dicono che la forza R deve essere eguale e contraria alla diagonale del parallelogramma costruito sulle altre due forze. Ci riportano cioè alla regola del parallelogramma delle forze, nel senso che, attraverso la considerazione della risultante, il problema dell'equilibrio di un sistema rigido cui siano applicate tre forze si viene a risolvere — per riduzione al caso di due forze sole — col dire che una delle tre forze deve essere eguale e contraria alla risultante delle altre due.

Vien subito in mente che, di questo passo, quando anche le forze fossero quattro o più, la risoluzione del problema dell'equilibrio continuerebbe ad essere immediata qualora la regola del parallelogramma fosse nel caso specifico ripetutamente e convenientemente applicabile.

In realtà il campo di applicazione di questa regola, attraverso le ultime considerazioni da noi fatte — e in armonia alla possibilità dianzi accertata di trasportare ogni singola forza da uno ad altro punto della sua linea d'azione — si è smisuratamente ampliato.

Nella statica dei sistemi rigidi due forze saranno ormai da considerarsi a tutti gli effetti equivalenti ad un'unica forza risultante, rappresentata dalla diagonale del parallelogramma costruito sulle due componenti, non soltanto quando esse sono applicate ad un medesimo punto materiale, ma ogni qual volta, pur agendo su punti distinti del sistema, le loro linee d'azione sono incidenti.

Si presenta così come fondamentale per la statica dei sistemi rigidi il problema della composizione di un numero qualunque di forze comunque distribuite nello spazio: problema che noi passiamo senz'altro ad analizzare, distinguendo per maggior chiarezza i singoli casi possibili, e risolvendoli ordinatamente a cominciare dal più semplice per giungere al più generale.

La composizione delle forze.

Forze concorrenti.

È questo il primo caso, il più ovvio, quello che non presenta anche a primo aspetto nessuna difficoltà.

In possesso della regola del parallelogramma noi siamo infatti senz'altro in grado di ridurre ad un'unica risultante un numero qualunque di forze concorrenti in un punto.

Basta evidentemente comporre insieme due qualunque delle forze date, poi la risultante parziale così ottenuta con un'altra delle forze date, poi la nuova risultante parziale con una quarta, e così via fino a che l'intero sistema verrà ad essere ridotto ad una sola forza che sarà la risultante cercata.

Che se si vuol giungere al risultato più speditamente, bàsta costruire una poligonale che abbia i suoi lati successivamente equipollenti (cioè eguali in grandezza, direzione e senso) alle singole forze date: la risultante sarà rappresentata dal segmento che va dall'origine al termine di tale poligonale.

Così date le forze OP, OQ, OR, OS, OT comunque escenti da un punto O, anche se non complanari, si costruisca PQ′ (fig. 47) eguale e parallelo ad OQ; OQ′ sarà la risultante di OP

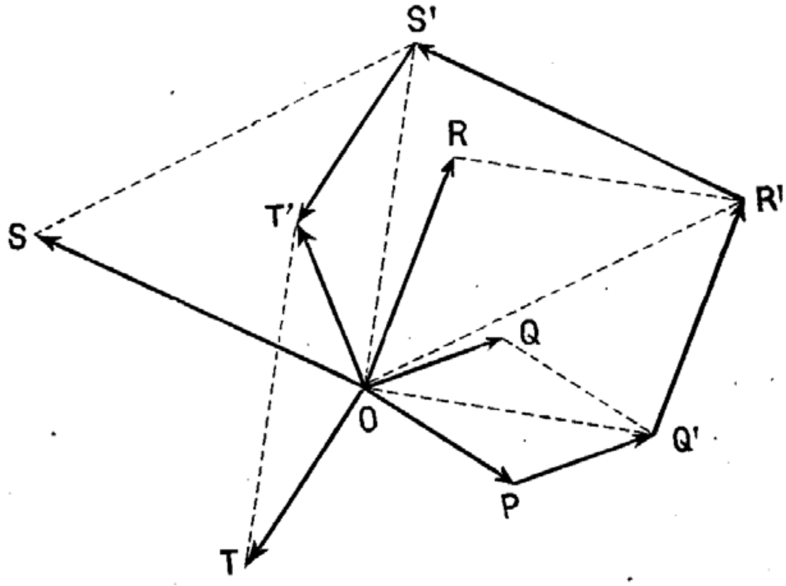

Fig. 47.

e di OQ. Poi si costruisca Q′R′ eguale e parallelo ad OR; OR′ sarà la risultante di OP, OQ, OR. Quindi si costruisca R′S′ eguale e parallelo ad OS; OS′ sarà la risultante di OP, OQ, OR, OS. E finalmente si costruisca S′T′ eguale e parallelo ad OT; si otterrà in OT′ la risultante generale del sistema.

Ovvie considerazioni di carattere geometrico permettono di constatare che la risultante così ottenuta è, come di dovere, indipendente dall'ordine con cui si sono utilizzate le varie forze per costruire la poligonale.

Forze parallele.

Incominciamo col considerare due forze P e Q parallele e rivolte dalla stessa parte, applicate a due punti A e B di un sistema rigido, e cerchiamone la risultante.

Applichiamo in A e in B, nella direzione AB, due forze S e — S eguali ed opposte (fig. 48). Queste facendosi equilibrio non alterano il sistema. Le due risultanti L ed M si incontreranno in un punto D: nulla ci vieta di ritenerle applicate in quel punto, supposto che appartenga al corpo dato o che sia con esso rigidamente connesso. Decomponiamo quelle due risultanti secondo due rette, l'una parallela ad AB, l'altra avente la direzione comune alle forze date P, Q. È evidente che le due componenti parallele ad AB saranno ancora eguali ad S ed a $-S$ epperò si equilibreranno vicendevolmente: le altre due forze, eguali alle due forze date, si sommeranno invece dando luogo alla risultante cercata.

La sua grandezza sarà pertanto:

$$R = P + Q$$

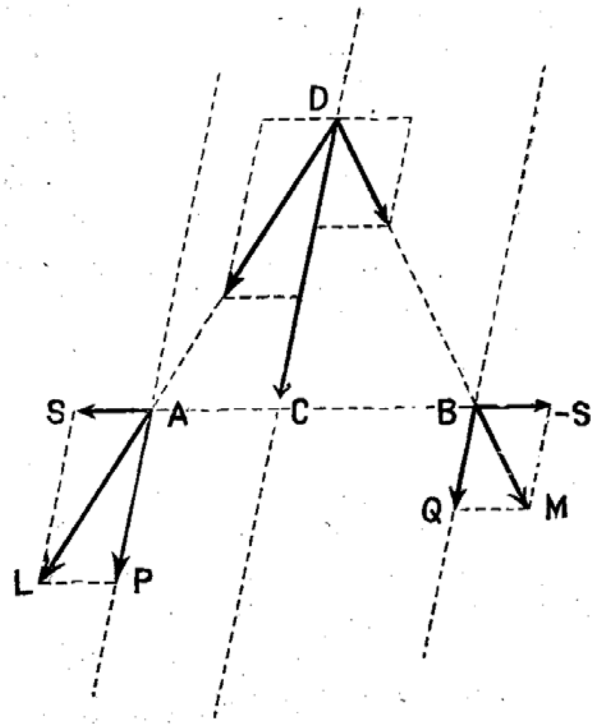

Fig. 48.

Per individuarne la posizione denotiamo con C il punto in cui la sua linea d'azione incontra la retta AB.

Dai quattro triangoli ADC, LAP, BDC, MBQ, simili a due a due, si trae:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{S}{P} \qquad \frac{BC}{CD} = \frac{S}{Q}$$

e dividendo l'una per l'altra:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$$

ossia:

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC$$

Dunque: la risultante di due forze parallele, volte dalla stessa parte, è parallela alle due componenti ed eguale alla lor somma, e taglia la congiungente dei punti di applicazione in parti inversamente proporzionali alle grandezze delle forze.

La relazione testè trovata si può anche scrivere così:

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P + Q}{BC + AC} = \frac{R}{AB}$$

E poichè R volta in senso contrario fa equilibrio a P ed a Q (fig. 49), potremo dire: quando tre forze parallele si fanno equilibrio e sono tagliate da una retta qualunque, ognuna di esse è proporzionale al segmento della retta intercetto tra le altre due.

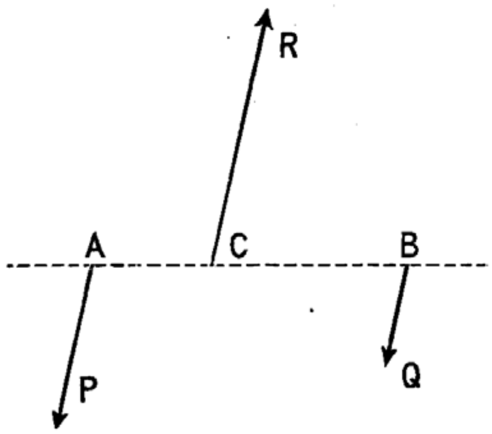

Fig. 49.

Occorre appena avvertire che questo non è altro che il principio della leva, espresso sotto forma ben poco differente da quella da noi illustrata a suo luogo.

Quello che importa tener presente si è che, una volta acquisito, in un modo o nell'altro, questo risultato, non è più affatto necessario ricorrere alla costruzione sopra descritta per trovare la risultante di due forze parallele. Basta procedere così.

Sulla linea d'azione p della forza P (fig. 50) si segni in posizione arbitraria un segmento Q′Q″ equipollente alla forza Q: similmente sulla linea d'azione q di quest'ultima forza si segni un segmento P′P″ equipollente alla prima. Si congiunga poi Q′ con P″ e P′ con Q″: il punto d'incontro I di queste due congiungenti apparterrà, com'è facilmente dimostrabile, alla linea d'azione r della risultante.

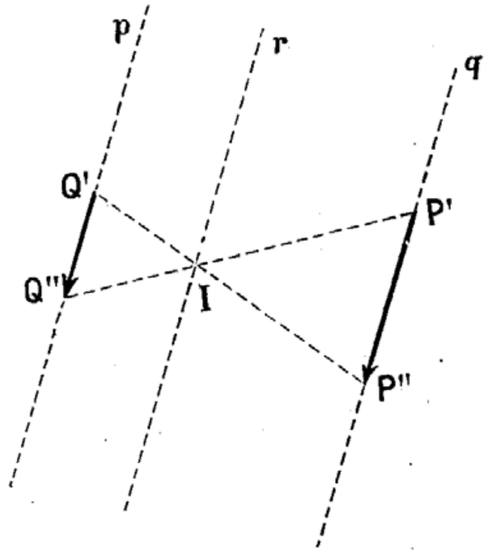

Fig. 50.

Le stesse norme servono per trovare la risultante di due forze parallele P ed R volte in sensi contrarii.

Si potrebbe constatarlo ripetendo, colle dovute varianti, il ragionamento fatto nel caso di forze volte dalla stessa parte: ma non ne vale la pena.

Basta riflettere che nel sistema rappresentato in fig. 49 è indifferente dire che R fa equilibrio a P e Q ovvero che Q fa equilibrio a P ed R. La risultante di queste due ultime forze sarà quindi necessariamente rappresentata dalla Q rivolta in senso contrario.

In particolare la stessa costruzione sopra descritta (la quale si presenterà ora come nella fig. 51) servirà ad individuare il punto generico J della linea di azione q della risultante.

Quanto alla sua grandezza si ha dalle relazioni precedenti:

$$Q = R - P$$

La risultante di due forze parallele rivolte in sensi opposti, è dunque eguale alla loro differenza, ha lo stesso senso della forza maggiore, e taglia la congiungente dei punti di applicazione dalla parte della forza maggiore in un punto le cui distanze dai punti di applicazione delle componenti stanno tra loro in ragione inversa delle componenti stesse.

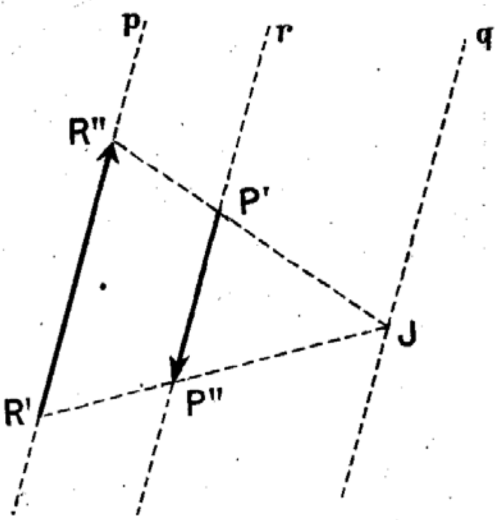

Fig. 51.

Tutto ciò sta bene soltanto fino a che le due componenti si suppongono disuguali.

Se infattì nella costruzione testè descritta si immagina per un momento che P prenda a crescere gradualmente fino ad eguagliare R si vede subito che Q tende a zero e nel tempo stesso si allontana indefinitamente.

La costruzione non regge dunque quando le due forze date, parallele e rivolte in sensi opposti, sono eguali.

D'altronde è facile convincersi che due forze in siffatte condizioni nè si fanno equilibrio, nè possono essere equilibrate da una terza forza.

Esse costituiscono un sistema di natura tutta speciale, non assimilabile ad una forza, a cui Poinsot ha dato il nome di " coppia ". Noi ci proponiamo di studiare brevemente le leggi a cui obbediscono le coppie: a tal fine cominceremo collo stabilire alcuni semplicissimi teoremi fondamentali.

Teoria delle coppie.

1) Una coppia può essere trasportata ovunque nel suo piano o in un piano parallelo, e si può far girare come si vuole in questo piano, senza che muti per ciò il suo effetto sul corpo al quale è applicata.

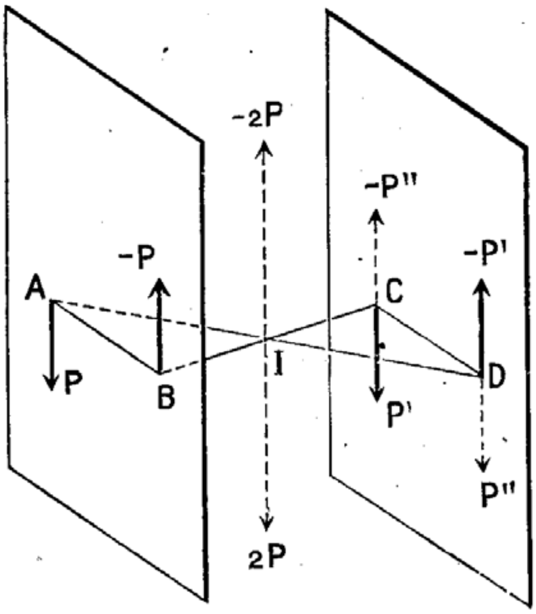

Fig. 52.

Sià invero (P, — P) la coppia data (fig. 52); le due forze che la compongono si immaginino applicate in due punti A, B situati sopra una medesima perpendicolare alla direzione comune delle forze: il segmento AB prende il nome di *braccio della coppia.*

Sopra un piano parallelo a quello in cui la coppia giace portiamo CD eguale e parallelo ad AB, ed applichiamo in C due forze opposte P′ e — P″ e in D due altre forze opposte P″ e — P′; tutte parallele e di grandezza eguale a P. È ovvio che queste quattro forze non alterano lo stato del sistema.

D'altra parte le forze P, P″, — P, — P″ si equilibrano fra loro: infatti tracciando le congiungenti BC ed AD queste si incontreranno nel loro punto di mezzo I nel quale dovranno intendersi applicate tanto la risultante 2 P delle forze P e P″, come quella — 2 P (eguale ed opposta) delle due forze — P e — P″.

Restano così soltanto le due forze P′, — P′ che costituiscono la nuova coppia (P′, — P′) in cui la prima deve intendersi trasformata.

Faremo ora vedere che ogni coppia si può far girare nel suo piano intorno al punto di mezzo del suo braccio.

Sia I (fig. 53) il punto di mezzo del braccio AB della coppia (P, — P), nonchè di un altro segmento CD = AB tracciato comunque nello stesso piano della coppia. Immaginiamo applicate, perpendicolarmente a questo segmento e in corrispondenza dei suoi estremi le quattro forze P′, P″, — P′, — P″ tutte eguali in grandezza alla forza P: esse non alterano il sistema perchè a due a due si equilibrano.

Ma le due forze P e — P″ si incontrano in un punto G della bissettrice di AIC e dànno luogo ad una risultante diretta secondo questa bissettrice: le due forze — P e P″ si incontrano in un punto H della stessa bissettrice e dànno una risultante eguale ed opposta alla prima. In conclusione si può dire che le quattro forze P, — P″, P″, — P si fanno equilibrio: restano così le sole forze P′, — P′ che costituiscono la nuova coppia (P′, — P′) in cui la (P, — P) deve intendersi trasformata.

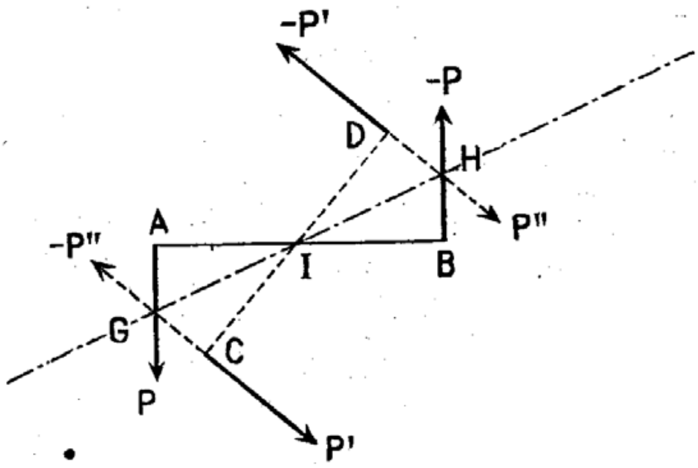

Fig. 53.

2) Una coppia può sempre essere trasformata in un'altra, posta nello stesso piano, agente nel medesimo senso, alla sola condizione che resti immutato il prodotto del braccio per la grandezza di una delle forze.

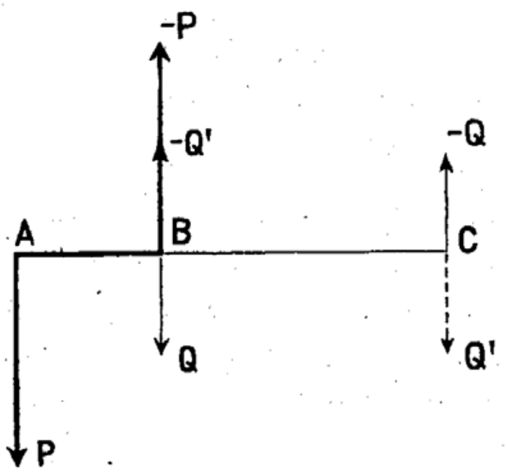

Fig. 54.

Sia (P, — P) una coppia di braccio AB. Scelto ad arbitrio un punto C della retta AB immaginiamo applicate in B ed in C quattro forze perpendicolari a BC: e siano Q, — Q′, Q′, — Q (fig. 54), tutte eguali tra loro e tali che

$$Q \, . \, BC = P \, . \, AB$$

Al solito le quattro forze aggiunte non alterano il sistema, ma P e Q′ dànno una risultante P + Q′ che risulterà applicata precisamente in B e sarà equilibrata dalla risultante, ad essa eguale e contraria, delle due forze — P, — Q′.

Così non resta più che la coppia (Q, — Q) in cui la coppia data (P, — P) deve intendersi trasformata.

Il prodotto della intensità di una delle forze pel braccio — prodotto nel quale noi riconosciamo il “ momento „ di una delle forze per rapporto ad un punto della linea d'azione dell'altra, e che designeremo perciò d'or innanzi col nome di “ momento della coppia „ — basta dunque a determinare la coppia, senza introdurre la considerazione di elementi non essenziali, quando si conosca il piano in cui essa agisce ed il suo senso.

È infatti intuitivo che una coppia di momento dato può agire in un dato piano in due sensi opposti. Se si conviene di assumere uno determinato di questi sensi come positivo, e quindi l'altro come negativo, si è condotti a considerare quel prodotto come una quantità dotata di segno.

Che se poi dal piano si passa nello spazio, definire una coppia vuol dire dare ad un tempo il valore algebrico del detto prodotto e la giacitura del piano in cui agisce, o, ciò che fa lo stesso, la direzione della normale a questo piano: sulla quale normale si potrà sempre assumere un certo senso come positivo in relazione col senso positivo dei momenti nel piano.

La coppia si presenta allora come una grandezza vettoriale: a rappresentarla si può assumere un vettore diretto secondo la predetta normale: a questo vettore — evidentemente definito in grandezza, direzione e senso, ma di cui resta completamente indeterminato il punto di applicazione, non solo, ma anche la linea d'azione — si dà di solito il nome di “ asse momento della coppia „.

Questo modo di rappresentazione compendia evidentemente le varie proprietà delle coppie che abbiamo fin qui messe in evidenza: perchè esso sia legittimo fin nelle sue ultime conseguenze, occorre che noi dimostriamo ancora che le regole relative alla composizione dei vettori si applicano anche alle coppie. A ciò provvede il teorema seguente.

3) Due qualsiansi coppie (componenti) si possono sempre ridurre ad una sola (coppia risultante) rappresentata dal vettore risultante degli assi momenti delle coppie date.

Noi sappiamo infatti che due coppie qualunque poste in piani differenti possono essere trasportate nei rispettivi piani, e trasformate in modo da avere il braccio comune sulla retta intersezione dei due piani (fig. 55).

Sia AB questo braccio: P, — P le forze che costituiscono la prima coppia: Q, — Q quelle che costituiscono la seconda.

Se si compongono le due forze P e Q e separatamente — P e — Q, si ottengono due risultanti R, — R le quali costituiscono evidentemente alla loro volta una coppia.

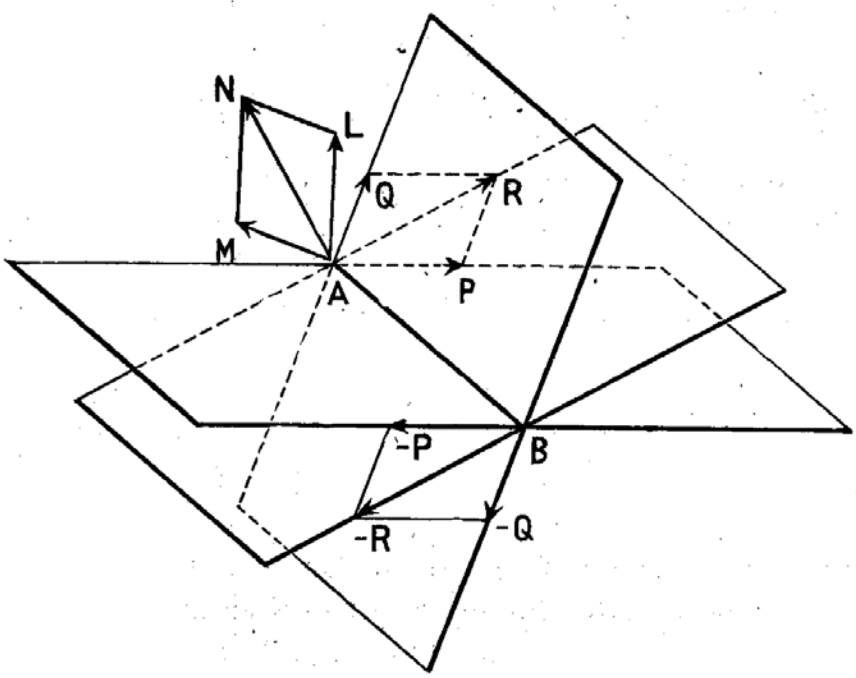

Fig. 55.

Eleviamo da A gli assi momenti AL ed AM delle coppie componenti: essi giaceranno nel piano del parallelogramma delle forze PQR e saranno proporzionali ai prodotti P . AB e Q . AB cioè rispettivamente alle forze P e Q: alle quali essi saranno rispettivamente perpendicolari.

Costruito pertanto il parallelogramma ALNM questo risulterà simile al parallelogramma APRQ e quindi la diagonale AN sarà perpendicolare ad R e si avrà:

$$AN : AL : AM = R : P : Q = R \,.\, AB : P \,.\, AB : Q \,.\, AB$$

AN sarà dunque ad un tempo il vettore risultante degli assi momenti delle coppie date, e l'asse momento della coppia risultante.

La composizione delle coppie è dunque ricondotta alla composizione dei loro assi momenti: e poichè, a differenza di ciò che accade per le forze, questi sono vettori liberi nello spazio, cioè trasportabili comunque parallelamente a se stessi, nulla ci impedirà di pensarli sempre applicati ad un punto arbitrariamente scelto. Con questa convenzione tutto ciò che siamo venuti dicendo intorno alla composizione di un numero qualunque di forze concorrenti si può senz'altro applicare alla composizione degli assi momenti delle coppie, e quindi delle coppie stesse.

In particolare resta implicitamente dimostrato che un sistema di coppie, qualunque sia il loro numero, la loro orientazione e la loro grandezza, può sempre ridursi ad un'unica coppia risultante.

Come caso particolare non bisognerà dimenticare che: coppie situate in un medesimo piano (o in piani paralleli) equivalgono ad un'unica coppia il cui momento è eguale alla somma, in questo caso semplicemente algebrica, dei momenti delle coppie date.

4) Una forza si può sempre comporre con una coppia situata in un piano passante per essa. Ne risulta una nuova forza equipollente alla forza data (cioè eguale ad essa in grandezza, direzione e senso).

Basta per convincersene pensar trasformata la coppia data in modo che una delle due forze di cui si compone sia precisamente eguale ed opposta alla forza data e provveda così ad equilibrarla: il sistema resterà allora ridotto all'altra delle due forze che costituiscono la coppia: la quale altra dovrà necessariamente essere equipollente alla forza data, spostata rispetto ad essa nel piano della coppia ad una distanza h eguale al braccio di questa.

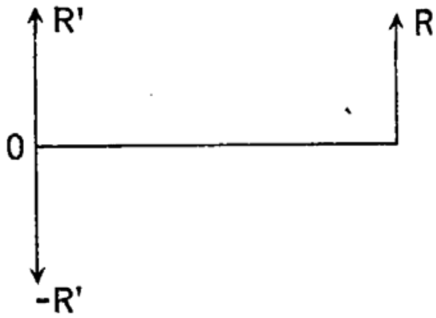

Fig. 56.

Reciprocamente: una forza qualunque si può sempre trasportare a passare per un punto arbitrariamente scelto dello spazio pur che si aggiunga al sistema una coppia conveniente.

Sia infatti O (fig. 56), il punto in cui si vuol trasportare la forza data R: si immaginino applicate in O due forze opposte R' e $-$R' parallele ed eguali in grandezza ad R: il sistema non resta per questo alterato. D'altronde la R e la $-$R' costituiscono una coppia, quindi l'asserto può considerarsi dimostrato.

Il lettore non mancherà certamente di rilevare che il momento della coppia generata dal trasporto della forza R nel punto O altro non è che quello che siamo ormai avvezzi a chiamare col nome di *momento della forza rispetto al punto.*

Sistemi piani.

Ciò posto, noi saremmo finalmente in grado di proporci lo studio di un sistema composto di un numero qualunque di forze arbitrariamente disposte nello spazio.

Tuttavia prima di affrontare il problema nei suoi termini più generali, incominceremo coll'analizzarlo e col risolverlo in un caso particolare che ha una estrema importanza nelle applicazioni; supporremo che le forze che costituiscono il sistema siano tutte contenute in un medesimo piano.

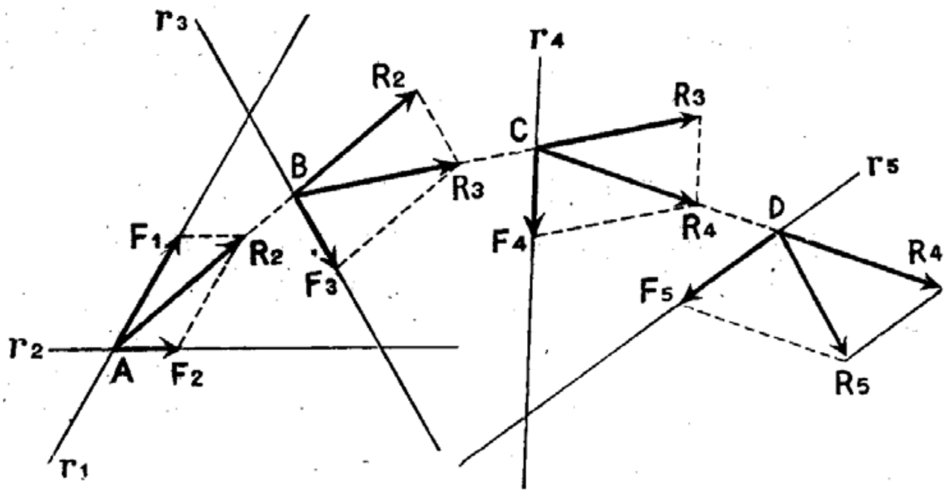

Fig. 57.

Assumiamo nel piano un'origine ad arbitrio, ed immaginiamo in essa trasportate tutte le forze: il sistema viene così ad essere trasformato in un sistema di forze concorrenti in un punto e di coppie generate nei trasporti.

Ora le forze, essendo concorrenti, si compongono subito in un'unica forza, passante per l'origine: per parte loro le coppie dànno luogo ad un'unica coppia.

E poichè forza e coppia continueranno per ragioni ovvie a giacere nel piano dato, nulla ci vieta di comporle ulteriormente: otterremo così un'unica risultante equipollente alla forza già trovata, se pure non più passante per l'origine.

Fa eccezione soltanto il caso in cui la forza sia nulla: allora il sistema resta ridotto ad un'unica coppia.

In conclusione possiamo affermare che: " un sistema piano di forze si può sempre ridurre ad un'unica forza risultante, ovvero ad un'unica coppia „.

In pratica non occorre però effettuare i descritti trasporti delle singole forze date nell'origine: si può, ricorrendo a metodi grafici, trattare il problema per via diretta, ed arrivare alla voluta risultante mediante ripetute successive applicazioni dei procedimenti di composizione delle forze a due a due che ci sono ormai familiari.

Si arriva così a costruzioni ed a risultati singolarmente espressivi e meritevoli di essere sia pur brevemente accennati. Siano r_1, r_2, r_3... (fig. 57) le linee d'azione secondo le quali agiscono le forze F_1, F_2, F_3... E sia A il punto d'incontro di due di esse, per esempio di r_1 e di r_2: immaginiamo trasportate in A le forze F_1 ed F_2, e componiamole, per mezzo di un parallelogramma, in un'unica forza risultante R_2.

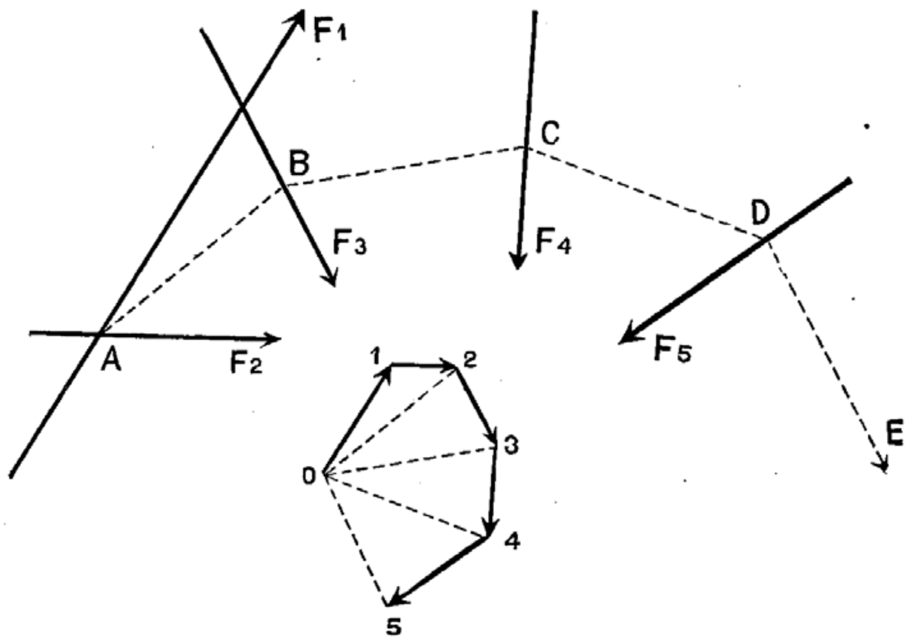

Fig. 58.

Consideriamo poi il punto B in cui la linea d'azione di questa prima risultante parziale incontra un'altra qualunque delle rette date, per es. r_3: immaginiamo trasportate in B tanto la R_2 come la F_3, e componiamole alla lor volta in un'unica forza R_3 che verrà così ad essere la risultante di F_1, F_2, F_3. E così via.

La costruzione si può eseguire più comodamente se si ha l'avvertenza di tracciare a parte la poligonale delle forze: vale a dire una poligonale 0123... (fig. 58) la quale abbia i suoi lati ordinatamente equipollenti alle forze date. In tal caso infatti i raggi 02, 03... proiettanti dall'origine della poligonale i singoli suoi vertici, riescono evidentemente equipollenti alle singole risultanti parziali R_2, R_3... di cui si è dianzi parlato: mentre le successive linee d'azione di queste risultanti si possono ottenere costruendo un poligono ABC... il quale parta dal punto d'incontro delle linee d'azione delle prime due forze, abbia i suoi lati ordinatamente paralleli a quei raggi proiettanti, ed i vertici sulle linee d'azione delle forze successive. Questo poligono si chiama il " poligono delle successive risultanti ".

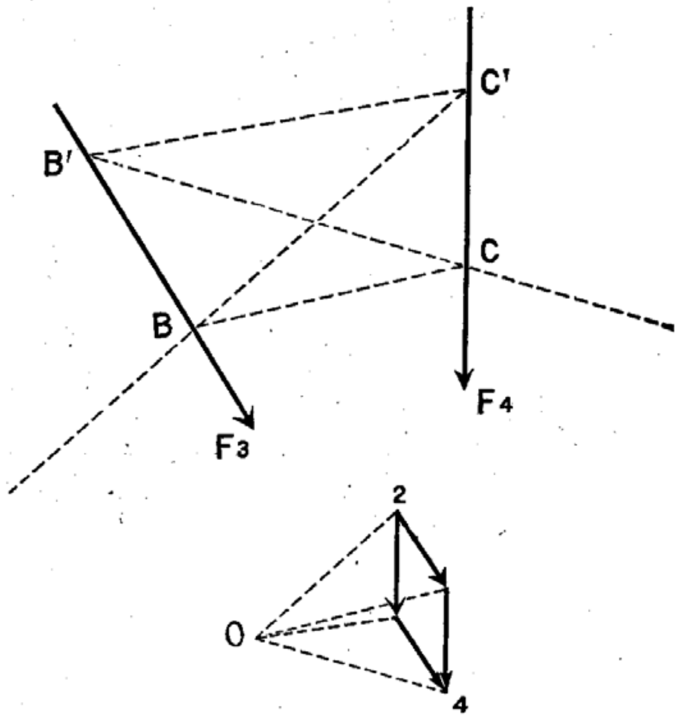

Fig. 59.

Ogniqualvolta si riesce con un siffatto poligono a collegare tutte le linee d'azione delle forze date, si può dire di aver ridotto il sistema ad un'unica risultante: essa sarà equipollente all'ultimo dei raggi proiettanti (in figura: 05), a quello cioè che chiude la poligonale delle forze, ed avrà per linea d'azione l'ultimo lato (in figura: DE) del poligono delle successive risultanti.

Questa risultante è naturalmente indipendente dall'ordine in cui le forze sono state prese in considerazione: per quanto possa sembrare superfluo, si può verificarlo facilmente anche soltanto in base a considerazioni geometriche: naturalmente basta esaminare il caso in cui si inverte l'ordine di due qualunque forze successive (fig. 59), poichè con una opportuna successione di inversioni siffatte si può evidentemente mutare comunque l'ordine dell'intiero sistema.

Come caso particolare può accadere che la poligonale delle forze risulti chiusa, che cioè il suo estremo (in figura 60: il punto 5) venga a coincidere coll'origine 0. Allora il raggio proiettante 04 si sovrappone al lato 45 che rappresenta l'ultima

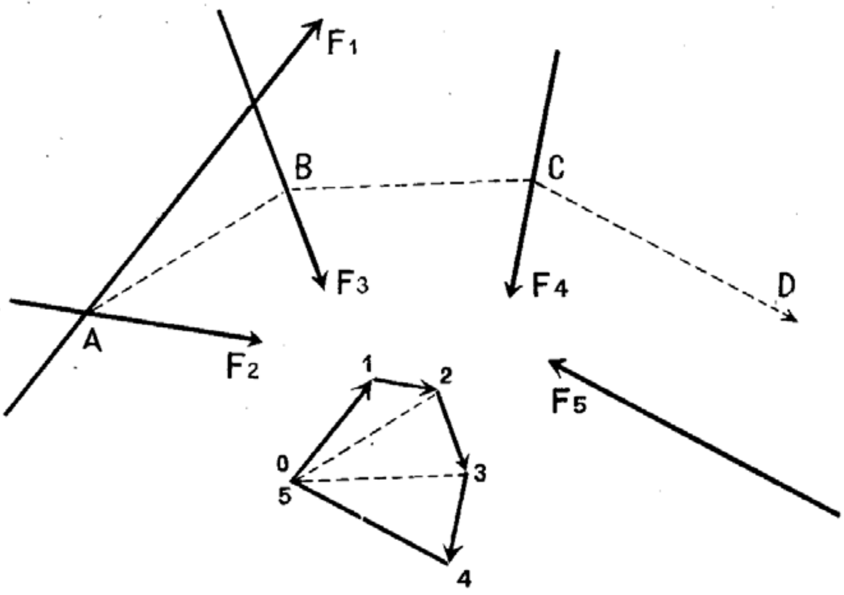

Fig. 60.

forza: perciò il lato CD del poligono delle successive risultanti risulta parallelo alla linea d'azione della forza F_5: e siccome la risultante parziale delle prime quattro forze, che ha CD per linea d'azione, è eguale in grandezza, e di senso contrario alla F_5, sarebbe vano tentare qualunque ulteriore composizione: il sistema è ridotto ad una coppia.

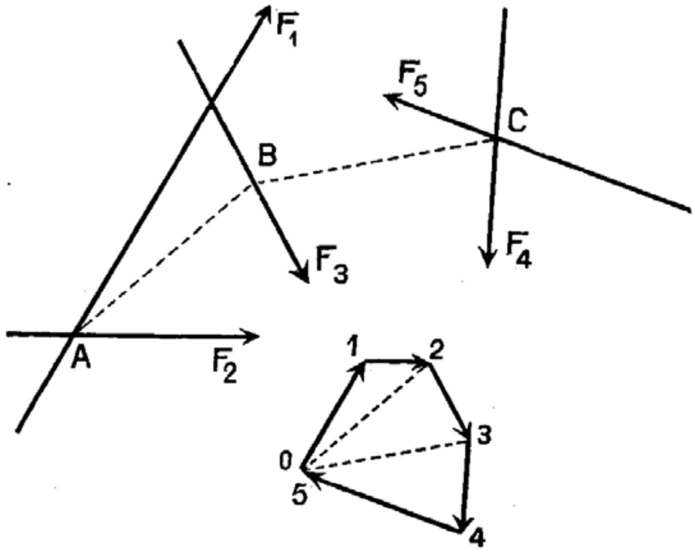

Fig. 61.

Come caso ancor più particolare può finalmente accadere che il lato CD del poligono delle successive risultanti coincida precisamente colla linea d'azione della forza F_5 (fig. 61): allora questa riesce eguale ed opposta alla risultante delle precedenti: il sistema è in equilibrio.

Forze comunque disposte nello spazio.

Il ragionamento adottato per l'impostazione del problema dell'equilibrio di un sistema piano di forze si può sostanzialmente ripetere anche nel caso generale in cui le forze non sono più contenute in un piano, ma son comunque orientate nello spazio.

Assunta infatti un'origine ad arbitrio, si possono ancora immaginare in essa trasportate le singole forze, riducendo così il sistema di forze dato, qualunque esso sia, ad un sistema di forze concorrenti e di coppie generate nei trasporti.

Si può ancora osservare che le forze, essendo concorrenti, si comporranno subito in un'unica forza: e che per parte loro le coppie daranno origine ad una unica coppia.

Senonchè questa coppia giacerà in generale in un piano obliquo alla direzione della forza: dati i mezzi di cui disponiamo non si potrà quindi più parlare di immediata loro ulteriore composizione.

Dobbiamo quindi limitarci a concludere che " un sistema qualunque di forze applicate ad un corpo rigido si può sempre ridurre ad una forza risultante, passante per un punto arbitrariamente scelto, e ad una coppia ".

Si vede subito che la forza ha grandezza, direzione e senso perfettamente determinati, indipendentemente dalla scelta del centro di riduzione prescelto.

Non è così della coppia la quale dipende ovviamente dalla posizione di questo centro.

Vien pertanto fatto di chiedersi se, con una opportuna scelta del centro, la coppia potrebbe annullarsi ed il sistema ridursi ad un'unica forza: ovvero, ciò che fa perfettamente lo stesso, se la forza e la coppia trovate partendo da un'arbitraria posizione del centro di riduzione possano ulteriormente comporsi per dar luogo ad un'unica risultante.

Ora noi sappiamo già che ciò è immediatamente fattibile se la coppia giace in un piano passante per la linea d'azione della forza o ad essa parallelo.

Dimostriamo ora che in ogni altro caso questa ulteriore riduzione del sistema è impossibile.

Si immagini infatti decomposta la coppia in due coppie: una situata in un piano normale alla forza, l'altra situata in un piano passante per la forza. Quest'ultima si comporrà colla forza dando luogo ad un ben determinato spostamento della sua linea d'azione: ed il sistema resterà ridotto ad una forza e ad una coppia agente in un piano normale alla prima.

La retta che in queste condizioni funziona da linea d'azione della forza prende il nome di *asse centrale* del sistema: e si può dimostrare che essa è in ogni caso ben determinata: che cioè esiste una sola retta sulla quale la risultante possa trovarsi quando il piano della coppia è ad essa normale.

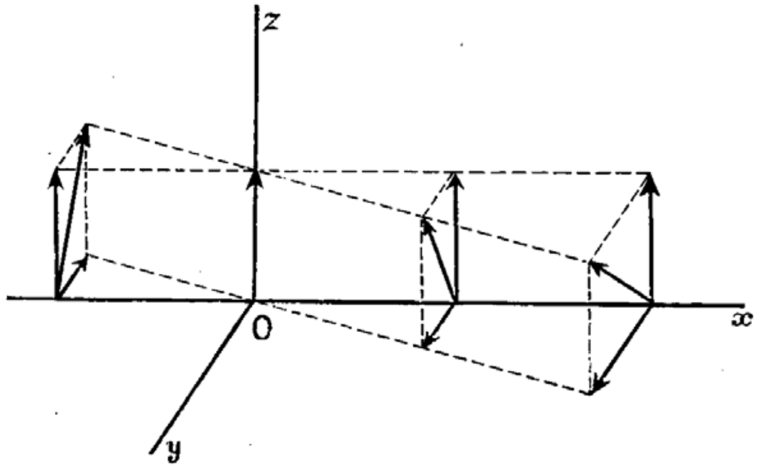

Fig. 62.

Consideriamo infatti un'altra retta qualunque ad essa parallela, e pensiamovi trasportata la forza risultante: nel trasporto nasce naturalmente una nuova coppia il cui asse momento è normale alla risultante e proporzionale allo spostamento. Composto coll'asse momento della coppia data il quale è diretto parallelamente alla risultante, esso dà luogo ad un asse momento obliquo e certamente più grande.

La fig. 62 mostra chiaramente come vanno le cose: il fenomeno è cilindrico, ed ha per asse l'asse centrale che si è assunto come asse delle z. Per tutti i punti che distano ugualmente da quest'asse gli assi momenti delle coppie risultanti hanno la medesima lunghezza, sono egualmente inclinati sull'asse centrale e sono tangenti ad un medesimo cilindro che è di rivoluzione attorno al detto asse.

La coppia è minima quando la forza sta sull'asse centrale. E si può sempre calcolare questo minimo proiettando l'asse momento ottenuto per un centro di riduzione arbitrariamente scelto sulla direzione della forza risultante.

***

Cerchiamo ora di tradurre analiticamente i risultati ottenuti. A tal fine incominciamo col considerare un caso molto particolare: quello in cui le forze sono tre sole, e le loro linee di azione, passanti per un medesimo punto, sono tra loro mutuamente ortogonali. La risultante sarà allora rappresentata dalla diagonale del parallelepipedo, naturalmente rettangolo, costruito sulle tre componenti.

Dette X, Y, Z le grandezze di queste, la grandezza della risultante sarà data dalla relazione:

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

ed i coseni degli angoli da essa fatti colle tre componenti saranno:

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} \qquad \cos\beta = \frac{Y}{R} \qquad \cos\gamma = \frac{Z}{R}$$

Se viceversa è data una forza R e la si vuol decomporre secondo tre direzioni ortogonali qualunque, colle quali essa faccia gli angoli α, β, γ, le tre componenti saranno evidentemente le proiezioni di R sulle dette direzioni, epperò varranno rispettivamente:

$$X = R\cos\alpha \qquad Y = R\cos\beta \qquad Z = R\cos\gamma$$

Ciò premesso supponiamo che il sistema generale di forze concorrenti, di cui si è poc'anzi parlato, venga riferito ad una terna di assi cartesiani ortogonali, del resto arbitrariamente scelti.

Siano genericamente X, Y, Z le componenti di una qualunque delle forze date: poichè tutte le componenti dirette secondo un medesimo asse si sommeranno insieme dando luogo ad un'unica forza diretta secondo lo stesso asse, l'intiero sistema potrà considerarsi senz'altro ridotto a tre sole forze, che indicheremo rispettivamente con

$$\mathscr{X} = \Sigma X \qquad \mathscr{Y} = \Sigma Y \qquad \mathscr{Z} = \Sigma Z$$

in funzione delle quali noi sappiamo immediatamente esprimere la grandezza della risultante

$$R = \sqrt{\mathscr{X}^2 + \mathscr{Y}^2 + \mathscr{Z}^2}.$$

Ciò premesso, passiamo senz'altro alla trattazione del caso generale. Scelta ad arbitrio un'origine O e, per essa, una terna di assi cartesiani ortogonali x, y, z, noi incominceremo col sostituire a ciascuna delle forze del sistema dato una forza equipollente applicata in O e la relativa coppia generata nel trasporto. E nello stesso modo con cui si caratterizza la forza mediante le sue tre componenti X, Y, Z secondo i tre assi, converrà caratterizzare la coppia mediante le relative coppie componenti nei tre piani coordinati.

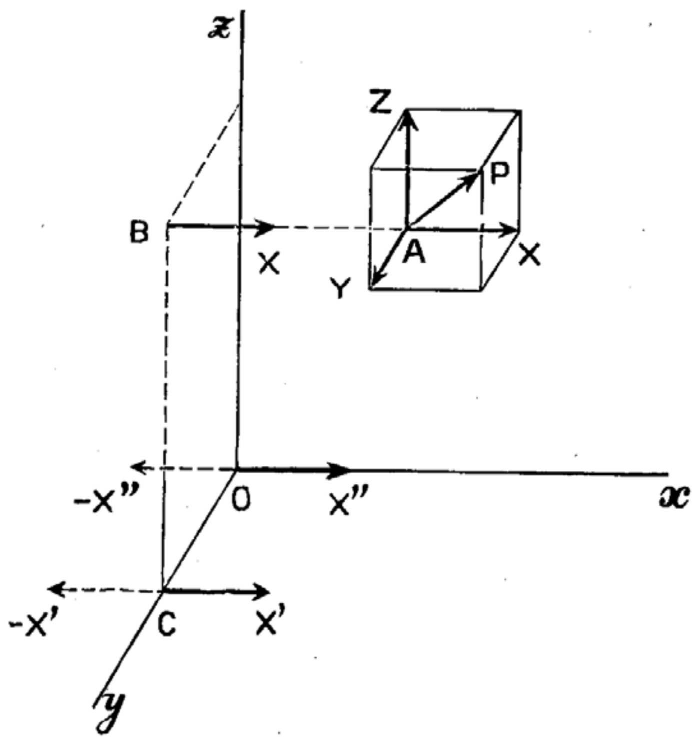

Fig. 63.

A questo risultato si arriva nel modo più spontaneo se si ragiona così:

Siano x, y, z le coordinate del punto A a cui si suppone applicata la forza generica P di componenti X, Y, Z (fig. 63).

Nulla ci vieta di considerare la componente X come applicata nel punto B in cui la sua linea d'azione (parallela ad x condotta per A) incontra il piano y z.

Proiettiamo B parallelamente a z sull'asse y: e trasportiamo nel punto C così ottenuto la forza X: essa assumerà la posizione indicata in figura con X'; nel tempo stesso si sarà generata una coppia (X, — X') di braccio BC = z epperò di momento $z.X$ la quale può considerarsi come giacente nel piano coordinato $z\,x$.

Trasportiamo poi ancora la forza X da C in O sì da farle assumere la posizione indicata con X″; nascerà una coppia (X′, — X″) di braccio $CO = y$ epperò di momento $y.X$ giacente nel piano $x\,y$.

Bisogna però intendersi bene per ciò che riguarda i segni: faremo perciò, una volta per tutte, la seguente convenzione.

Considereremo positiva una coppia agente in uno dei piani coordinati yz, zx, xy quando essa corrisponde a quel senso delle rotazioni che tenderebbe a portare il semiasse positivo delle y sul semiasse positivo delle z: e similmente (per rotazione circolare degli indici) quello delle z su quello delle x, e quello delle x su quello delle y.

Con questa convenzione la coppia testè trovata nel piano zx è da considerarsi come positiva, mentre quella trovata nel piano xy è da riguardarsi come negativa.

Concluderemo perciò che la prima componente della forza data P si può caratterizzare mediante una forza equipollente ad X ed avente per linea d'azione lo stesso asse delle x, e mediante due coppie di momenti

$$z.X \quad \text{e} \quad -y.X$$

aventi gli assi diretti rispettivamente secondo y e z.

Facendo le stesse operazioni per le altre due componenti Y e Z si trova che esse possono alla loro volta portarsi ad aver per linea d'azione i corrispondenti assi coordinati, mediante la introduzione di due coppie di momenti:

$$x.Y. \quad \text{e} \quad -z.Y$$

aventi gli assi diretti rispettivamente secondo z ed x, e di due altre coppie di momenti

$$y.Z \quad \text{e} \quad -x.Z$$

aventi gli assi diretti rispettivamente secondo x ed y.

Ciò che si è detto per una forza P va naturalmente ripetuto per tutte indistintamente le forze che compongono il sistema: dopo di che si riconosce facilmente che questo può completatamente caratterizzarsi mediante due terne di vettori diretti secondo gli assi coordinati

$$\begin{array}{ll} \mathcal{X} = \Sigma \mathrm{X} & \mathcal{L} = \Sigma (y \,.\, \mathrm{Z} - z \,.\, \mathrm{Y}) \\ \mathcal{Y} = \Sigma \mathrm{Y} & \mathcal{M} = \Sigma (z \,.\, \mathrm{X} - x \,.\, \mathrm{Z}) \\ \mathcal{Z} = \Sigma \mathrm{Z} & \mathcal{N} = \Sigma (x \,.\, \mathrm{Y} - y \,.\, \mathrm{X}) \end{array}$$

I vettori della prima terna rappresentano le componenti della forza risultante applicata in O e di grandezza

$$\mathrm{R} = \sqrt{\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2}$$

i suoi coseni direttori sono

$$\frac{\mathcal{X}}{\mathrm{R}} \qquad \frac{\mathcal{Y}}{\mathrm{R}} \qquad \frac{\mathcal{Z}}{\mathrm{R}}$$

I vettori della seconda terna rappresentano invece gli assi momenti delle tre coppie, componenti secondo i piani coordinati della coppia risultante: ad essi si dà generalmente il nome di momenti del dato sistema di forze rispetto ai tre assi coordinati: e sono legati al momento S della coppia risultante (momento del sistema rispetto all'origine) dalla relazione:

$$\mathrm{S} = \sqrt{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2}$$

i relativi coseni direttori sono:

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathrm{S}} \qquad \frac{\mathcal{M}}{\mathrm{S}} \qquad \frac{\mathcal{N}}{\mathrm{S}} .$$

Quanto al senso dovrà assumersi tale che un osservatore disposto coi piedi nell'origine del vettore rappresentativo e colla testa all'estremità di questo veda la coppia agire nello stesso senso in cui vedrebbe agire una coppia positiva nel piano yz se si trovasse invece adagiato lungo l'asse delle x colla testa dalla parte delle x positive.

***

Giunti a questo punto una osservazione si presenta ovvia ed immediata, la quale ci riporta in pieno nel problema generale, momentaneamente messo da parte, della statica dei sistemi rigidi.

Al lettore non sarà certamente sfuggito il fatto che le due terne

$$\mathcal{X} = \Sigma X \qquad \mathcal{L} = \Sigma(y . Z - z . Y)$$
$$\mathcal{Y} = \Sigma Y \qquad \mathcal{M} = \Sigma(z . X - x . Z)$$
$$\mathcal{Z} = \Sigma Z \qquad \mathcal{N} = \Sigma(x . Y - y . X)$$

caratterizzanti la forza e la coppia risultante sono quelle stesse dal cui annullarsi abbiamo visto a suo tempo dipendere l'equilibrio di un corpo rigido libero.

Ed è ben giusto che sia così. Poichè infatti una forza non può far equilibrio ad una coppia, l'equilibrio non potrà sussistere se non quando siano nulle separatamente la forza risultante R e la coppia risultante S.

Ora perchè si abbia

$$R = 0 \quad \text{ed} \quad S = 0$$

occorre e basta che siano separatamente nulle tutte le sei caratteristiche del sistema. Si ottengono così le sei equazioni

$$\mathcal{X} = \Sigma X = 0 \qquad \mathcal{L} = \Sigma(y . Z - z . Y) = 0$$
$$\mathcal{Y} = \Sigma Y = 0 \qquad \mathcal{M} = \Sigma(z . X - x . Z) = 0$$
$$\mathcal{Z} = \Sigma Z = 0 \qquad \mathcal{N} = \Sigma(x . Y - y . X) = 0$$

Occorre appena avvertire che, poichè la scelta della terna di assi coordinati non è stata assoggettata ad alcuna riserva o condizione, le equazioni scritte debbono riuscir verificate per rapporto ad ogni qualsiasi sistema di riferimento. Si può anzi dire che, scelta ad arbitrio una retta qualunque nello spazio, se il dato sistema è in equilibrio, deve risultar nulla tanto la componente secondo essa come il momento rispetto ad essa.

Naturalmente questo modo di esprimere le condizioni dell'equilibrio permette di scrivere quante si vogliano equazioni: ma poichè sei di esse, scelte nel modo dianzi indicato, sono sufficienti, conviene credere che tutte le altre non saranno che delle conseguenze delle prime.

Non è d'altronde difficile constatare direttamente che qualunque equazione di proiezione, cioè ottenuta imponendo l'annullamento della somma delle proiezioni delle forze su di una retta arbitraria, è della forma

$$a . \mathcal{X} + b . \mathcal{Y} + c . \mathcal{Z} = 0$$

con a, b, c costanti; e che qualunque equazione di momento, cioè ottenuta imponendo l'annullamento della somma dei momenti delle forze rispetto ad una retta pure arbitraria, si può ridurre alla forma

$$d \,.\, \mathcal{X} + e \,.\, \mathcal{Y} + f \,.\, \mathcal{Z} + g \,.\, \mathcal{L} + h \,.\, \mathcal{M} + k \,.\, \mathcal{N} = 0$$

con d, e, ... k costanti.

Reciprocamente basterà stabilire sei di queste equazioni comunque scelte, purchè indipendenti, perchè la sestupla fondamentale risulti implicitamente determinata, e con essa risulti assicurato l'equilibrio.

Naturalmente occorre essere ben certi che le sei equazioni sono realmente indipendenti, vale a dire che nessuna di esse è conseguenza delle altre.

In questo ordine di idee una prima regola si presenta ovvia, ed è questa: le equazioni di proiezione non devono mai essere più di tre. Tre di esse convenientemente scelte, cioè riferite a rette non parallele ad un medesimo piano, bastano infatti ad esprimere che deve essere nulla la forza risultante; scritte queste tre, tutte le altre analoghe non farebbero che ripetere sotto altra forma la medesima cosa.

Occorrono dunque sempre almeno tre equazioni dei momenti: ma niente esclude che quattro, o cinque, o anche tutte le sei equazioni possano essere di questo tipo.

Così per esempio si può realizzare quest'ultimo caso scrivendo che sono nulli i momenti rispetto ai sei spigoli di un tetraedro arbitrario.

Che questa condizione sia necessaria discende da ciò che abbiamo già detto: ci limiteremo perciò a dimostrare che è sufficiente perchè l'equilibrio sussista. A tal fine supponiamo che essa sia verificata per un tetraedro dato i cui vertici denoteremo colle lettere ABCD: dire che sono nulli i momenti del sistema dato rispetto ai tre spigoli AB, AC, AD escenti da A equivale evidentemente a dire che è nullo il momento rispetto ad A: se pertanto le forze considerate non si facessero equilibrio dovrebbero quanto meno potersi ridurre ad una risultante unica passante per A. Ma lo stesso ragionamento può evidentemente ripetersi per ciascuno degli altri tre vertici B, C, D del tetraedro. E poichè è materialmente impossibile che una forza passi per tutti e quattro i vertici di un tetraedro, così convien concludere che il sistema dato è in equilibrio.

***

Nel caso, particolarmente interessante nelle applicazioni, che le forze date siano tutte contenute in un piano, le sei equazioni generali dell'equilibrio si riducono immediatamente a tre. Basta per constatarlo assumere il piano del sistema come piano coordinato xy e perciò porre $z = 0$, e contemporaneamente, in omaggio all'ipotesi fatta, $Z = 0$.

Le tre equazioni che non si riducono ad identità esprimono chiaramente l'annullarsi della componente della forza risultante secondo i due assi e l'annullarsi del momento rispetto all'origine:

$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma (x \,.\, Y - y \,.\, X) = 0$$

A questa terna, infinite altre terne equivalenti possono sostituirsi: resta la condizione che almeno una delle tre equazioni deve riferirsi ai momenti, in quanto le equazioni di proiezione non possono che esprimere l'annullarsi della forza risultante; e due di esse, convenientemente scelte, cioè relative a direzioni distinte, bastano allo scopo.

Ma scritta una prima equazione di momenti vi sono diversi modi di completare il sistema.

La prima equazione dirà infatti che se si immaginano trasportate tutte le forze date nel punto O scelto come centro dei momenti, la coppia risultante da introdursi è nulla: ciò vuol dire semplicemente che il sistema di forze si può ridurre ad una forza unica applicata in O.

Resta dunque ad esprimere che questa forza è nulla.

Ora se noi adottiamo una equazione di proiezione, se cioè scriviamo che è nulla la somma delle proiezioni delle forze date su una retta arbitraria, veniamo a porre in sostanza la condizione che la forza in questione non può essere diretta se non parallelamente ai raggi proiettanti.

Ma noi possiamo anche ricorrere ad una nuova equazione dei momenti: scrivendo infatti che è nulla la somma dei momenti rispetto ad un nuovo centro O′ (naturalmente distinto da O) noi veniamo a dire che la forza in discorso deve passare oltre che per O anche per O′. Anche questo procedimento serve dunque ad escludere tutte le direzioni possibili meno una.

E allora se facciamo ciò due volte di seguito, riferendoci a due direzioni distinte, noi veniamo a creare un complesso di condizioni che non possono più essere simultaneamente soddisfatte se non quando la forza è nulla.

Concludendo, il problema, nel piano, è suscettibile di tre soluzioni analiticamente distinte:

1) un'equazione dei momenti e due equazioni di proiezione su due direzioni differenti;

2) due equazioni di momenti relative a due centri diversi e un'equazione di proiezione, alla condizione che i raggi proiettanti non siano paralleli alla congiungente dei centri;

3) tre equazioni dei momenti, purchè i tre centri prescelti non siano allineati.

La determinazione delle reazioni di vincolo.

Non bisogna credere che le equazioni generali dell'equilibrio di un corpo rigido servano soltanto a verificare se, in una data configurazione del corpo, e sotto l'azione di un sistema dato di forze, l'equilibrio sussista o no.

In realtà è ben raro il caso che il corpo sia, come noi l'abbiamo fin qui supposto, libero affatto nello spazio. Di solito, oltre ai vincoli *interni* che con più o meno grande approssimazione noi abbiamo sostituiti col concetto della rigidità, i corpi naturali sono soggetti a vincoli *esterni* che ne limitano più o meno la mobilità nello spazio.

È bensì vero che questi vincoli possono idealmente venir soppressi e sostituiti dalle relative reazioni: con che la libertà di movimento del corpo viene ripristinata, tutti gli spostamenti da noi considerati ritornano ad essere possibili, e si possono quindi ancora scrivere le solite equazioni generali dell'equilibrio.

Ma in esse compariranno necessariamente, insieme colle date forze applicate, anche le reazioni di vincolo, che sono incognite.

Il problema dell'equilibrio si potrà pertanto, per mezzo delle solite equazioni, considerare come risolto, solo se tali equazioni saranno sufficienti a determinare i valori di queste incognite.

Per precisare le idee, cerchiamo di fissare prima di tutto il tipo e la natura dei vincoli esterni che vogliamo prendere in considerazione, specificando le limitazioni che essi sono atti ad imporre alla mobilità del sistema cui sono applicati, e deducendone le caratteristiche delle reazioni che essi sono capaci di sviluppare, e da cui quindi possono immaginarsi sostituiti.

Anche qui, come già nel caso dei vincoli interni, noi introdurremo la considerazione di un vincolo ideale, la cui scelta ci è bensì suggerita dalla esperienza, ma che nell'esperienza non trova che una rispondenza di larga approssimazione, in quanto presuppone verificate due ipotesi che, come abbiamo già detto altra volta, non sono esattamente verificate in pratica mai: quella della indeformabilità dei materiali, e quella della assenza di attrito.

Sottintese dunque le solite riserve in ordine alla applicabilità di quel che diremo ai problemi naturali, noi ci limiteremo qui a supporre che i primi membri $f_1, f_2, .. f_k$ delle equazioni di condizione considerate al principio del precedente capitolo siano funzioni ciascuna delle sole tre coordinate di un particolare punto del sistema.

È evidente che, dette x, y, z le coordinate di un punto, imporre che debba essere

$$f(x, y, z) = 0$$

vuol dire imporre che quel punto appartenga alla superficie che questa equazione rappresenta nello spazio.

Gli spostamenti $\delta x, \delta y, \delta z$ che a quel punto si potranno attribuire saranno da considerarsi compatibili con un tal vincolo solo se giacenti sulla predetta superficie, o, fin che si tratta di spostamenti piccolissimi, sul relativo piano tangente, come è espresso dalla condizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

Ciò posto, se vogliamo renderci conto del modo con cui la superficie può reagire sul punto opponendosi a qualsiasi azione esterna che tenda a portare il punto fuori di essa, se vogliamo cioè passare dalla considerazione del vincolo, geometricamente concepito, a quella della reazione che esso sviluppa, noi possiamo facilmente farlo ragionando su di un caso particolare.

Scegliamo il più semplice di tutti i casi possibili: quello in cui sul sistema che si considera non agiscano che una forza sola ed un solo vincolo esterno: entrambi applicati ad un medesimo punto.

Siano

$$x \qquad y \qquad z$$

le coordinate di questo punto,

$$X \qquad Y \qquad Z$$

le componenti dell'unica forza, ed

$$f(x, y, z) = 0$$

l'equazione dell'unico vincolo.

Il principio dei lavori virtuali ci dice che per l'equilibrio occorre e basta che si abbia

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$$

per tutti gli spostamenti δx, δy, δz compatibili col vincolo imposto, cioè contenuti nella data superficie, epperò soddisfacenti all'equazione di condizione di cui si è parlato poc'anzi.

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trovano subito le tre equazioni

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

dalle quali eliminando λ si ricava la duplice relazione

$$\frac{X}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$$

Essa esprime notoriamente la condizione di perpendicolarità tra la forza di componenti

$$X \qquad Y \qquad Z$$

e la superficie di equazione

$$f(x, y, z) = 0$$

Quando questa condizione è verificata l'equilibrio sussiste, e

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z}$$

sono le componenti della reazione, eguale e contraria alla forza applicata, epperò essa pure perpendicolare alla superficie di vincolo.

Viceversa basta presupporre questa proprietà come caratteristica della reazione di vincolo — con che si viene semplicemente a tradurre nel caso specifico l'ipotesi generale dell'assenza di attrito — per potere, senza bisogno di scrivere alcuna formula, risolvere in modo completo il problema dell'equilibrio, vale a dire prevedere la condizione a cui, perchè l'equilibrio sia possibile, deve soddisfare la forza applicata, e determinare in funzione di questa la grandezza incognita della reazione.

Occorre appena aggiungere che se al medesimo punto sono imposti due vincoli — se cioè ad esso si impone di stare contemporaneamente su due diverse superficie, o ciò che fa lo stesso di appartenere alla linea secondo cui esse si intersecano — della reazione di vincolo sarà incognita non soltanto la grandezza ma anche la linea d'azione, sapendosi soltanto che essa deve stare nel piano normale alla linea.

Che se poi i vincoli imposti al punto fossero tre — se cioè esso dovesse appartenere contemporaneamente a tre diverse superficie, epperò ad esso spettasse una posizione fissa nello spazio in coincidenza con uno dei punti che le tre superficie hanno in comune — della reazione di vincolo non si conoscerà che il punto di applicazione.

***

Orbene incominciamo col considerare un sistema rigido avente un punto fisso. Se al triplice vincolo che così si viene a definire, si immagina sostituita la corrispondente reazione, o, ciò che fa lo stesso, le sue tre componenti X′ Y′ Z′ applicate nel punto di cui si tratta, il sistema può considerarsi come reso libero epperò si possono utilizzare le sei equazioni caratteristiche trovate per il caso generale per esprimere che sussiste equilibrio fra le forze applicate e la reazione incognita.

Si hanno così sei equazioni che si riducono alla forma:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{X} + X' = 0 & \mathcal{L} = 0 \\ \mathcal{Y} + Y' = 0 & \mathcal{M} = 0 \\ \mathcal{Z} + Z' = 0 & \mathcal{N} = 0 \end{array}$$

solo che si supponga di aver assunta l'origine degli assi coincidente col punto fisso.

La seconda terna, la quale non contiene incognite, esprime le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio: essa dice che deve essere nullo il momento delle forze applicate rispetto al punto fisso: che cioè dette forze devono potersi ridurre ad un'unica forza risultante passante pel punto.

La prima terna di equazioni serve invece a definire la reazione cercata.

***

Passiamo ora a supporre che di punti fissi ce ne siano due, O' ed O'', distanti d l'uno dall'altro.

Assumeremo uno dei punti, per esempio O', come origine (fig. 64), ed orienteremo gli assi per modo che uno di essi, per esempio z, passi per O'', le cui coordinate risulteranno così eguali a $0, 0, d$.

Dette X' Y' Z' ed X'' Y'' Z'' le componenti delle reazioni di vincolo rispettivamente applicate in O' ed in O'', le sei equazioni generali per l'equilibrio divengono

$$\begin{array}{ll} \mathcal{X} + X' + X'' = 0 & \mathcal{L} - d \,.\, Y'' = 0 \\ \mathcal{Y} + Y' + Y'' = 0 & \mathcal{M} + d \,.\, X'' = 0 \\ \mathcal{Z} + Z' + Z'' = 0 & \mathcal{N} = 0. \end{array}$$

La sola equazione che non contenga reazioni incognite è l'ultima: essa esprime la condizione che il momento di tutte le forze applicate per rapporto all'asse z deve essere nullo.

Le altre due equazioni dei momenti determinano X'' ed Y'': note le quali si può servirsi delle corrispondenti equazioni di proiezione per calcolare X' ed Y'.

Fatto ciò si può rendere verificato l'intiero sistema di sei equazioni con infinite coppie di valori di Z' e Z'': basta infatti che la somma $Z' + Z''$ soddisfi alla rimanente equazione di proiezione.

Vi è dunque nella soluzione fornita dalle equazioni generali per l'equilibrio dei sistemi rigidi una indeterminazione la quale certamente non sussiste nel problema fisico: dal punto di vista fisico infatti se l'equilibrio si verifica esso non può verificarsi che in un unico modo: e tutti gli elementi caratteristici di esso non possono che essere univocamente determinati.

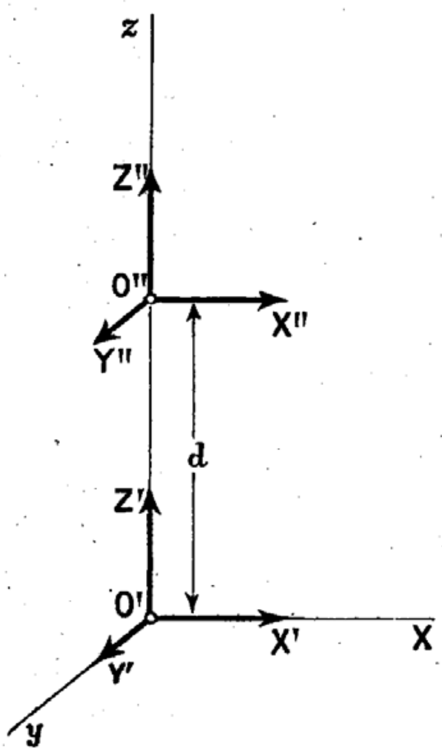

Fig. 64.

Noi avremo parecchie altre occasioni di imbatterci in situazioni di questo genere, in cui cioè la statica dei sistemi rigidi si rivela insufficiente a determinare la soluzione di un problema per se stesso perfettamente determinato: ma pur senza volere anticipare la teoria della indeterminazione statica (che tratteremo di proposito a suo tempo) diciamo fin d'ora che la cosa si verifica dipendentemente dal fatto che noi nell'impostare la trattazione abbiamo voluto prescindere dalle deformazioni che nel sistema naturale si producono per effetto delle forze.

Noi abbiamo giustificata questa omissione, e la conseguente introduzione di quel corpo puramente ideale che si chiama un sistema rigido, colla opportunità di tentare una prima approssimazione: e non possiamo non rilevare che questo modo di procedere ci si va mostrando prezioso in quanto ci permette a volte di individuare la soluzione, come ci è accaduto nel caso di un solo punto fisso, altre volte di stabilire delle proprietà di assieme, come è nel caso presente la condizione di nullità del momento delle forze applicate per rapporto alla congiungente dei due punti fissi.

Ma non dobbiamo meravigliarci se non riusciamo per questa via a rispecchiare in tutto e per tutto le circostanze di fatto;

in particolare se non riusciamo per ora a cogliere la effettiva distribuzione delle forze punto per punto.

Diciamo fin d'ora che al risultato completo arriveremo più innanzi in un secondo grado del nostro studio, allorquando tenteremo di proposito l'analisi delle condizioni statiche dei sistemi deformabili.

Del resto, pur rimanendo nell'ambito della presente trattazione particolarissima, si può con vantaggio rendersi conto della importanza dei risultati conseguiti riferendosi a qualche caso concreto che rispecchia abbastanza bene, se pur grossolanamente, l'attuale problema.

Basta pensare ad una porta sostenuta da due cardini: se entrambi i cardini sono congegnati in modo da poter reagire tanto normalmente all'asse (verticale) di rotazione come in direzione dell'asse stesso, la nostra trattazione lascia quest'ultima componente delle lor reazioni indeterminata, limitandosi a stabilire che la somma delle due componenti analoghe deve eguagliare la corrispondente componente delle forze applicate: per esempio il peso della porta.

Ed è assai facile capire come la effettiva ripartizione del peso stesso sui due cardini possa venir influenzata da deformazioni anche piccolissime del sistema: è per esempio facile capire come bastino piccolissimi avvicinamenti od allontanamenti dei due cardini, quali possono prodursi, per esempio, in dipendenza di ordinarie variazioni di temperatura, per rendere sotto questo punto di vista inattivo uno di essi, e per scaricare così sul rimanente tutto il peso in questione.

Non di rado si ha interesse anche pratico ad eliminare siffatte indeterminazioni: e vi si riesce molto facilmente: per esempio nel caso della porta basta munirla di un solo cardine di spinta (capace cioè di reagire anche assialmente) e costruire l'altro come un semplice perno passante in un cuscinetto cilindrico.

Questo perno può allora, mediante piccoli scorrimenti entro il suo cuscinetto, secondare le eventuali piccole deformazioni del sistema: si può dire che uno solo dei due punti O' O'' è ora fisso: l'altro è scorrevole lungo una linea (asse del cuscinetto), e in quanto questa possa considerarsi priva di attrito noi siamo autorizzati a ritenere la relativa reazione contenuta nel piano normale.

Supposto per precisar le idee che O' sia fisso e che O'' sia vincolato a muoversi senza attrito sull'asse z, si ha subito la condizione supplementare

$$Z'' = 0$$

con che anche Z' resta completamente determinato.

***

Poichè siamo in argomento chiediamoci anche quali diverrebbero le condizioni di equilibrio qualora non solo uno ma entrambi i punti O' O'' fossero scorrevoli senza attrito lungo l'asse z: nel qual caso si usa dire che il sistema è dotato di un asse liberamente scorrevole su se stesso.

È evidente che in questa ipotesi bisogna porre:

$$Z' = Z'' = 0$$

Delle sei equazioni generali due divengono allora indipendenti da ogni incognita e sono

$$\mathscr{Z} = 0 \qquad \mathscr{N} = 0$$

le altre quattro determinano completamente le quattro componenti X', X'', Y', Y'' delle reazioni.

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un solido con asse scorrevole su se stesso è dunque che si annullino la componente, secondo l'asse, della risultante delle forze applicate ed il momento delle stesse forze rispetto allo stesso asse.

Notiamo, fra parentesi, che la prima condizione $\mathscr{Z} = 0$, l'annullarsi cioè della componente secondo l'asse della risultante delle forze applicate, riesce certamente verificata quando le singole forze giacciono tutte in piani normali all'asse: in particolare quando giacciono tutte in un medesimo piano normale all'asse.

È il caso in cui si trova praticamente il giogo di una bilancia: l'asse z della nostra trattazione rappresenta l'asse di sospensione o asse dei coltelli.

Possiamo anche dire addirittura che è il caso della leva e che nella equazione $\mathscr{N} = 0$ che qui resta l'unica determinante dell'equilibrio, noi veniamo a ritrovare sinteticamente compendiato tutto quell'insieme di nozioni che, proprio a proposito del problema della leva, abbiamo a suo tempo introdotto e discusso.

Ma l'edificio che con metodo rigorosamente scientifico siamo venuti costruendo su quelle nozioni elementari, ci permette ora di vederne la portata smisuratamente ampliata al di là dei limiti di quel problema speciale: ci permette in particolare di superare d'un tratto tutte quelle distinzioni che in meccanica elementare si sogliono fare fra leva rettilinea e leva angolare, tra leva di prima specie e leva di seconda o di terza specie; ci permette ancora di considerare il problema della leva come affatto identico a quello della puleggia, del verricello, e di quante altre macchine semplici gli antichi erano stati indotti a distinguere.

***

E veniamo finalmente al caso di un sistema dotato di punti vincolati a rimanere sopra date superficie. L'esempio più semplice e tipico è quello di un solido appoggiato su di un piano orizzontale in corrispondenza di un certo numero di punti arbitrarii $O'O''O'''$...

Assumiamo il piano di appoggio come piano coordinato xy e l'asse z verticale rivolto verso l'alto. Ed indichiamo rispettivamente con $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$,... le coordinate dei punti di contatto, e con Z', Z'', Z''',... le reazioni, certamente verticali e rivolte esse pure verso l'alto (epperò positive), che essi sviluppano.

Le sei equazioni generali per l'equilibrio divengono:

$$\mathscr{X}=0 \qquad \mathscr{L}+y'.Z'+y''.Z''+y'''.Z'''+\ldots=0$$
$$\mathscr{Y}=0 \qquad \mathscr{M}-x'.Z'-x''.Z''-x'''.Z'''-\ldots=0$$
$$\mathscr{Z}+Z'+Z''+Z'''+\ldots=0 \qquad \mathscr{N}=0$$

Le prime due equazioni di proiezione e l'ultima equazione dei momenti ci dicono che il sistema delle forze applicate deve, perchè l'equilibrio sia possibile, potersi ridurre ad un'unica risultante verticale.

Inoltre, poichè per la supposta unilateralità del vincolo le Z', Z'', Z'''... non possono mai divenire negative, dovrà necessariamente essere negativa la $\mathscr{Z}$: il che è quanto dire che quella risultante dovrà riuscir sempre rivolta verso il basso.

Queste condizioni del resto sono certamente necessarie, ma non è affatto detto che siano sufficienti.

Consideriamo infatti qualche caso particolare.

Supponiamo in primo luogo che il corpo dato abbia col piano di appoggio un solo punto di contatto. Basta allora immaginar trasportata l'origine in tale punto perchè quelle tra le equazioni scritte che nel caso generale dipendono dalle reazioni incognite divengano

$$\mathscr{Z} + Z' = 0 \qquad \mathscr{L} = 0 \qquad \mathscr{M} = 0$$

È dunque necessario che la risultante delle forze applicate passi per il punto di contatto; la reazione di questo sarà ad essa eguale e contraria.

Passiamo in secondo luogo a supporre che i punti di contatto siano due. Assumendo il punto O′ per origine degli assi e la retta O′ O″ per asse delle x, si trova

$$\mathscr{Z} + Z' + Z'' = 0 \qquad \mathscr{L} = 0 \qquad \mathscr{M} - x'' . Z'' = 0$$

La risultante delle forze applicate deve dunque incontrare il piano di appoggio in un punto della retta O′ O″: è facile dimostrare anzi che questo punto deve appartenere al segmento finito O′ O″. Detta infatti x la sua ascissa, e posto

$$\mathscr{M} = - x . \mathscr{Z}$$

si ricava, dall'ultima delle equazioni trovate,

$$x . \mathscr{Z} + x'' . Z'' = 0$$

Ora questa eguaglianza deve riuscir verificata per $\mathscr{Z}$ sempre negativo e, in valore assoluto, maggiore o almeno eguale a Z″: per il che occorre e basta che si abbia:

$$0 < x < x''$$

come ci eravamo proposti di dimostrare.

Veniamo ora al caso in cui i punti di contatto siano tre.

Le tre equazioni che contengono Z′, Z″, Z‴ ne individuano, in generale, in modo unico e ben determinato i valori: dicendo " in generale „ intendiamo escludere quei casi singolari in cui ovviamente si cadrebbe qualora i tre punti fossero allineati.

L'unica condizione che quelle equazioni implicano ancora nei riguardi delle forze applicate è quella della positività dei valori risolventi delle incognite. Non sarebbe difficile mostrare mediante un'analisi diretta del problema che questa condizione è verificata sempre e soltanto quando il punto d'incontro della risultante delle forze applicate cade nell'interno del triangolo che ha per vertici i tre punti di contatto. Ma preferiamo affrontare senz'altro il problema nel caso più generale in cui il numero dei punti di appoggio è comunque grande.

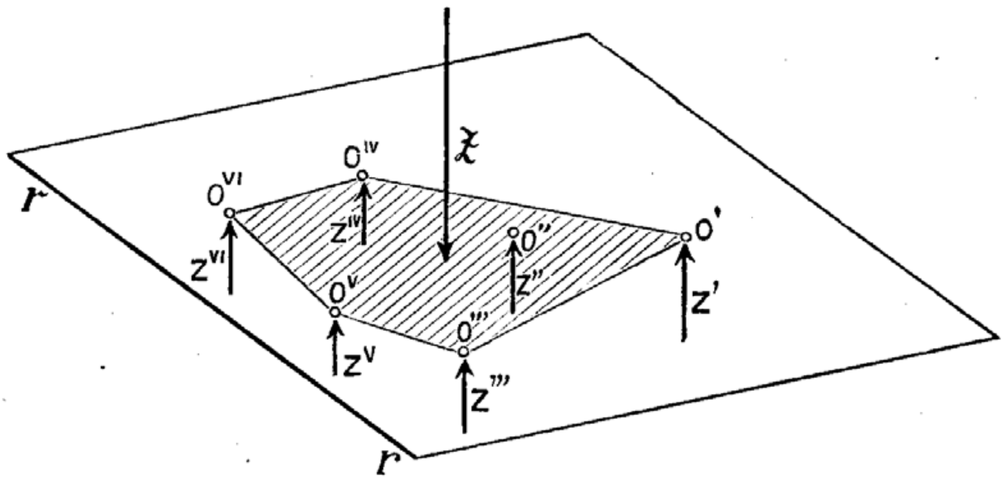

Fig. 65.

Considereremo a tal fine una retta generica r del piano di appoggio, rispetto alla quale tutti i punti di contatto restino da una medesima parte (fig. 65). Per rapporto a questa retta, che nulla ci impedirebbe d'altronde di assumere, per esempio, come asse delle x, deve riuscir identicamente nulla la somma dei momenti delle forze applicate e delle reazioni d'appoggio.

Ma le reazioni, essendo tutte dirette verso l'alto e situate da una medesima banda della retta considerata, daranno luogo a momenti tutti del medesimo segno. Dovrà dunque la risultante delle forze applicate dar origine ad un momento di segno contrario: e poichè essa è diretta verso il basso, sarà d'uopo che essa si trovi, rispetto alla solita retta, dalla medesima parte delle altre forze già considerate.

Ora dire che questa condizione di cose deve, per l'equilibrio, verificarsi per qualsiasi retta del piano d'appoggio rispetto a cui tutti i punti di contatto vengano a trovarsi da una parte, vuol dire che la risultante delle forze applicate deve incontrare il piano stesso in un punto interno al *perimetro di appoggio* cioè a quel poligono convesso che ha i suoi vertici in un certo numero di punti di appoggio ed è tale che tutti i rimanenti punti di appoggio restano ad esso interni.

Eccoci così giunti, anche nel caso più generale in cui il numero degli appoggi è comunque grande, ad un complesso di condizioni grazie alle quali, dato il sistema delle forze applicate ad un solido, noi siamo in grado di risolvere il problema dell'equilibrio nel senso che sappiamo stabilire se l'equilibrio sussiste o no.

Fino a che gli appoggi non sono più di tre, noi possiamo anche calcolare i valori delle reazioni di ciascuno di essi: quando il numero degli appoggi è superiore a tre, le tre equazioni trovate tra le reazioni incognite non bastano evidentemente più a determinarle: ci si presenta anche qui una indeterminazione statica del tipo stesso di quella che abbiamo già incontrata in un caso precedente, e che come quella deve venir messa in relazione colla esistenza di deformazioni del solido da cui la presente trattazione prescinde. È d'altronde notorio che quando il numero degli appoggi di un corpo supera tre dislivelli anche piccoli, quali possono esser dovuti a difetti di costruzione o a deformazioni successive, possono non soltanto influire sui valori delle singole reazioni, ma aver persino l'effetto di mettere qualcuno degli appoggi fuori servizio.