I.

LA STATICA ANALITICA SECONDO LAGRANGE

Consideriamo un sistema costituito da n punti materiali, le cui coordinate rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali siano rispettivamente

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & z_n \end{matrix}$$

Vogliamo supporre il sistema sollecitato e vincolato nel modo il più generale.

Perciò a ciascuno dei punti immagineremo applicate tre forze, dirette parallelamente agli assi, che designeremo rispettivamente con

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_n & Y_n & Z_n \end{matrix}$$

Ammetteremo inoltre che quegli stessi punti siano soggetti ad un certo numero di vincoli bilaterali senza attrito, che riterremo rappresentati da k equazioni di condizione

$$\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= 0 \\ &\cdots \\ f_k &= 0 \end{aligned}$$

$f_1, f_2, \dots f_k$ essendo funzioni delle $3n$ coordinate dei punti del sistema, affatto arbitrarie, purchè dotate di derivate prime ovunque finite e continue.

Ci limiteremo per ora a supporre $k < 3n$ per evitare che le posizioni di tutti i punti del sistema restino intieramente definite dalle equazioni di vincolo testè scritte, nel qual caso nessun cambiamento di configurazione potrebbe più, compatibilmente coi vincoli, venire impresso.

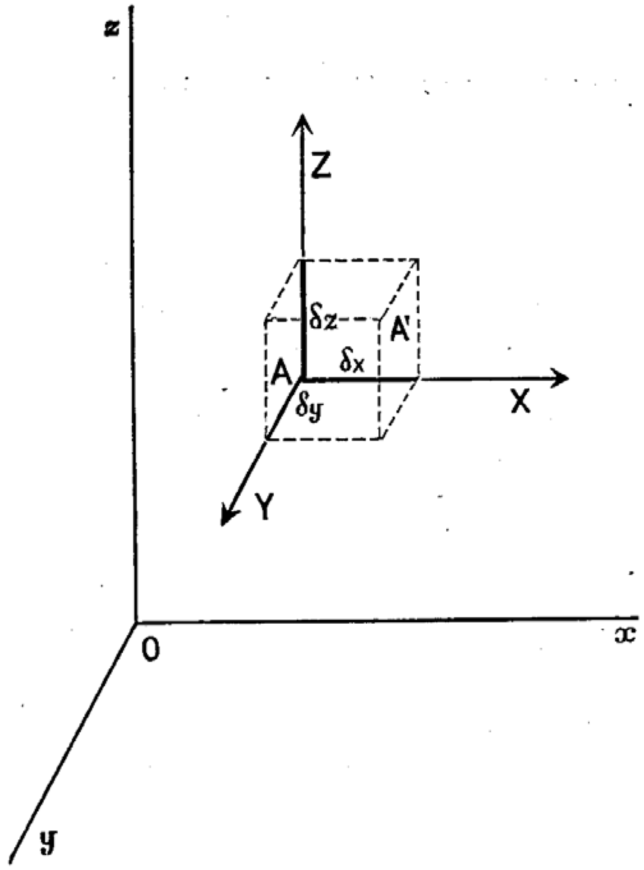

Fig. 42.

Secondo il principio dei lavori virtuali, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un siffatto sistema è che la somma dei lavori delle forze ad esso applicate sia nulla per tutti i sistemi di spostamenti virtuali, cioè piccolissimi e compatibili coi vincoli.

Designate pertanto con

$$\begin{array}{ccc} \delta x_1 & \delta y_1 & \delta z_1 \\ \delta x_2 & \delta y_2 & \delta z_2 \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \delta x_n & \delta y_n & \delta z_n \end{array}$$

le componenti secondo i soliti assi di uno qualunque tra gli accennati sistemi di spostamenti virtuali, e tenuto conto che ciascuna di queste componenti rappresenta precisamente lo spostamento del punto di applicazione della forza omologa, nella sua stessa direzione (fig. 42), la condizione sopra enunciata si potrà esprimere coll'equazione generale

$$\Sigma\,(\mathrm{X}\,.\,\delta x + \mathrm{Y}\,.\,\delta y + \mathrm{Z}\,.\,\delta z) = 0.$$

Per esprimere che gli spostamenti che in questa equazione compaiono sono effettivamente compatibili coi vincoli imposti, basta evidentemente scrivere che le equazioni di vincolo continuano ad essere verificate anche quando questi spostamenti si immaginino effettuati: cioè anche quando ciascun punto A di coordinate

$$x \quad y \quad z$$

si immagini spostato nella posizione, vicinissima, A′ di coordinate

$$x + \delta x \qquad y + \delta y \qquad z + \delta z.$$

Per ciascuno dei k vincoli dovrà dunque aversi, non soltanto

$$f(x_1, y_1, \ldots z_n) = 0$$

ma anche

$$f(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \ldots z_n + \delta z_n) = 0.$$

Ora, supposto applicabile lo sviluppo di Taylor, e tenuto conto della postulata piccolezza degli spostamenti, si ha, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$f(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, \ldots z_n + \delta z_n) = f(x_1, y_1, \ldots z_n) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n.$$

Alle k equazioni di vincolo vengono così a corrispondere k equazioni di condizione tra le componenti di spostamento

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} \delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

Da queste k equazioni di condizione si potranno sempre ricavare i valori di k delle quantità

$$\delta x_1, \delta y_1, \ldots \delta z_n$$

in funzione delle rimanenti $3n - k$. Se fatto ciò se ne sostituiscono i valori nella equazione dei lavori virtuali, si ottiene una relazione il cui primo membro è una funzione lineare ed omogenea delle $3n - k$ quantità che sono rimaste completamente arbitrarie.

Perchè l'equazione dei lavori virtuali sia verificata per qualsiasi sistema di spostamenti compatibili coi vincoli — le cui componenti cioè soddisfino alle k equazioni di condizione trovate — occorre e basta che il primo membro testè trovato si annulli qualunque siano i valori che si attribuiscono alle $3n-k$ variabili arbitrarie: per il che si richiede che i coefficienti di queste variabili siano tutti identicamente nulli.

La relazione scritta si scinde così in $3n-k$ equazioni distinte, le quali non contengono più le componenti degli spostamenti, ma soltanto le forze e le coordinate dei punti a cui esse sono applicate.

Aggiungendo queste $3n-k$ equazioni alle k equazioni dei vincoli si ha un sistema di $3n$ equazioni tra le $3n$ coordinate

$$x_1, \quad y_1, \ldots z_n$$

A ciascun sistema di valori risolvente corrisponderà una configurazione di equilibrio.

***

Si deve a Lagrange un procedimento di eliminazione delle componenti di spostamento, e quindi di risoluzione della equazione generale dell'equilibrio, che è particolarmente elegante ed espressivo. Esso è conosciuto sotto il nome di *metodo dei moltiplicatori.*

Ecco brevemente di che si tratta.

Si incomincia coll'aggiungere al primo membro dell'equazione dei lavori virtuali i primi membri delle k equazioni a cui debbono soddisfare le componenti degli spostamenti, moltiplicati rispettivamente per certi fattori indeterminati

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots \lambda_k.$$

Non v'è dubbio che la somma dovrà alla sua volta esser nulla.

Allora si approfitta della indeterminazione dei moltiplicatori per annullare i coefficienti di k delle variabili

$$\delta x_1, \quad \delta y_1, \ldots \delta z_n$$

le quali si trovano così eliminate: ma perchè ciò che resta si annulli per valori qualunque delle rimanenti $3n-k$ variabili, bisogna che anche gli altri $3n - k$ coefficienti siano identicamente nulli.

In conclusione si è condotti a scrivere $3n$ equazioni del tipo

$$X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x} = 0$$

$$Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y} = 0$$

$$Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z} = 0.$$

Queste $3n$ equazioni, unite alle k equazioni di vincolo formano un sistema di $3n + k$ equazioni tra le $3n$ coordinate ed i k moltiplicatori λ.

Il procedimento dei moltiplicatori di Lagrange è eminentemente simmetrico e questo è già un gran pregio: esso ne ha anche un altro: quello di far conoscere le reazioni dei vincoli.

Per constatarlo basta immaginare momentaneamente soppresso il vincolo $f_1 = 0$ e nel medesimo tempo applicata a ciascun punto del sistema, di coordinate

$$x \quad y \quad z$$

una forza le cui componenti siano

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

È chiaro che il sistema delle equazioni risolventi testè trovato continua a sussistere senza modificazioni: l' equilibrio dunque non è stato turbato.

Le forze che noi abbiamo immaginato di introdurre all'atto in cui sopprimevamo il vincolo $f_1 = 0$ misurano dunque le rispettive reazioni.

Lo stesso ragionamento si può senz'altro applicare a tutti i vincoli a cui il sistema si è supposto soggetto.

***

Il procedimento di Lagrange ha però anche un grande difetto: ed è quello di dar luogo a calcoli molto lunghi e laboriosi. Perciò, quando la conoscenza delle reazioni di vincolo non interessa, si preferisce in pratica ricorrere ad un altro procedimento di eliminazione che è simmetrico come quello di Lagrange, ed è di applicazione tanto più rapida quanto più piccolo è il numero dei gradi di libertà del sistema: esso prende il nome di *metodo dei parametri indipendenti.*

Ecco in che cosa consiste.

Sia

$$r = 3n - k$$

il numero delle coordinate indipendenti da cui può farsi dipendere la configurazione di un sistema di n punti soggetti a k equazioni di vincolo: si potrà sempre, e in infiniti modi, esprimere le $3n$ coordinate in funzione di r parametri

$$q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_r.$$

Operiamo una simile sostituzione nell'equazione dei lavori virtuali: se si tiene presente che

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_r}\delta q_r$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_r}\delta q_r$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_r}\delta q_r$$

si comprende subito che il primo membro della equazione si potrà sempre ridurre alla somma di r termini contenenti linearmente le r variazioni

$$\delta q_1, \ \delta q_2, \dots \delta q_r .$$

Ora perchè questa somma si annulli per valori qualunque di dette variazioni, bisognerà al solito imporre che sian nulli gli r coefficienti: si arriva così ad un sistema di r equazioni

$$\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = 0$$

$$\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}\right) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r} + Y\frac{\partial y}{\partial q_r} + Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right) = 0.$$

Esse determineranno i valori degli r parametri indipendenti: in funzione dei quali si potranno poi, secondo le ipotesi fatte, calcolare le $3n$ coordinate cercate.

***

Vi è finalmente un ultimo metodo che prende il nome di *metodo degli spostamenti* perchè consiste nel considerare gli spostamenti del sistema in loro stessi — anzichè supporli, come abbiam fatto finora, astrattamente individuati dalle equazioni di condizione — e nell'applicare loro direttamente l'equazione dei lavori virtuali.

Naturalmente bisogna considerare tanti spostamenti virtuali del sistema, fra loro indipendenti, quante sono le incognite, vale a dire quante sono le variabili indipendenti a cui può riferirsi la sua configurazione.

L'applicabilità del metodo dipende dunque essenzialmente dalla possibilità di fissare *a priori*, in base al semplice esame dei vincoli, la natura e le caratteristiche degli spostamenti che essi consentono.

Ma questa che, in linea teorica, potrebbe sembrare una grave difficoltà, tale non è poi nei singoli problemi concreti che più frequentemente si propongono al nostro esame.

Poichè anzi, nella maggior parte dei casi, è proprio delle possibilità di movimento che essi consentono, che ci si serve per definire i vincoli imposti al sistema; e la loro stessa definizione è quindi pienamente sufficiente a caratterizzare gli spostamenti con essi vincoli compatibili.

Nell'àmbito di queste compatibilità riesce allora assai facile non solo scegliere il numero conveniente di spostamenti cui applicare il principio dei lavori virtuali, ma, quel che in pratica importa assai, sceglierli in modo che le relative equazioni riescano il più possibile semplici ed espressive.

Gli esempî che seguono — scelti, come sono, tra i più semplici, ma, nel tempo stesso, tra i più interessanti dal punto di vista delle applicazioni — serviranno, meglio di un lungo discorso, a chiarire la cosa ed a convincere dei grandi vantaggi che il metodo offre a chi sappia accortamente valersene.

Applicazione al caso particolare dei sistemi rigidi.

Un sistema materiale si dice *rigido* quando i vincoli cui i suoi punti sono soggetti valgono ad assicurare la invariabilità delle loro mutue distanze.

Conviene tener presente che questa definizione non trova esatta rispondenza in nessun sistema materiale naturale. Tutti i corpi naturali — lo abbiamo già avvertito nelle nostre premesse, ed avremo occasione di ripeterlo altre volte — sotto l'azione delle forze ad essi applicate si deformano: le distanze mutue dei loro punti si alterano. Però nella maggior parte di quei corpi naturali, che noi designiamo correntemente col nome di solidi, queste deformazioni si mantengono generalmente tanto piccole (almeno fino a che l'intensità delle forze applicate non supera certi limiti) da suggerire l'idea che si possa, in via di prima approssimazione, prescindere da esse.

Accettiamo dunque la definizione di corpo rigido così come l'abbiamo enunciata, riservandoci di indagare a tempo e luogo se e fino a qual punto siano ad essa riferibili i corpi naturali al cui studio noi in definitiva miriamo.

E, nello intento di principiare sempre dai casi più semplici, incominciamo col supporre che — oltre ai vincoli *interni* strettamente indispensabili per assicurare la rigidità — nessun altro vincolo *esterno* limiti comunque la mobilità del sistema.

Semplici considerazioni di geometria elementare bastano allora a convincerci che la sua posizione nello spazio è evidentemente determinata quando si conoscono le posizioni di tre suoi punti generici (cioè non allineati): similmente un suo movimento qualunque resta completamente definito quando si dànno gli spostamenti di quei medesimi tre punti.

Ciò si può fare ovviamente dando le tre componenti di ciascuno di quegli spostamenti secondo tre assi coordinati: in tutto nove quantità: ma queste nove quantità non possono però darsi tutte ad arbitrio: infatti le tre distanze dei punti presi a due a due devono, per la rigidità del sistema, restare invariate: di qui tre condizioni: le variabili indipendenti sono dunque ridotte a sei.

Ora non v'è nessuna difficoltà a trovare sei equazioni che le determinino: basta applicare l'equazione dei lavori virtuali a sei diversi spostamenti: e ciò si può evidentemente fare in modi differenti in relazione ai differenti modi con cui il sistema può spostarsi nello spazio.

Fra tutti questi modi il più semplice è quello di immaginare impresse al corpo tre traslazioni infinitesime parallele ai tre assi coordinati, e tre rotazioni pure infinitesime intorno ai medesimi assi.

Supponiamo adunque impressa una traslazione infinitesima parallela all'asse x. Tutte le coordinate x aumenteranno di una quantità comune, che indicheremo con dx, mentre le y e le z rimarranno immutate: si dovrà dunque porre nella equazione dei lavori virtuali:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n = dx$$
$$\delta y_1 = \delta y_2 = \ldots = \delta y_n = 0$$
$$\delta z_1 = \delta z_2 = \ldots = \delta z_n = 0$$

Essa allora diviene

$$\Sigma X . dx = 0$$

ma dx è arbitrario, quindi in definitiva è ΣX che deve essere eguale a zero. D'altra parte si arriva a conclusioni perfettamente analoghe se si operano le traslazioni secondo y e secondo z. In definitiva si hanno le tre equazioni:

$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma Z = 0.$$

Facciamo ora ruotare il sistema intorno all'asse x di un angolo infinitesimo $d\varphi$: le x rimarranno immutate, quindi

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots = \delta x_n = 0$$

Quanto alle y ed alle z poniamo (fig. 43)

$$y = \varrho \cos \varphi$$
$$z = \varrho \operatorname{sen} \varphi$$

essendo ϱ la distanza del punto generico dall'asse x e φ l'angolo che la perpendicolare abbassata da esso su tale asse fa inizialmente col piano coordinato xy.

Siccome durante la rotazione del sistema intorno all'asse x la distanza ϱ resta immutata si ha subito

$$\delta y = -\varrho \operatorname{sen} \varphi d\varphi = -z d\varphi$$
$$\delta z = +\varrho \cos \varphi d\varphi = +y d\varphi$$

Così l'equazione dei lavori virtuali diviene

$$\Sigma (yZ - zY) . d\varphi = 0$$

ma al solito $d\varphi$ è arbitrario, quindi può essere soppresso. D'altra parte i risultati sono analoghi se si operano le rotazioni attorno agli altri due assi. Si possono dunque scrivere le tre equazioni

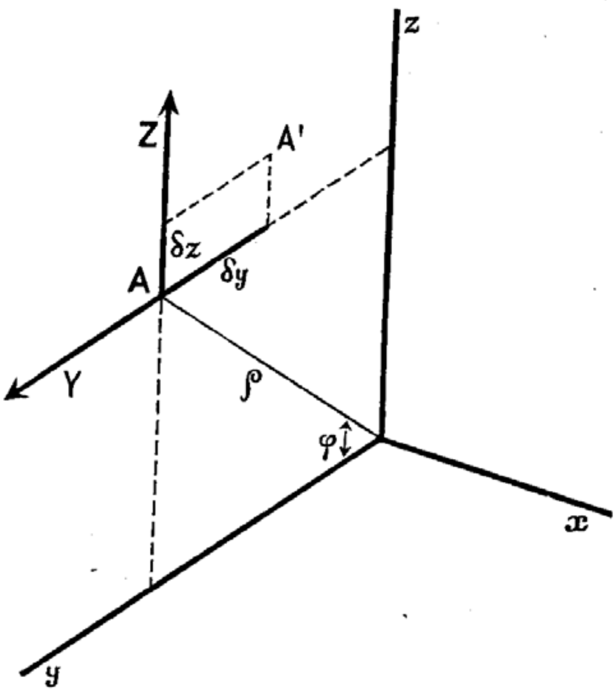

Fig. 43.

$$\Sigma (y Z - z Y) = 0$$
$$\Sigma (z X - x Z) = 0$$
$$\Sigma (x Y - y X) = 0$$

Delle due terne di equazioni così ottenute noi avremo presto occasione di occuparci diffusamente: ci riserviamo pertanto di discuterne la portata, di segnalarne le applicazioni, di mettere in evidenza il significato fisico di ciascuna di esse.

Qui vogliamo limitarci a considerare la sestupla nel suo complesso, per rilevare come essa, mentre costituisce la condizione *necessaria e sufficiente* per l'equilibrio di quello che abbiamo convenuto di chiamare il corpo rigido, esprima una condizione *necessaria sebbene non sufficiente* per l'equilibrio di un sistema materiale qualunque.

*
* *

Dal principio dei lavori virtuali si deducono infatti facilmente i seguenti importantissimi corollarii:

Quando un sistema è in equilibrio, si può, senza turbare questo equilibrio:

1) aggiungere un gruppo di forze che sarebbe in equilibrio se esistesse da solo;

2) sostituire un qualunque vincolo con un altro qualunque purchè lasci sussistere i medesimi spostamenti virtuali;

3) introdurre nuovi vincoli quali e quanti si vogliono.

Nel primo caso infatti l'equazione dei lavori virtuali, soddisfatta per ipotesi dai due sistemi di forze, non potrà che esserlo anche quando essi coesistono: nel secondo la stessa equazione continua ad essere applicabile senza mutamenti di sorta: nel terzo invece si vengono a limitare le possibilità di movimento, epperò si viene a restringere il campo degli spostamenti virtuali; tuttavia, siccome gli spostamenti virtuali che restano possibili sono tutti certamente compatibili coi vincoli primitivi, non vi è dubbio che per essi continuerà a rimanere nullo il lavoro virtuale delle forze applicate.

Per riconoscere l'importanza delle prime due proposizioni basta ricordare l'uso che di esse, più o meno dichiaratamente, hanno fatto gli antichi.

Pensiamo, per ciò che si riferisce alla prima proposizione, ai ragionamenti di Archimede e dei suoi continuatori, tenendo naturalmente presente che tutto ciò che si dice dell'*aggiunta* di un gruppo di forze vale anche per la sua eventuale *soppressione*, potendo questa sempre ottenersi sotto forma di aggiunta di un gruppo di forze eguali e contrarie alle prime.

Pensiamo ancora alla importanza cui la seconda proposizione è assurta nel pensiero di Stevin e di Galileo.

Delle tre proposizioni la più interessante è però indubbiamente la terza, in quanto ci permette di asserire che, se un sistema materiale qualunque è in equilibrio, esso non cesserà di esserlo se lo si suppone irrigidito, vale a dire se si vincolano idealmente i suoi punti a mantenere invariate le loro mutue distanze.

Ciò vuol dire che le forze applicate ad un sistema materiale in equilibrio devono sempre soddisfare alle sei equazioni trovate nel caso dei sistemi rigidi. S'intende che esse non saranno più, in generale, sufficienti: ma il fatto solo che esse siano necessarie conferisce ad esse un'importanza nuova, ed imprime alle equazioni dell'equilibrio del sistema rigido un nuovo interesse.

Noi avevamo infatti giustificata la introduzione del concetto di sistema rigido soltanto come una prima approssimazione suggeritaci dalla osservazione dei sistemi naturali: ora possiamo concludere che i risultati a cui siamo giunti non sono soltanto più o meno approssimati: sono esatti anche quando, mancando la rigidità, non sono completi.

Per completarli noi dovremo bensì prendere in considerazione le effettive condizioni di deformabilità dei sistemi naturali: ma una cosa possiamo fin d'ora prevedere: ed è che il compito della statica dei sistemi deformabili, di cui ci occuperemo altrove, non sarà quello di correggere, ma soltanto di completare i risultati acquisiti in quella che d'or innanzi chiameremo, per intenderci, la *statica dei sistemi rigidi.*