
IX.

Il secondo principio di reciprocità.

Un teorema analogo a quello di Betti, e che permette di introdurre nello studio degli sforzi interni quegli stessi metodi e quelle medesime semplificazioni che il teorema di Betti rende possibili nello studio delle deformazioni, si può stabilire se si riprendono in esame quelle variazioni di configurazione non congruenti di cui ci siamo già occupati quando abbiamo dimostrato il teorema di Menabrea.

Ed ecco come.

Nella travatura reticolare data — che supporremo in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne F — scegliamo ad arbitrio alcune aste, in numero di i ; in ciascuna di esse assumiamo, pure ad arbitrio, una sezione trasversale, in corrispondenza della quale immagineremo praticato un taglio.

È evidente che il primitivo stato di equilibrio della travatura si può mantenere, dopo siffatta operazione, immutato solo a condizione che a ciascuna faccia di ciascun taglio si immaginino applicate delle forze equipollenti a quelle che, attraverso la relativa sezione, si trasmettevano inizialmente nella travatura data.

Nei riguardi della travatura tagliata queste forze sono da riguardarsi come delle vere e proprie forze esterne, a due a due eguali e contrarie, che noi, continuando a valerci dei simboli abituali, denoteremo ordinatamente con

$$S_1, S_2, \dots, S_i$$

Prendiamo ora in considerazione tutte quelle variazioni di configurazione della travatura che con siffatti tagli si sono rese possibili; e precisamente immaginiamo le due faccie del taglio

praticato in una data asta costrette a subire uno spostamento relativo piccolissimo, e del resto affatto arbitrario, la cui proiezione sulla direzione dell'asse dell'asta — proiezione che notoriamente rappresenta la variazione di lunghezza impressa all'asta — denoteremo con s considerandola come positiva se lo spostamento impresso tende ad allontanare le due faccie del taglio (e quindi a determinare un incremento della lunghezza dell'asta), negativa nel caso contrario.

Se, sempre nell'intento di uniformarci alle notazioni solite, indichiamo con f lo spostamento che il nodo generico a cui è applicata la forza esterna F subirebbe, nella direzione della F stessa, in occasione di una tale ipotetica variazione di configurazione della travatura, il lavoro complessivo delle forze applicate alla travatura tagliata si può senz'altro esprimere sotto la forma

$$\Sigma F f - \Sigma S s$$

In omaggio al principio dei lavori virtuali questo lavoro deve riuscir identicamente eguale alla variazione prima dell'energia potenziale elastica, o, ciò che fa lo stesso, del lavoro di deformazione della travatura.

Ora, a seconda del numero i delle aste prese in considerazione e della funzione che esse esercitavano nella travatura data, questa può comportarsi in due modi ben distinti.

Può darsi infatti che dopo praticati quei certi i tagli la configurazione della travatura abbia cessato di essere definita in funzione delle lunghezze delle aste rimaste in funzione, per modo che gli spostamenti relativi delle faccie dei varî tagli si possano, nella travatura tagliata, realizzare a mezzo di semplici moti rigidi delle singole parti (aste o gruppi di aste) che la compongono.

Può darsi invece che il numero e la funzione delle aste che rimangono integre, dopo praticati tutti quei tagli, siano tali da bastare a definire, in funzione delle lunghezze delle aste stesse, la configurazione della travatura; in tal caso i voluti spostamenti relativi delle faccie dei varî tagli non potranno attuarsi se non attraverso una vera e propria deformazione elastica di tutte o di parte delle aste che costituiscono la travatura.

Nel primo caso è ben evidente che il lavoro di deformazione non subisce variazione di sorta.

Esso varia invece nell'altro caso. Ma, per rapporto alla travatura data (non tagliata), la variazione di configurazione da noi definita è evidentemente da classificarsi tra le deformazioni equilibrate ma non congruenti. La variazione prima del lavoro di deformazione deve dunque, per il teorema di Menabrea, essere in ogni caso identicamente nulla.

Si perviene così all'equazione

$$\Sigma F f = \Sigma S s \quad (35)$$

la quale esprime il teorema:

La somma dei prodotti degli sforzi interni S che in quelle certe i aste della travatura si sviluppano in condizioni di equilibrio con date forze esterne F , per le corrispondenti variazioni di lunghezza s impresses alle aste stesse, è eguale al lavoro che le forze esterne F eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quelle variazioni darebbero origine ⁽¹⁾.

Se si scelgono gli spostamenti relativi delle faccie dei vari tagli in modo che tutte le s risultino nulle eccetto una — per il che, si badi bene, non occorre affatto che quegli spostamenti relativi sian nulli essi stessi, ma basta che sian diretti perpendicolarmente agli assi delle rispettive aste — e se alla s che resta diversa da zero si conviene di attribuire un valore eguale all'unità

$$s = 1$$

si ottiene per lo sforzo corrispondente l'espressione

$$S = \Sigma F f \quad (36)$$

Tenuto conto che ciò si può dire per ciascuna delle i aste considerate, anzi per ciascuna delle a aste della travatura, poichè nessun limite abbiamo imposto alla nostra libertà di scelta, si può concludere che:

Lo sforzo che si sviluppa in una qualsiasi asta di una travatura reticolare in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne F , è

⁽¹⁾ Questo teorema venne da me enunciato per la prima volta nel 1912 [Cfr.: Rend. R. Accad. dei Lincei, serie 5^a, vol. XXI]; la dimostrazione datane qui è posteriore di un paio d'anni [Cfr.: Rend. R. Accad. dei Lincei, serie 5^a, vol. XXIV].

misurato dal medesimo numero che misura il lavoro che le forze F eseguirebbero nella variazione di configurazione determinata nella travatura da una variazione unitaria di lunghezza impressa a quell'asta.

** *

Allo stesso risultato si può anche giungere direttamente ⁽¹⁾ se si procede al calcolo del valore del lavoro di deformazione che alla travatura spetterebbe nel nuovo stato di equilibrio in cui — ferme restando tutte le forze esterne F — essa verrebbe a trovarsi dopo eseguito il taglio di quella particolare asta ed imposto alle due faccie di esso il voluto spostamento relativo.

Che si possa per questa via giungere ad un nuovo stato di equilibrio della travatura è fuori di dubbio.

Nulla ci vieta invero di pensare che, dopo avvenuto tale spostamento relativo, le due faccie del taglio vengano risaldate insieme nella lor nuova posizione, e che la travatura così ricostituita nella sua primitiva integrità venga abbandonata a se stessa sotto l'azione del dato sistema di forze esterne.

Ed il nuovo stato di equilibrio che così si viene a determinare differirà, generalmente, dal primitivo solo per ciò che la lunghezza di quella certa asta che noi abbiamo presa in considerazione sarà variata della quantità s .

Noi supporremo che lo sforzo S nell'asta stessa sia in conseguenza diventato $S + dS$.

Ciò è quanto dire che conveniamo di indicare con dS lo sforzo (nullo o non nullo che sia) che nella stessa asta verrebbe determinato dalla variazione s impressa alla sua lunghezza.

Denotati al solito con f gli spostamenti che i punti di applicazione delle singole forze esterne F hanno subito, nelle direzioni delle forze stesse, allorquando la travatura data si è deformata sotto l'azione di dette forze, e riservando, come abbiamo già fatto dianzi, la notazione f per indicare gli spostamenti che gli stessi punti subirebbero, nelle stesse direzioni, in dipendenza della variazione s impressa alla lunghezza di quella certa particolare asta, il lavoro di deformazione della travatura così

⁽¹⁾ Cfr.: G. COLONNETTI, *Sul secondo principio di reciprocità*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 50 (1915).

doppiamente deformata può evidentemente calcolarsi come somma del lavoro di deformazione iniziale

$$\frac{1}{2} \sum Ff$$

e del lavoro eseguito durante il successivo mutamento di configurazione

$$\Sigma Ff - \left(S + \frac{1}{2} dS \right) s$$

Ma è d'altra parte bene evidente che allo stesso stato di equilibrio finale si può anche giungere operando la variazione di lunghezza s nella travatura presa nel suo stato naturale non deformato — con che si dà origine a quel particolare stato di coazione elastica a cui appartiene lo sforzo dS — e procedendo poi all'applicazione delle forze esterne F .

Il lavoro di deformazione si presenta allora come espresso dalla somma

$$-\frac{1}{2} dS s + \frac{1}{2} \sum Ff$$

Eguagliando i due risultati, e ponendo

$$s = 1$$

si ricava precisamente la formola

$$S = \Sigma Ff \quad (36)$$

a cui eravamo già dianzi pervenuti.

**

Le applicazioni sono varie ed immediate: basta, come abbiamo già avvertito, ripetere, adattandoli al caso attuale, quei ragionamenti stessi che noi abbiamo già fatti a proposito del teorema di Betti, e che ci hanno allora permesso di gettare le basi di una teoria delle linee d'influenza delle deformazioni.

Poche parole basteranno ormai a chiarire il nostro concetto.

Incominciamo col supporre che sulla travatura agisca una sola forza esterna la cui grandezza assumeremo come unitaria.

Sia A il nodo su cui essa è applicata, r la sua direzione (fig. 71).

Detta f_a la componente nella direzione r dello spostamento $A'A''$ che tale nodo A subirebbe, se ad una certa particolare

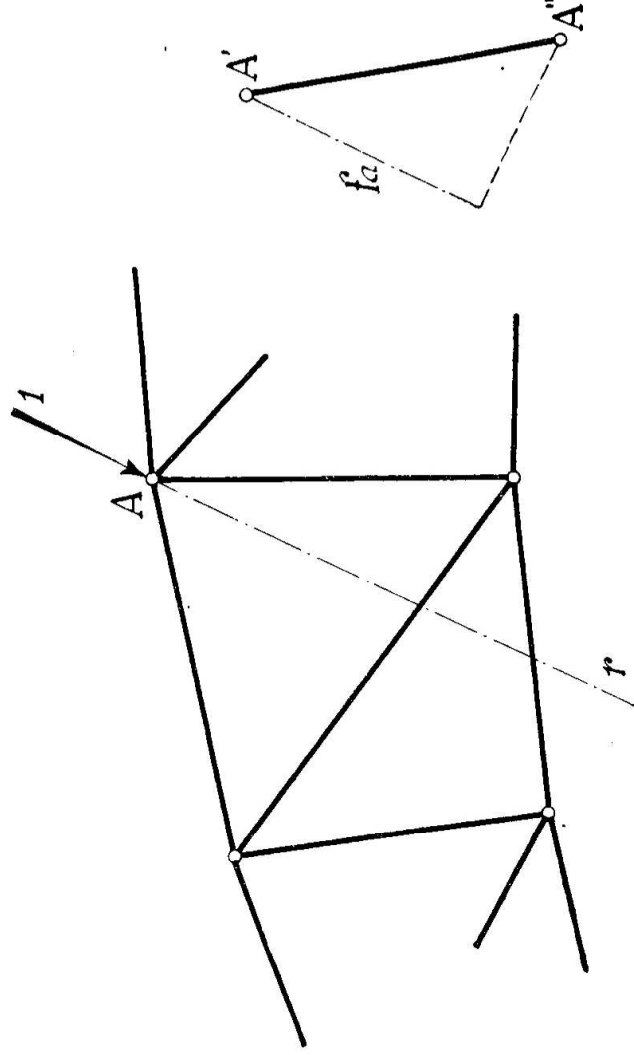


Fig. 71.

asta MN della travatura venisse impressa, nei modi dianzi descritti, una variazione di lunghezza

$$s = 1$$

si ha per lo sforzo S che l'asta MN sopporta per effetto della particolare condizione di carico sopra definita, l'espressione

$$S = f_a$$

Ciò posto immaginiamo che, oltre allo spostamento f_a del nodo A , siano stati calcolati anche gli spostamenti $f_b, f_c, \dots$ che gli altri nodi $B, C, \dots$ della travatura subirebbero (sempre nella direzione fissa r) in occasione della medesima ipotetica variazione di configurazione.

Condotte per i diversi nodi $A, B, C, \dots$ le parallele alla direzione r , immaginiamo segnati su tali parallele, a partire da una trasversale arbitraria OO , i segmenti che misurano in grandezza e segno gli spostamenti $f_a, f_b, f_c, \dots$ e tracciata la spezzata che ha gli estremi di questi segmenti per vertici.

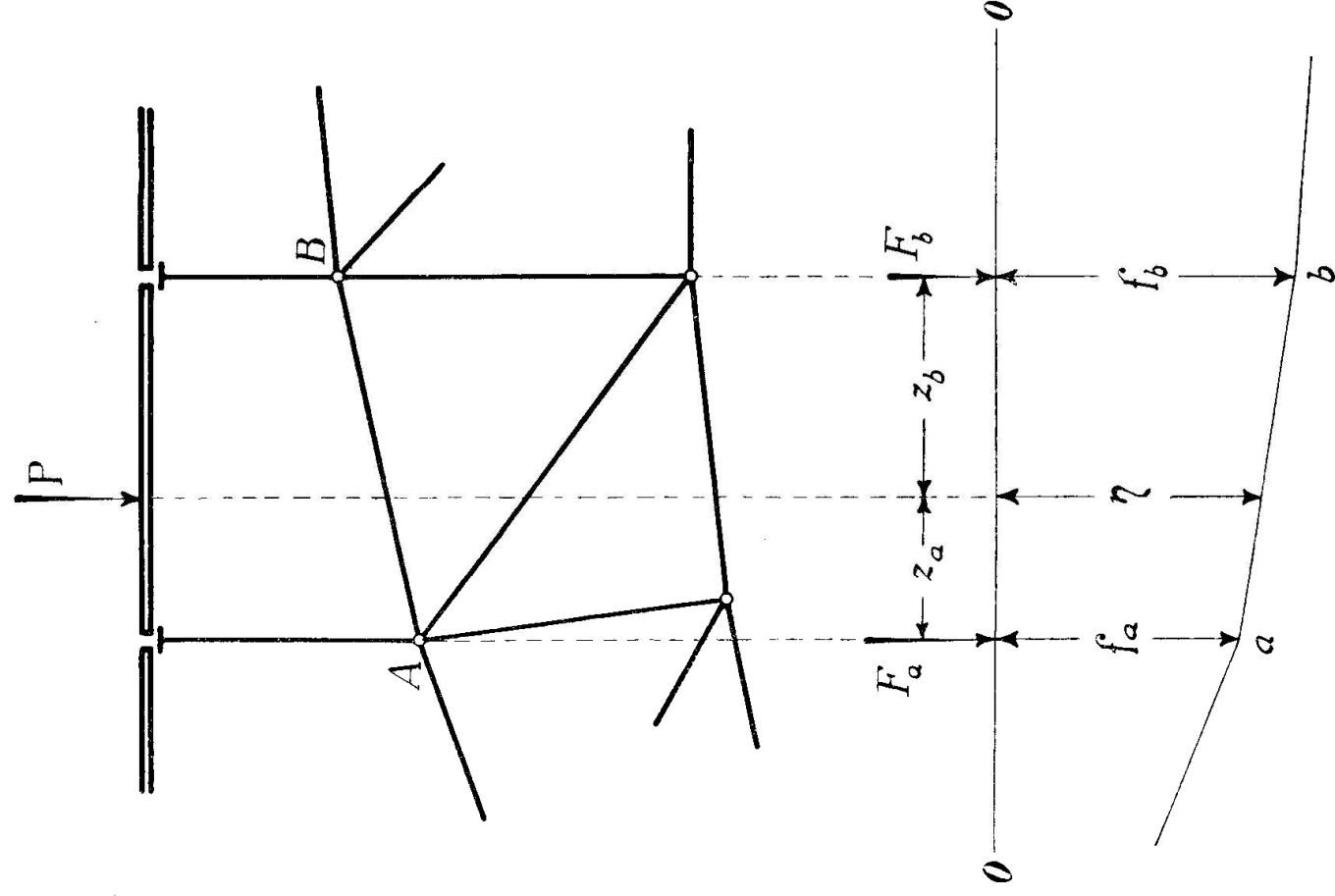


Fig. 72.

Tale spezzata, riferita alla retta OO come fondamentale, rappresenta quella che noi abbiamo già convenuto di chiamare la deformata secondo la direzione r della poligonale ABC nella ipotetica variazione di configurazione definita dalla variazione impressa $s = 1$.

Ora in virtù del secondo principio di reciprocità, tale deformata rappresenterà anche la legge secondo cui varierebbe lo sforzo S nell'asta MN sotto l'azione di una forza unitaria la quale, sia direttamente, sia indirettamente (vale a dire pel tramite di una soprastruttura del tipo di quella rappresentata nella fig. 72) si spostasse su ABC mantenendosi sempre parallela alla direzione fissa r . Ecco così trovata quella che, per ovvie ragioni di analogia, noi chiameremo *la linea d'influenza dello sforzo in un'asta*.

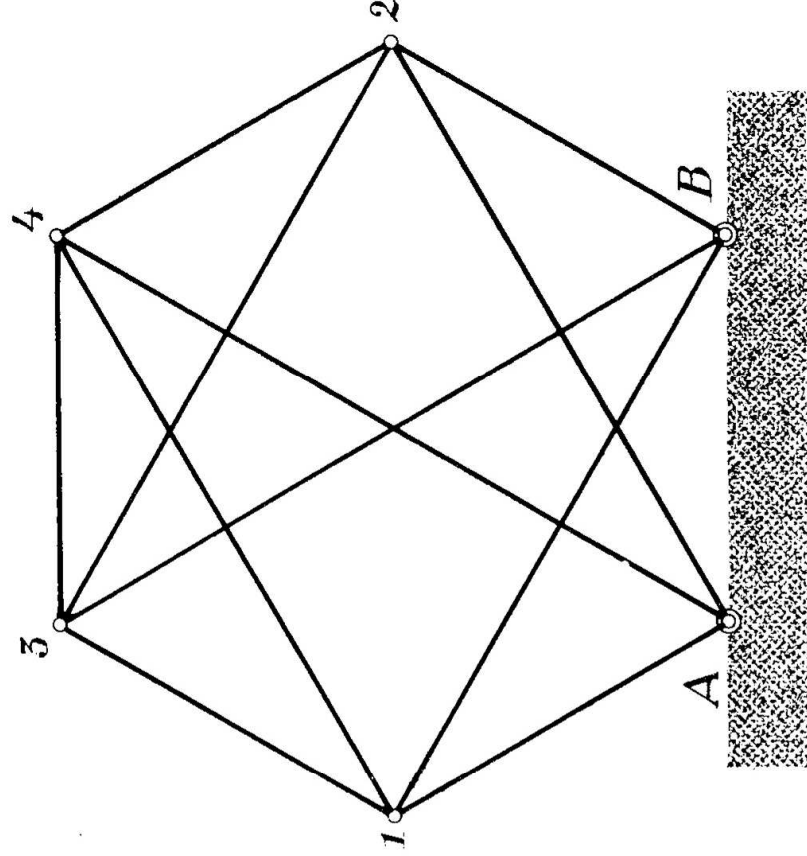


Fig. 73.

Del resto persino la teoria degli spostamenti elastici terminali trova qui un suo preciso riscontro, fecondo di utili applicazioni in tutta una categoria di problemi particolarmente importanti dal punto di vista della pratica tecnica.

Vogliamo alludere al caso delle travature reticolari aventi tre, o più di tre, aste sovrabbondanti.

Consideriamo una di tali travature, quella per esempio rappresentata nella fig. 73.

Assunte come sovrabbondanti tre aste (qualunque, purchè non concorrenti in un medesimo punto), per esempio le

$$2 \cdot 3 \quad 3 \cdot 4 \quad 4 \cdot 1 ,$$

immaginiamole tagliate come in figura 74.

Supponiamo poi ordinatamente collegate le estremità rese libere dai tre tagli nel modo indicato in figura 75, vale a dire mediante due nessi rigidi (nel caso concreto: due triangoli) a cui quelle estremità si riterranno articolate a mezzo di cerniere senza attrito.

È ben evidente che, in queste condizioni, ad ogni spostamento relativo dei due nessi rigidi corrispondono ben determinati spostamenti relativi delle due faccie di ciascuno dei tre tagli, e viceversa. Ne segue che quei due nessi rigidi si possono in un certo senso riguardare come le due faccie di un unico taglio interessante tre aste della travatura data.

Se poi si considera che gli spostamenti relativi dei predetti nessi rigidi, in vista della lor piccolezza, possono sempre assimilarsi a rotazioni di ampiezza infinitesima attorno a punti ben determinati del piano; e che d'altra parte gli stessi spostamenti relativi possono sempre riguardarsi come determinati dall'azione di certe due forze, eguali e contrarie, applicate a quei due nessi rigidi, delle quali si dovrà dare, caso per caso, la linea d'azione e la grandezza; si sarà facilmente indotti a concluderne:

1^o) l'esistenza di una relazione di proporzionalità tra l'intensità di tali forze e l'ampiezza della rotazione da esse determinata;

2^o) l'esistenza di una relazione di posizione tra la retta, linea di azione delle forze stesse, ed il punto del piano che funziona da centro di rotazione nel moto relativo dei due nessi rigidi.

Va da sè che a proposito di queste relazioni si può letteralmente ripetere tutto ciò che, in condizioni consimili, abbiamo detto nel capitolo precedente.

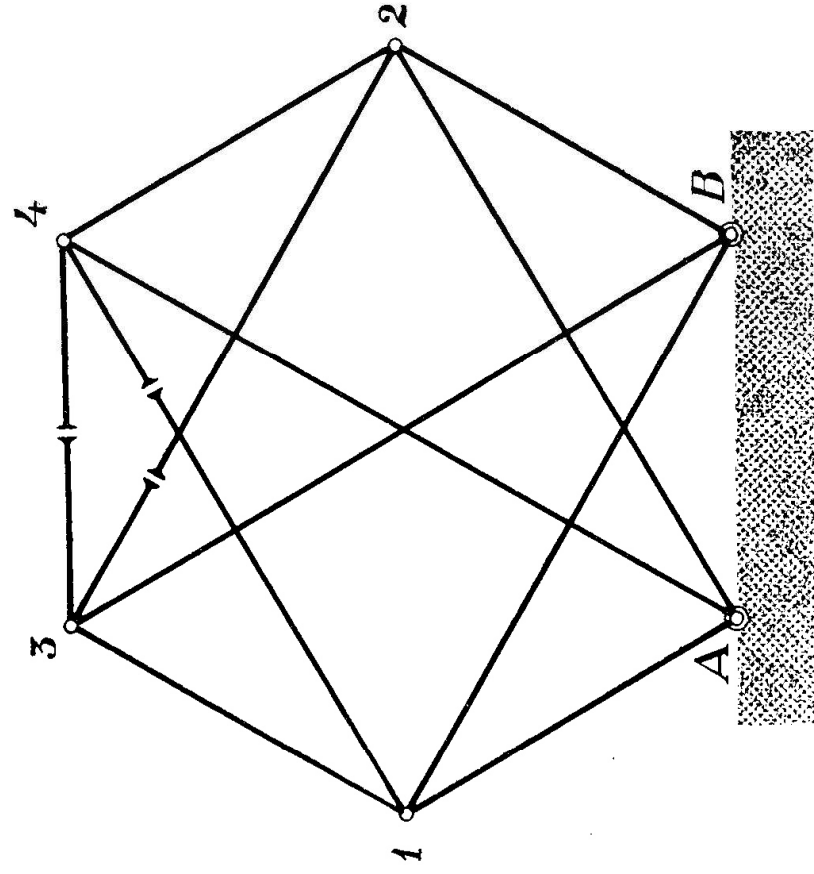


Fig. 74.

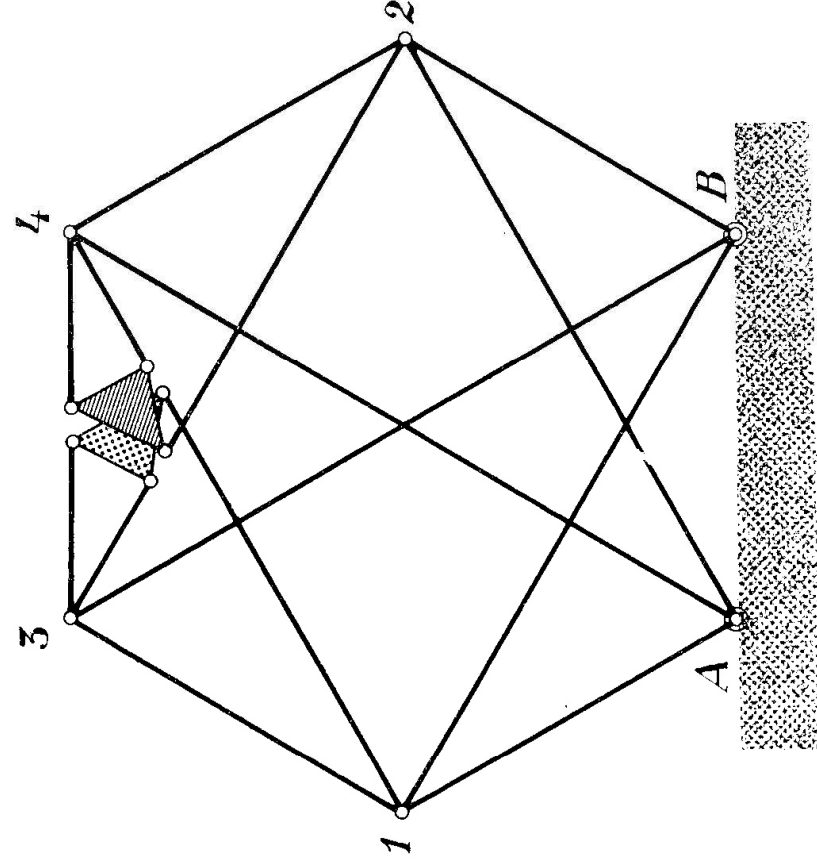


Fig. 75.

Possiamo pertanto ritenere senz'altro come dimostrato:

1° che, se si immaginano applicate ai due nessi rigidi due sistemi di forze tra loro eguali e contrarie, e del resto affatto arbitrarie, nella conseguente deformazione elastica del sistema i nessi stessi vengono a subire una rotazione relativa attorno ad un punto che è l'antipolo della linea d'azione della risultante delle forze applicate a ciascuno di essi per rapporto ad una certa ellisse la quale verrà perciò qui designata col nome di "ellisse degli spostamenti elastici relativi";

2° che l'ampiezza di tale rotazione relativa è sempre proporzionale al momento della detta risultante preso rispetto al centro dell'ellisse, il coefficiente di proporzionalità essendo una costante del sistema che noi continueremo a designare col nome generico di "peso elastico";

3° che se si immagina il peso elastico distribuito sul piano dato per modo che la sua ellisse centrale d'inerzia coincida coll'ellisse degli spostamenti elastici relativi, lo spostamento relativo di due punti qualunque già coincidenti dei due nessi rigidi, misurato secondo una direzione arbitraria, riesce eguale al prodotto della grandezza della anzidetta risultante per il momento di second'ordine del peso elastico stesso, preso rispetto alla linea d'azione di essa risultante ed a quella secondo cui si intende di misurare lo spostamento.

*
*
*

Anche quel che siamo venuti a suo tempo dicendo intorno al procedimento generale che permette di dedurre l'ellisse degli spostamenti elastici terminali dalla analisi di tre sole variazioni di configurazione convenientemente scelte, continua a sussistere nei riguardi dell'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

È soltanto il caso di aggiungere che la costruzione di quelle tre variazioni di configurazione dipenderà dalla risoluzione di tre problemi di equilibrio staticamente determinati se la travatura reticolare considerata conteneva tre sole aste sovrabbondanti; staticamente indeterminati invece nel caso in cui le aste sovrabbondanti fossero inizialmente più di tre.

In ogni caso però si avranno tre incognite iperstatiche di meno di quelle proprie del sistema originario, e questo risultato

è in pratica origine di così importanti semplificazioni di calcolo che basterebbe da solo a costituire una ragione di decisa superiorità del procedimento di cui ci stiamo occupando.

Pur fermandoci ancora al caso più semplice delle travature triplamente iperstatiche, segnaliamo tra le applicazioni tipiche quelle che si riferiscono al problema classico dell'arco reticolare rappresentato in figura 76.

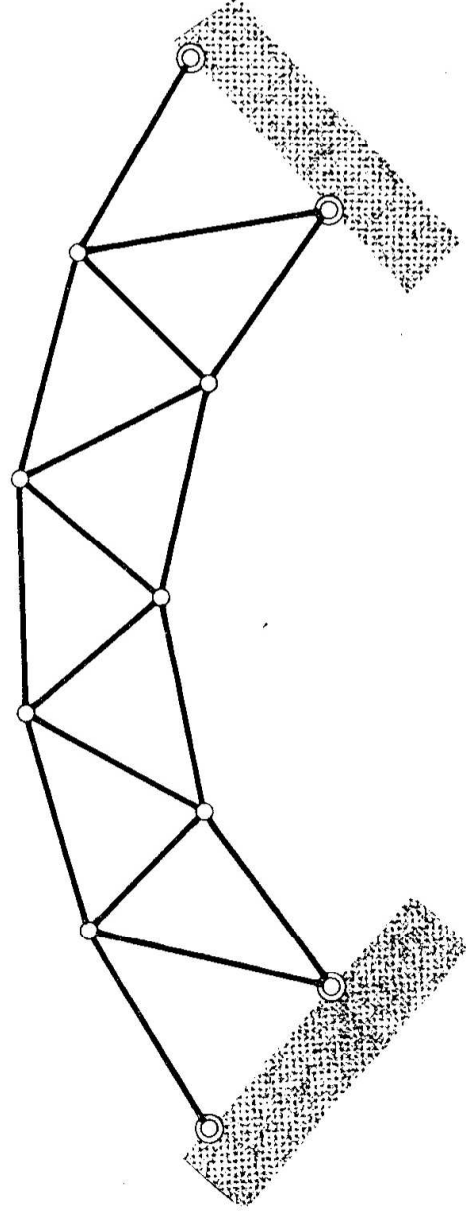


Fig. 76.

A proposito del quale vale la pena di avvertire che non è neppur detto che la costruzione dell'ellisse degli spostamenti elastici relativi debba in pratica ripetersi — come a tutta prima potrebbe pensarsi — tutte le volte che si muta la terna di aste che si assumono come sovrabbondanti.

Sussiste invece il seguente teorema:

Se due sezioni praticate attraverso ad un arco reticolare — o più generalmente: se due sezioni interessanti due terne di aste di una travatura tre o più volte iperstatica — staccano una porzione di travatura non connessa col resto e non soggetta a vincoli esterni, ad esse corrispondono un medesimo peso elastico ed una medesima ellisse degli spostamenti elastici relativi.

Si immagini infatti praticato attraverso la travatura un primo taglio in corrispondenza della prima sezione.

Noi supporremo che, in assenza di forze esterne, le aste della travatura considerata non siano soggette a sforzi di sorta; ciò che renderà più semplice il nostro ragionamento, pur non togliendo nulla alla generalità della dimostrazione. Se invece

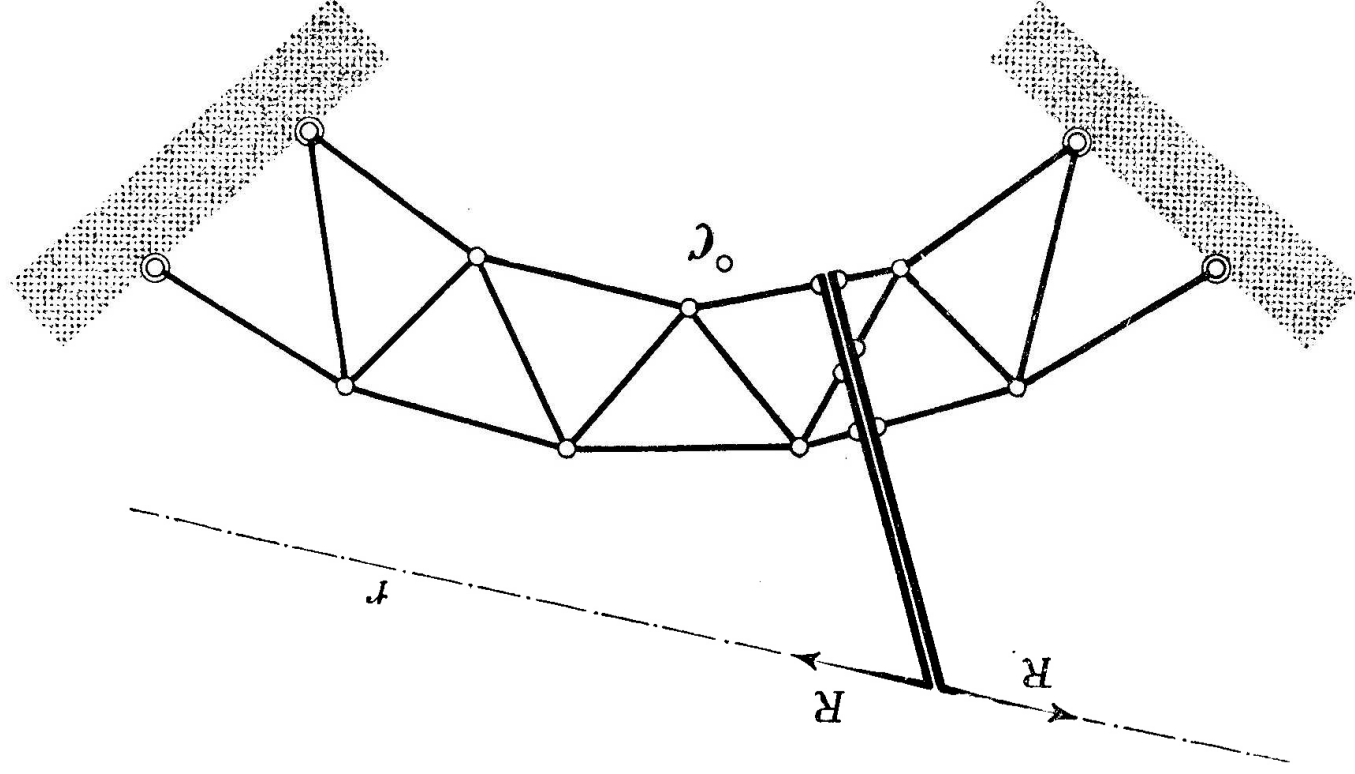


Fig. 77.

sforzi interni esistessero indipendenti dai carichi, basterebbe provvedere ad equilibrarli mediante l'applicazione di opportune forze esterne in corrispondenza dei singoli tagli, per modo che lo stato di deformazione dipendente da tali sforzi, conservandosi dopo i tagli immutato, venisse a sovrapporsi alle ulteriori deformazioni che stiamo per definire senza influire per nulla sulla loro entità e sulle loro caratteristiche.

Ciò posto, ai due nessi rigidi che, nel modo di operare da noi adottato, vengono a funzionare da faccie del taglio (fig. 77) immaginiamo applicate due forze (o due sistemi di forze) eguali e contrarie R e $-R$; e supponiamo noti così il centro C della conseguente rotazione relativa dell'un nesso rispetto all'altro, come l'ampiezza di tale rotazione.

È bene evidente che questo stato di cose non viene momentaneamente turbato se si suppone praticato un secondo taglio in corrispondenza della seconda sezione (fig. 78), purchè alle due faccie di esso si intendano applicati due sistemi di forze equipollenti alle tensioni interne che, prima del taglio, si trasmettevano attraverso quella seconda sezione.

Ma, nelle ipotesi fatte, questi due sistemi di forze devono necessariamente essere equipollenti alla R ed alla $-R$ che si sono supposte applicate alle due faccie del primo taglio.

Ciò premesso si pensi di imprimere alla porzione di travatura staccata dalle due sezioni (e segnata punteggiata in figura) un moto rigido capace di riportare a contatto l'una dell'altra le due faccie del primo taglio, il che è quanto dire: capace di annullare lo spostamento relativo dei due nessi rigidi da cui quelle faccie sono rappresentate.

Questo moto rigido, mentre (per la sua piccolezza) non altera le primitive condizioni di equilibrio elastico delle singole aste deformate costituenti la porzione di travatura considerata, fa subire ad una delle faccie del secondo taglio una rotazione avente la medesima ampiezza ed il medesimo centro della rotazione relativa inizialmente effettuata in corrispondenza della prima sezione.

Per altra parte non v'è dubbio che la configurazione a cui così si perviene è quella stessa che la travatura avrebbe assunta spontaneamente qualora, restando intatta la prima sezione, si fosse praticato soltanto il taglio in corrispondenza della seconda sezione, ed alle due faccie di esso, vale a dire ai due nessi ri-

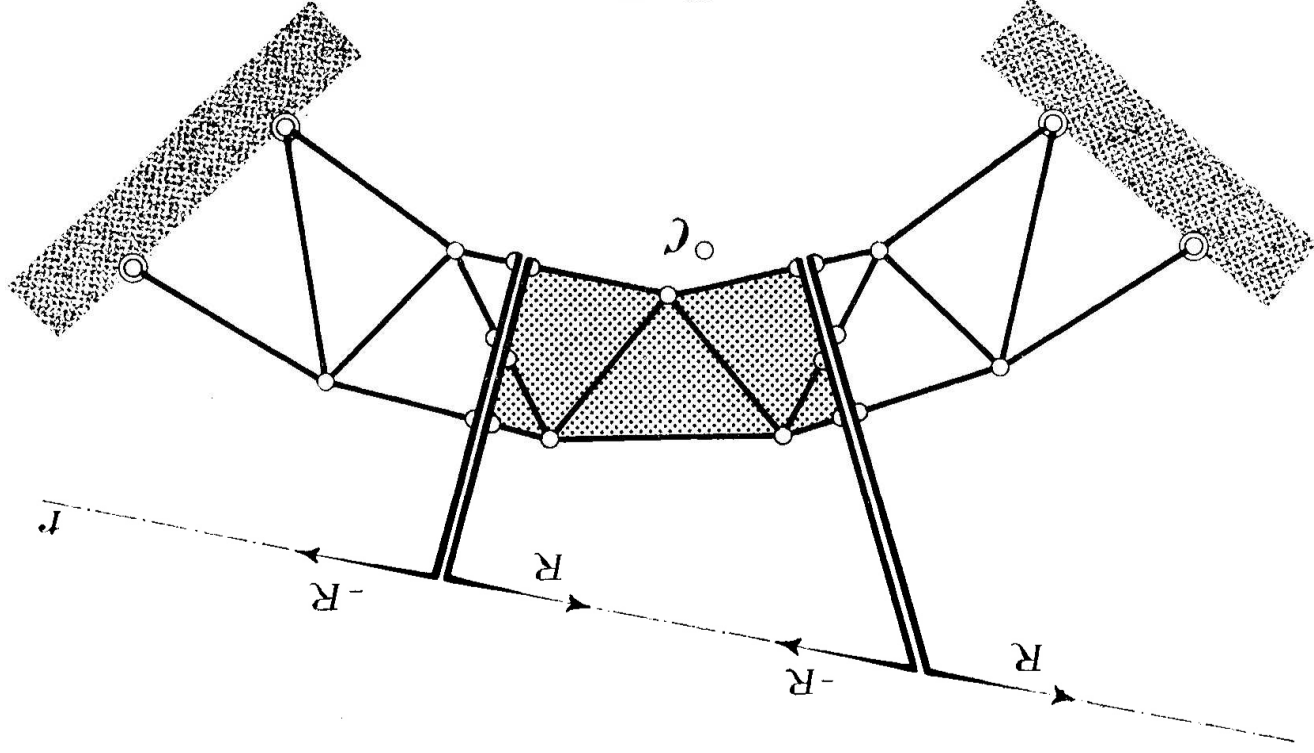


Fig. 78.

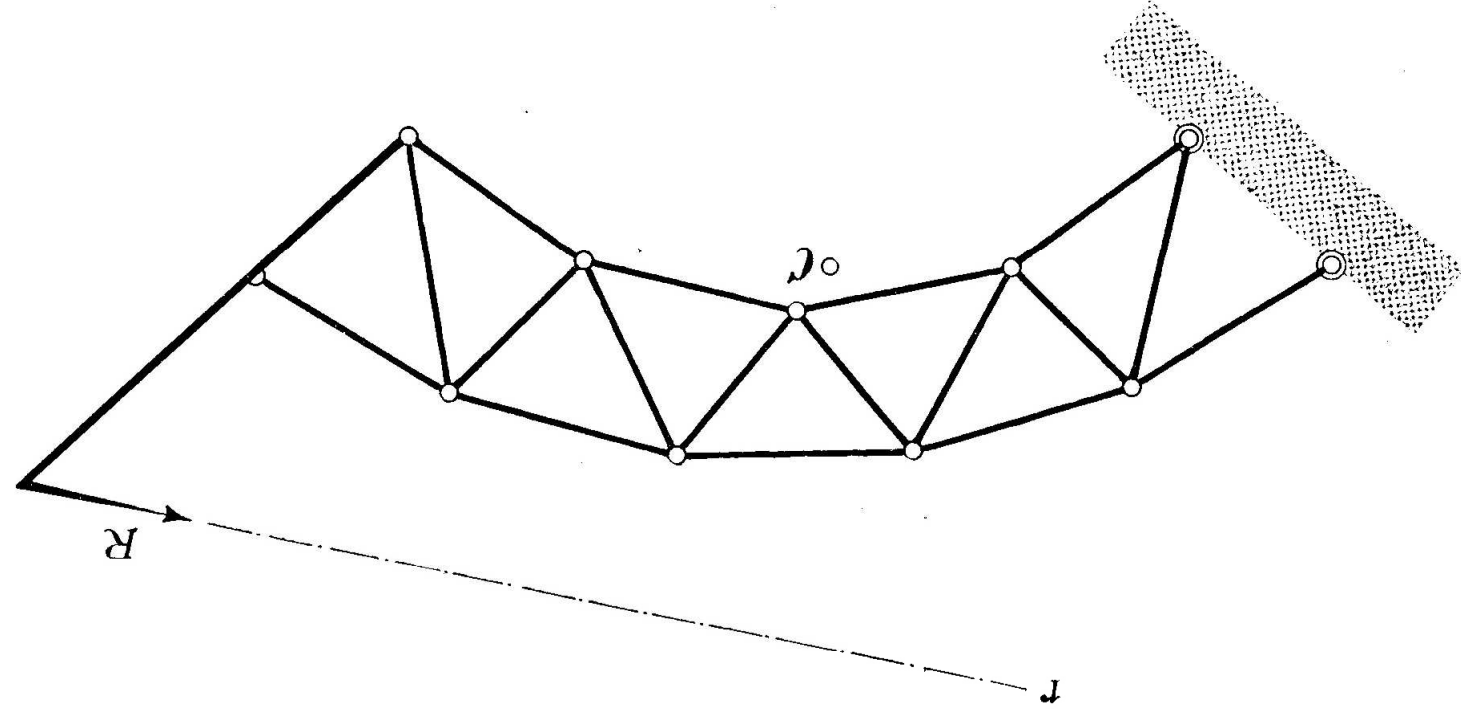


Fig. 79.

gidi che le rappresentano, si fossero applicate le due forze eguali e contrarie R e $-R$.

La corrispondenza tra la linea d'azione r di queste forze ed il punto C che funziona da centro delle rotazioni relative non dipende adunque, nelle ipotesi da noi fatte, dalla posizione della sezione: lo stesso può dirsi della costante (peso elastico) che definisce l'ampiezza di quelle rotazioni.

Nel caso dell'arco reticolare del tipo di quello rappresentato nelle nostre ultime figure, una medesima ellisse vale dunque per tutto un sistema di sezioni, tra le quali si possono anzi annoverare anche le sezioni estreme adiacenti ai vincoli, per le quali gli spostamenti relativi delle due faccie del taglio si riducono ovviamente agli spostamenti assoluti di quello dei due nessi rigidi che viene a rappresentare la faccia estrema dell'arco; esso è infatti il solo dei due nessi rigidi che può spostarsi (ed è anche il solo che noi abbiamo rappresentato nella nostra figura 79), l'altro nesso rigido restando evidentemente identificato col sistema rigido di riferimento a cui i vincoli fanno capo.

L'ellisse degli spostamenti elastici relativi non differisce allora dall'ellisse terminale di elasticità dell'arco, supposto vincolato ad uno dei suoi estremi e libero all'altro; e per costruirla possono anche qui venir utilizzati i procedimenti fondati sulla considerazione dei pesi elastici parziali e sulla loro composizione.

Tutto ciò premesso, una rotazione relativa delle due faccie del taglio interessante una determinata terna di aste sovrabbondanti, si può sempre far avvenire attorno ad un punto C arbitrariamente scelto nel piano della travatura, supponendo applicate alle due faccie del taglio due forze eguali e contrarie R e $-R$ la cui linea comune d'azione r sia l'antipolare del punto C per rapporto all'ellisse degli spostamenti elastici relativi.

Ora supponiamo che il punto C coincida col punto d'incontro degli assi di due delle tre aste considerate (fig. 80).

È allora evidente che tali due aste non subiranno, in quella rotazione relativa, variazione alcuna di lunghezza. Quanto alla

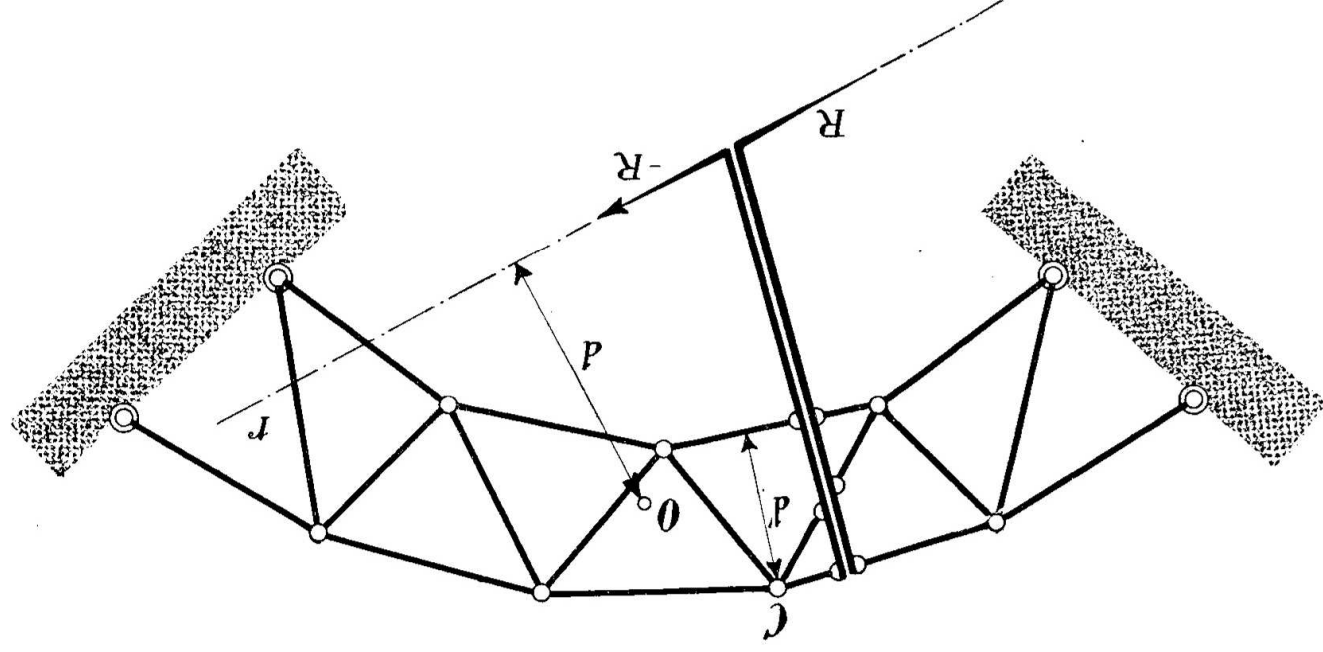


Fig. 80.

variazione di lunghezza della terza asta — il cui asse geometrico non passa per C — la si potrà sempre esprimere sotto la forma

$$s = R \cdot W \cdot d \cdot d'$$

se con d si indica la distanza del baricentro elastico O dalla linea d'azione r e con d' quella del punto C dall'asse geometrico dell'asta.

E si potrà sempre ottenere

$$s = 1$$

sol che si assuma

$$R = \frac{1}{W d d'}$$

La deformata della travatura che così si verrà a determinare, potrà quindi venire senz'altro utilizzata nei modi ormai noti per il tracciamento della linea d'influenza degli sforzi prodotti, nell'asta di cui si tratta, dai carichi applicati alla travatura.

Sussiste pertanto il teorema:

La linea d'influenza dello sforzo in un'asta di una travatura reticolare contenente tre o più aste sovrabbondanti si può sempre costruire tagliando insieme con quell'asta anche due altre aste il cui punto di concorso C non cada sulla prima, ed immaginando poi applicate alle due faccie del taglio due forze eguali e contrarie aventi per linea comune di azione l'antipolare di C per rapporto all'ellisse degli spostamenti elastici relativi proprii di quel taglio.