

VIII.

L'ellisse degli spostamenti elastici terminali.

Consideriamo una travatura reticolare piana — poco importa se staticamente determinata od indeterminata — ed in essa un'asta la quale colleghi due nodi M ed N .

Supponiamo le forze esterne ridotte a due sole, rispettivamente applicate in M ed in N .

In virtù del principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, gli spostamenti di questi due nodi si dovranno sempre poter esprimere come delle funzioni lineari delle forze che li hanno prodotti.

Ma in questi spostamenti si può agevolmente distinguere una parte che deriva dalla deformazione propria (variazione di lunghezza) dell'asta MN , ed un'altra parte che corrisponde ad un semplice moto rigido di quest'asta nel piano, epperò va attribuita al deformarsi di tutto il resto della travatura.

Ed accade sovente che quella prima parte sia molto piccola a fronte dell'altra, che cioè si possa, con un'approssimazione molto grande — in ogni caso assolutamente soddisfacente per le esigenze della pratica — trascurare la variazione di lunghezza dell'asta MN per rapporto agli spostamenti rigidi che la stessa asta subisce in dipendenza delle variazioni di lunghezza di tutte le altre aste.

Ciò equivale evidentemente a considerare l'asta MN come rigida; e conduce subito a due conseguenze della maggiore importanza.

Gli spostamenti di M e di N nel piano della figura si possono infatti, in questo caso, interpretare come il risultato di una rotazione rigida elementare dell'asta attorno ad un determinato centro; sono quindi da riguardarsi come perfettamente definiti

se è dato il centro di rotazione e l'ampiezza (infinitesima) di questa.

Per altra parte le due forze esterne applicate ad M e ad N vengono a potersi comporre colle norme della statica dei sistemi rigidi. La sollecitazione esterna applicata alla travatura è quindi alla sua volta da considerarsi come perfettamente definita se è data la linea d'azione della forza risultante e la grandezza di questa.

La legge di dipendenza lineare che il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio stabilisce fra deformazione e sollecitazione, viene allora a tradursi in una corrispondenza fra gli elementi che definiscono la sollecitazione (grandezza della forza risultante e posizione della sua linea d'azione) e quelli che definiscono la deformazione (ampiezza della rotazione e posizione del centro attorno a cui essa avviene).

Quella legge esige anzi che la grandezza della forza risultante entri linearmente nella espressione della ampiezza della rotazione, ma non influisca sulla posizione del centro: posizione la quale deve quindi riuscir completamente determinata allorchè della forza risultante è data anche soltanto la linea d'azione.

Siamo così condotti a considerare la proporzionalità tra ampiezza della rotazione e grandezza della forza risultante, separatamente dalla corrispondenza geometrica che deve intercedere tra le rette del piano, considerate come linee d'azione delle risultanti delle forze deformatrici, ed i punti dello stesso piano considerati come centri attorno a cui ruotano i punti di applicazione di quelle forze nella variazione di configurazione che esse determinano nella travatura.

* * *

All'asta MN noi daremo il nome di “ asta terminale ”, della travatura. S'intende che con questa denominazione, che ci è naturalmente suggerita dalla posizione che l'asta occupa nei casi più comuni e più ovvii, noi non intendiamo fare alcuna affermazione precisa in ordine alla posizione di quest'asta nei casi più generali. Intendiamo soltanto designare un'asta che soddisfi alle diverse condizioni che siamo venuti enunciando poc'anzi, e che si possono agevolmente riassumere ammettendo:

1) che le sue deformazioni siano trascurabili a fronte degli spostamenti rigidi che essa subisce per effetto delle deformazioni di tutte le altre aste della travatura;

2) che, se si suppone che le azioni esterne deformatrici siano esclusivamente applicate a tale asta, le caratteristiche dello spostamento rigido che essa subisce si possano esprimere linearmente in funzione delle caratteristiche di quelle azioni.

Ne verrà allora di conseguenza che il lavoro di deformazione della travatura, il quale in virtù del teorema di Clapeyron si può sempre scrivere sotto forma di una funzione bilineare delle forze e degli spostamenti dei loro punti di applicazione, si potrà anche mettere sotto la forma di una funzione quadratica delle caratteristiche di quello spostamento rigido; funzione essenzialmente positiva la quale si annullerà sempre e soltanto quando questo spostamento rigido sia nullo alla sua volta.

**

Ed ora veniamo all'analisi di quella corrispondenza geometrica che abbiamo detto sussistere tra le rette del piano, considerate come linee d'azione delle risultanti delle forze deformatrici, ed i punti dello stesso piano, considerati come centri attorno a cui ruotano i punti di applicazione di quelle forze nella variazione di configurazione che esse determinano nella travatura.

Siano r_1 e C_1 due elementi così corrispondenti (fig. 60).

È facile dimostrare che essi non possono in nessun caso appartenersi.

Se infatti il centro di rotazione C_1 cadesse sulla linea d'azione r_1 della risultante R_1 delle forze deformatrici, il lavoro eseguito da queste sarebbe identicamente nullo qualunque fosse l'ampiezza, piccolissima, della rotazione prodotta: dovrebbe allora per il teorema di Clapeyron riuscire nullo anche il lavoro di deformazione della travatura, il quale invece, per ipotesi, non può annullarsi se quell'ampiezza non è nulla.

Scegliamo ora nel dato piano una seconda retta r_2 che supporremo passante per C_1 , ed assumiamola come linea d'azione della risultante R_2 di un secondo sistema di forze deformatrici. E mostriamo che il centro C_2 attorno a cui, sotto l'azione di

Pel teorema di Betti deve allora esser nullo anche il lavoro che il primo sistema di forze eseguirebbe se all'asta terminale si imprimesse la rotazione che caratterizza la seconda deformazione.

E perchè ciò avvenga occorre e basta che il centro C_2 di questa seconda rotazione cada sulla linea d'azione r_1 della risultante R_1 di quel primo sistema di forze, precisamente come noi avevamo annunciato.

Da quanto si è detto segue immediatamente che alla retta r_3 congiungente dei due punti C_1 e C_2 , considerata come linea di azione della risultante R_3 di un nuovo sistema di forze, deve corrispondere come centro della rotazione da essa prodotta un punto C_3 che, dovendo appartenere ad un tempo ad r_1 e ad r_2 , non può essere che il punto di incontro di queste due rette.

Si può aggiungere che allo stesso punto C_3 , considerato come centro di un fascio di rette r , corrisponde ancora la stessa retta r_3 intesa come luogo dei corrispondenti centri C .

Una qualunque forza R passante per C_3 può infatti sempre immaginarsi decomposta secondo le due direzioni r_1 ed r_2 in due componenti R_1 ed R_2 ; ma noi sappiamo che queste, agendo da sole, produrrebbero rispettivamente due rotazioni ben determinate attorno ai due centri C_1 e C_2 .

Pel principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio la rotazione prodotta da R deve essere la risultante delle due accennate rotazioni attorno a C_1 ed a C_2 ; e, per un noto teorema di cinematica, il suo centro C deve giacere sulla retta $C_1 C_2$: il che è precisamente quanto intendevamo dimostrare.

Possiamo dunque finalmente concludere che la corrispondenza fra le rette r ed i punti C gode delle seguenti proprietà:

- 1) è biunivoca;
- 2) una retta ed un punto che si corrispondono non possono mai appartenersi;
- 3) data una retta e su di essa un punto, il punto che corrisponde a quella retta deve giacere sulla retta corrispondente a quel punto.

Ciò è quanto dire che quella corrispondenza è una polarità priva di elementi uniti.

Questa polarità possiede un centro O ; punto certamente proprio corrispondente alla retta all'infinito del piano.

Combiniamola con una simmetria rispetto a questo centro: facciamo cioè corrispondere ad ogni retta r il punto C'' simmetrico di C rispetto ad O (fig. 61).

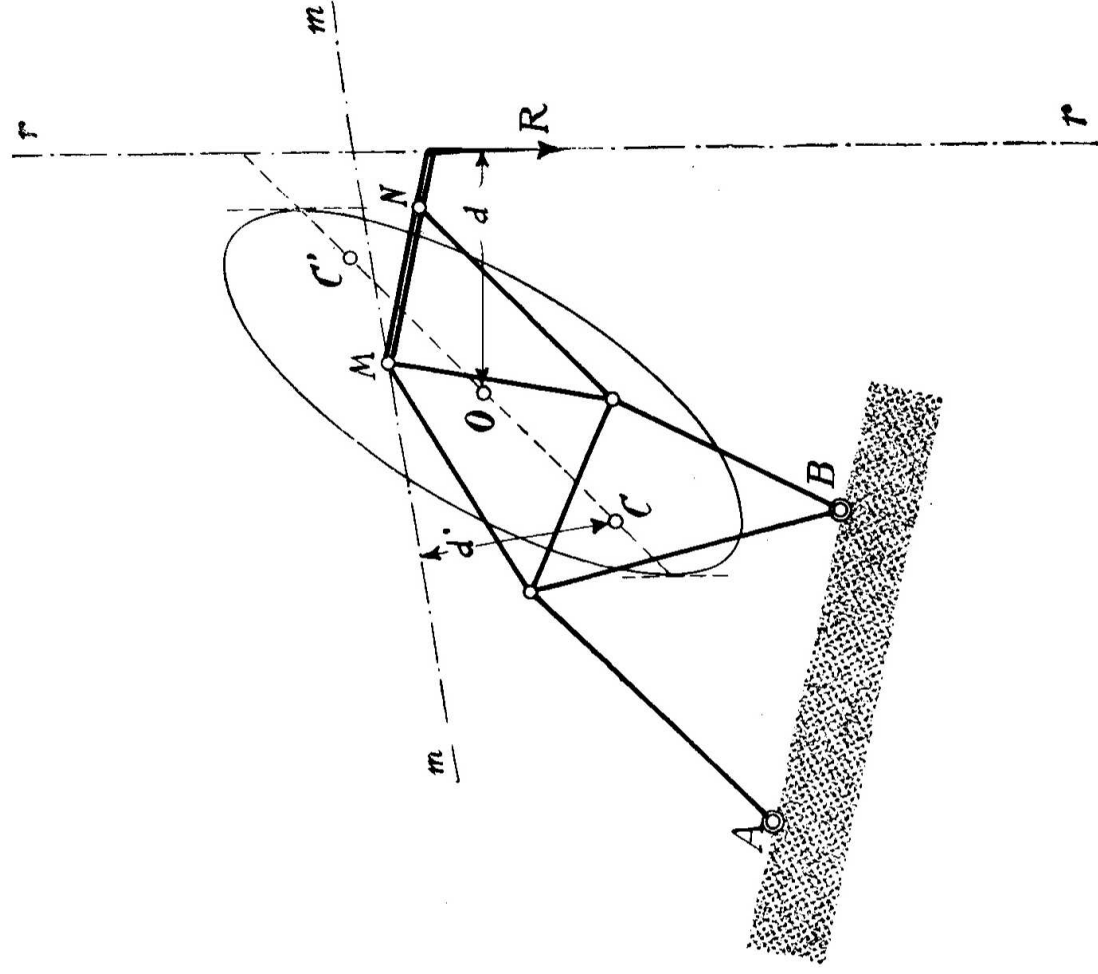


Fig. 61.

La nuova corrispondenza sarà ancora una polarità, ma passerà certamente degli elementi uniti, epperò avrà una conica fondamentale reale col centro in O .

Tali elementi uniti non potranno essere impropri perchè i punti all'infinito vengono nella simmetria trasformati in se stessi, epperò non potrebbero appartenere alla retta loro corrispondente nella nuova polarità senza che ciò si verificasse anche nella polarità primitiva.

La conica fondamentale in questione sarà dunque un'ellisse. Rispetto ad essa le rette r ed i punti C si comportano come antipolari.

Dato dunque un complesso di forze esterne applicate all'asta terminale, nella deformazione che si produce nella travatura reticolare, quell'asta ruota attorno ad un punto che è l'antipolo della linea d'azione della risultante di quelle forze rispetto ad una certa ellisse, la quale perciò prende il nome di *ellisse degli spostamenti elastici terminali*, o *ellisse di elasticità*.

**

Se la linea d'azione r della risultante passa per il centro O dell'ellisse, l'antipolo giace all'infinito nella direzione ad essa coniugata: l'asta terminale subisce una semplice traslazione normalmente alla detta direzione.

Lo spostamento dell'asta terminale si ridurrà invece ad una semplice rotazione attorno al centro O allorquando la linea d'azione della forza coinciderà colla retta all'infinito del piano: cioè allorquando il sistema delle forze applicate equivarrà ad una coppia.

L'ampiezza di questa rotazione sarà naturalmente proporzionale al momento $\mathcal{M}$ della coppia, cioè potrà scriversi sotto la forma

$$W \cdot \mathcal{M}$$

W essendo una costante che deve intendersi completamente determinata quando è data la travatura a cui essa si riferisce, beninteso coi suoi vincoli e colla relativa asta terminale.

In ogni altro caso, quando cioè la linea d'azione r della risultante R sia una retta generica del piano, si potrà sempre immaginare trasportata la R parallelamente a se stessa fino a passare per il centro O , purchè si abbia l'avvertenza di aggiungere la coppia di momento

$$\mathcal{M} = R \cdot d$$

che si genera nel trasporto.

Ciò conduce a sostituire alla rotazione attorno all'antipolo C una rotazione attorno ad O ed una traslazione normale alla direzione OC coniugata della r rispetto all'ellisse.

L'ampiezza della rotazione sarà

$$W \cdot \mathcal{M} = W \cdot R \cdot d$$

Per effetto della traslazione che l'accompagna questa rotazione muta bensì di centro, ma non di ampiezza.

Possiamo quindi completare le conclusioni a cui eravamo giunti nel precedente paragrafo, aggiungendo che l'ampiezza della rotazione dell'asta terminale attorno al noto antipolo è proporzionale al momento del dato sistema di forze esterne rispetto al centro dell'ellisse, il coefficiente di proporzionalità essendo una costante della travatura data.

* * *

A questo punto noi possiamo senz'altro proporci di determinare lo spostamento, misurato in una direzione arbitraria, che un punto qualunque M dell'asta terminale (ovvero comunque connesso rigidamente ad essa) subisce sotto l'azione della data sollecitazione.

Basterà per ottenerlo moltiplicare l'ampiezza della rotazione testè calcolata per la distanza dell'antipolo C , attorno a cui essa avviene, dalla retta m condotta per M nella voluta direzione.

Si giunge così ad una espressione della forma

$$W \cdot R \cdot d \cdot d'$$

la quale è suscettibile di una interpretazione molto caratteristica.

Basta immaginare sul piano dato distribuita una massa ideale la cui grandezza complessiva sia misurata dalla costante W e la cui ellisse centrale d'inerzia coincida coll'ellisse degli spostamenti elastici terminali.

Allora il prodotto $W \cdot d$, che compare nella misura della rotazione, può interpretarsi come il momento statico di quella massa rispetto alla linea d'azione della forza a cui la rotazione stessa è dovuta; ed il prodotto $W \cdot d \cdot d'$, che entra nell'espressione dello spostamento di un punto, assume il significato di momento del secondo ordine della stessa massa rispetto alla linea d'azione della forza ed alla retta condotta per il punto dato nella direzione secondo la quale si intende misurato lo spostamento.

La massa W , così distribuita sul piano, prende il nome di *peso elastico* ed il punto O si chiama *baricentro elastico* della travatura.

Con queste convenzioni le cose dette fin qui si possono compendiare nel seguente teorema:

Data una travatura reticolare *piana*, e sceltane l'asta terminale per modo che siano soddisfatte le condizioni imposte dal principio, si può considerare una certa distribuzione di pesi elastici nel piano, tale che *lo spostamento di un punto qualunque dell'asta terminale (o connesso rigidamente all'asta terminale) secondo una qualunque direzione, dovuto ad una forza arbitrariamente applicata all'asta stessa, riesce eguale al prodotto della grandezza di questa forza per il momento di secondo ordine del sistema dei pesi elastici preso rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si misura lo spostamento.*

Se il punto di cui si vuol determinare lo spostamento giace sulla linea d'azione della forza, e se la misura vuol eseguirsi nella direzione stessa di questa, le due rette rispetto a cui deve valutarsi il momento di second'ordine del sistema dei pesi elastici vengono a coincidere, e si può dire che *lo spostamento del punto di applicazione della forza, nella direzione della forza stessa, è eguale al prodotto della grandezza di questa per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici rispetto alla sua linea d'azione.*

*
*
*

Questi teoremi sono dovuti a K. CULMANN, e per la varietà e per l'eleganza delle loro applicazioni hanno acquistato nella scienza delle costruzioni un'importanza di primissimo ordine.

Di tali applicazioni noi daremo numerosi esempi a suo tempo. È facile tuttavia farsene fin d'ora un'idea se si pensa che il conoscere il peso elastico e l'ellisse di elasticità relativa ad una data asta terminale di una travatura reticolare, equivale all'aver risolti tutti i problemi relativi agli spostamenti che quell'asta può subire sotto l'azione di forze esterne affatto arbitrarie.

E ciò non solo nel senso che, data una forza qualunque applicata all'asta terminale, noi sappiamo immediatamente calcolare lo spostamento da essa prodotto in un punto qualunque dell'asta stessa secondo una qualunque direzione, ma anche nel

senso che, definito un qualsiasi spostamento dell'asta in questione, noi sappiamo immediatamente risalire alla determinazione della forza che, ivi applicata, è capace di produrlo.

Si viene così a risolvere il problema dell'equilibrio, sia pure in condizioni che non sono le più generali, non soltanto nel caso in cui son date le forze deformatrici, e si cercano gli spostamenti, ma anche in quello in cui son dati gli spostamenti, e sono incognite le forze che li hanno prodotti. Problema questo ultimo di cui non avevamo ancora avuto occasione di occuparci, ma di cui non mancano in pratica alcune applicazioni interessanti. La sua risoluzione del resto rappresenta il punto di partenza di tutta una serie di applicazioni, di cui noi dovremo presto occuparci ed in cui il fine primo dei nostri ragionamenti sarà la determinazione delle incognite iperstatiche.

Anche senza voler fare premature anticipazioni sul seguito di tali ragionamenti, si presenta pertanto come essenziale il seguente problema:

Data una travatura reticolare piana soggetta a dati vincoli, ed in essa un'asta terminale, calcolarne il peso elastico e determinarne l'ellisse di elasticità.

Incominceremo col dimostrare che la risoluzione di questo fondamentale problema si può sempre ricondurre alla determinazione di tre sole deformazioni, convenientemente scelte, della travatura.

Immaginiamo a tal fine applicato all'asta terminale un sistema di forze equipollente ad una coppia di momento $\mathcal{M}$ e supponiamo di saper determinare gli spostamenti che i due nodi a cui l'asta terminale fa capo (o, più generalmente, due punti qualunque rigidamente connessi a quei due nodi) vengono a subire durante la deformazione che ne consegue.

Siano S e T i due punti che si considerano, SS' e TT' i loro spostamenti (fig. 62).

Poichè tali spostamenti debbono, nelle ipotesi da noi fatte, derivare da un moto rigido (piccolissimo) di rotazione attorno al baricentro elastico O , questo punto potrà immediatamente identificarsi nel punto di concorso delle normali condotte per i singoli punti S T alle singole direzioni SS' TT' .

Nel tempo stesso il valore, costante, del rapporto

$$\frac{SS'}{SO} = \frac{TT'}{TO}$$

ci darà l'ampiezza della rotazione che, divisa per $\mathcal{M}$, misura il peso elastico W .

Ciò fatto, immaginiamo applicato all'asta terminale un secondo sistema di forze la cui risultante R_1 passi per O , pur avendo del resto direzione arbitraria.

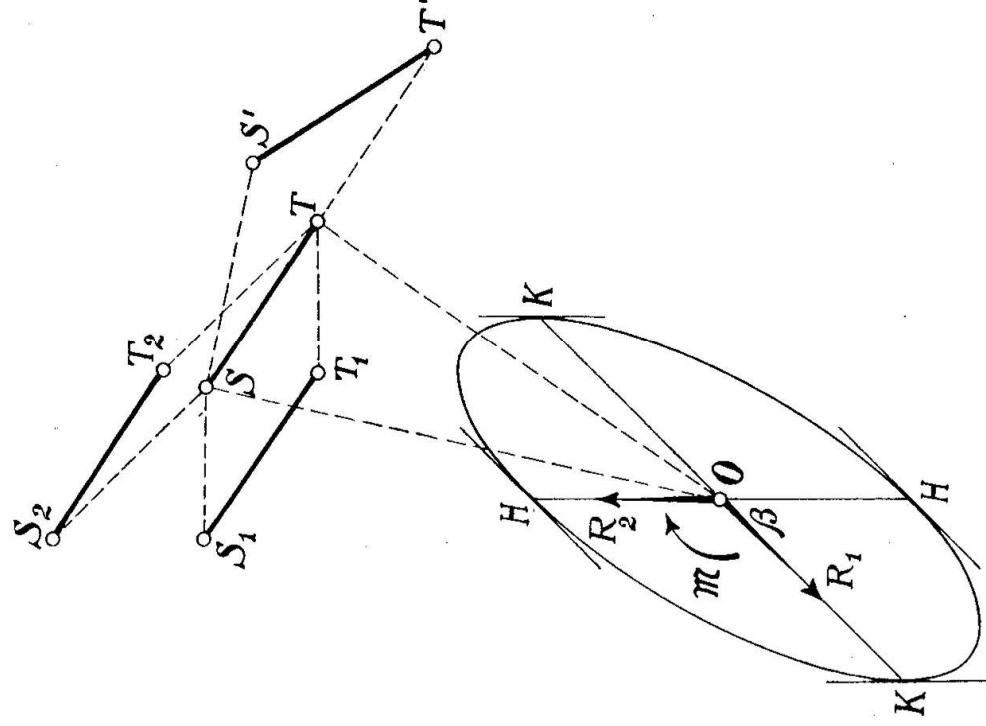


Fig. 62.

Noi sappiamo che, nei riguardi dell'asta terminale, la deformazione che viene così a prodursi nella travatura deve risolversi in una semplice traslazione $SS_1 = TT_1$; basterà quindi trovarne la direzione e la grandezza.

La normale a tale direzione, condotta per O , individuerà immediatamente la direzione coniugata a quella di R_1 ; la lunghezza del diametro HH dell'ellisse di elasticità che ha la detta direzione coniugata, si dedurrà poi dalla relazione

$$SS_1 \cdot \sin \beta = R_1 \cdot W \cdot (OH \cdot \sin \beta)^2$$

la quale esprime lo spostamento di un punto qualunque della linea d'azione della forza R_1 (supposto rigidamente connesso all'asta MN), misurato nella direzione stessa di questa forza. come prodotto della grandezza di essa per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici preso rispetto alla sua linea d'azione. Immaginiamo infine che l'asta terminale venga sollecitata da un terzo sistema di forze la cui risultante R_2 abbia per linea d'azione precisamente il diametro HH testè determinato dell'ellisse di elasticità.

Lo spostamento da esso prodotto nell'asta terminale dovrà ridursi ad una semplice traslazione $SS_2 = TT_2$ in direzione perpendicolare a quella della forza R_1 .

Basterà dunque che ne sia nota la grandezza, per poterne dedurre, con un calcolo affatto analogo a quello poc'anzi accennato, la lunghezza del diametro KK che ha la direzione di R_1 .

Lo spostamento di un punto qualunque della linea d'azione della forza R_2 (supposto rigidamente connesso all'asta terminale MN) misurato nella direzione stessa della forza, dovrà infatti potersi esprimere come prodotto della grandezza di essa per il momento d'inerzia del sistema dei pesi elastici, preso rispetto alla sua linea d'azione; e ciò si traduce, nel caso attuale, nella relazione

$$SS_2 \cdot \text{sen } \beta = R_2 \cdot W \cdot (OK \cdot \text{sen } \beta)^2$$

Così dell'ellisse di elasticità cercata vengono ad esser noti quattro punti e le relative tangenti: più di quanto occorre per determinarla completamente.

Ma vi è anche un altro modo di arrivare alla soluzione dello stesso problema, che non è applicabile sempre, ma che, quando è applicabile, presenta sul primo indiscutibili vantaggi.

Supponiamo che la travatura ammetta una sezione canonica, ed immaginiamo per un momento che una sola asta della travatura si deformi, e precisamente proprio una delle tre aste interessate da quella sezione.

Siano UV i due nodi che quest'asta congiunge; sia O il punto di incontro degli assi delle altre due aste (figg. 63 e 64).

e l'ampiezza della rotazione che ne consegue:

$$\frac{s}{\delta} = R \cdot d \cdot \frac{l}{\delta^2 \cdot E \cdot A}$$

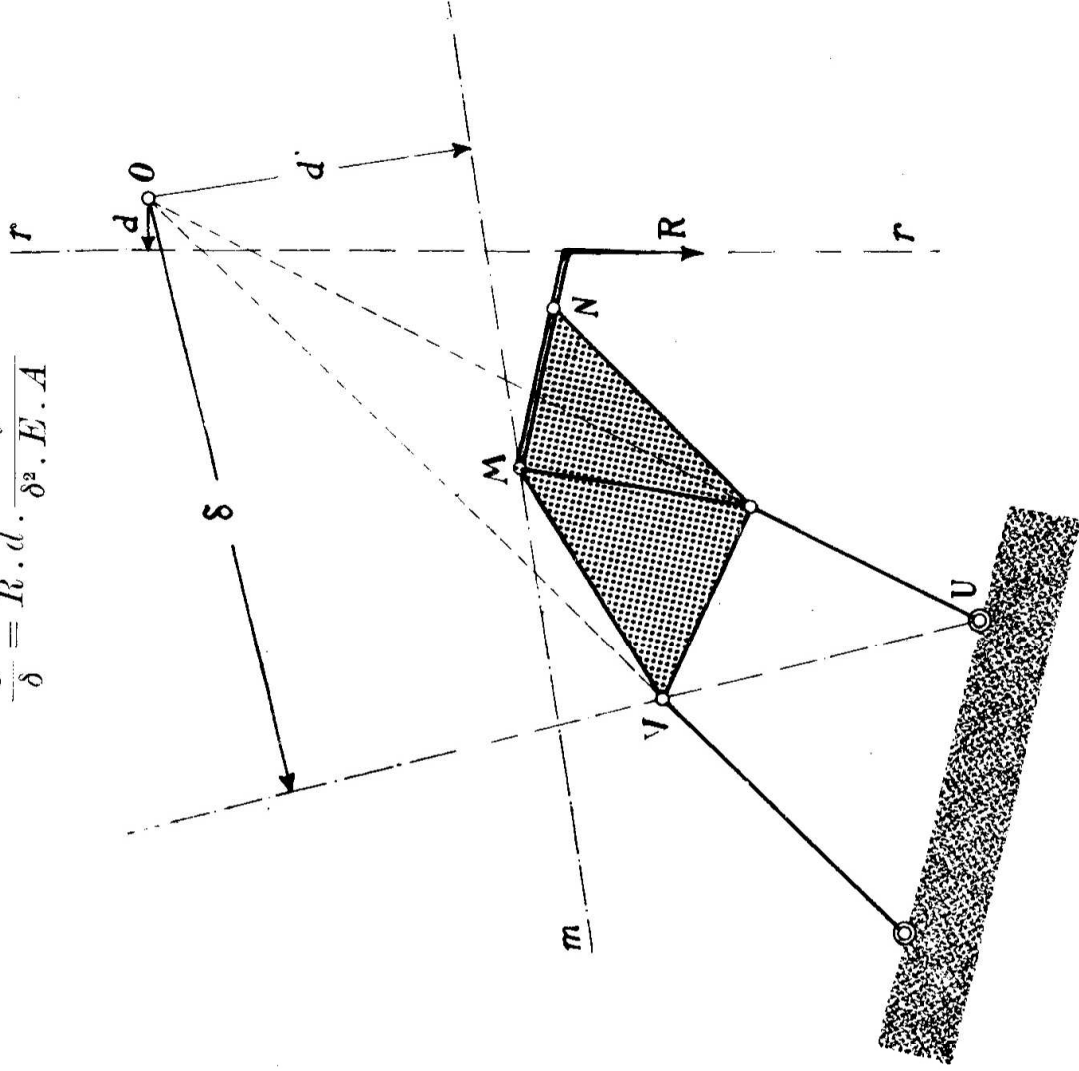


Fig. 64.

Dalla conoscenza dell'ampiezza della rotazione si passa facilmente a quella dello spostamento che un punto qualunque M , appartenente all'asta terminale o comunque connesso rigidamente ad essa, viene a subire, in una certa direzione qualunque, sempre in dipendenza della deformabilità della sola asta UV .

Basta indicare con d' la distanza del centro O dalla parallela m a quella direzione condotta per M ; quello spostamento si potrà allora rappresentare col prodotto

$$\frac{s}{\delta} d' = R \cdot d \cdot d' \cdot \frac{l}{\delta^2 \cdot E \cdot A}$$

che si può sempre mettere sotto la forma solita

$$w \cdot R \cdot d \cdot d'$$

introducendo il peso elastico

$$w = \frac{l}{\delta^2 \cdot E \cdot A} \quad (34)$$

dell'asta UV .

S'intende che questo peso elastico va, a tutti gli effetti, considerato come concentrato in O . Abbiamo visto infatti che il punto O funziona da centro di rotazione qualunque sia la linea d'azione della forza applicata all'asta terminale; nell'antipolarità che caratterizza questo particolarissimo caso di deformazione, il punto O deve dunque funzionare da antipolo di tutte le rette del piano che non passano per esso: ciò è quanto dire che l'ellisse di elasticità è degenera e viene tutta a coincidere col punto O .

Ora, quel che si è detto dell'asta UV si può evidentemente ripetere di tutte le aste della travatura, se questa ammette un sistema di sezioni canoniche.

Per il noto principio cinematico della sovrapposizione dei piccoli movimenti, si può allora pensare di dedurre dalla conoscenza degli spostamenti che M viene a subire per effetto delle deformazioni delle singole aste considerate separatamente, lo spostamento che lo stesso punto subirà nella travatura reticolare data quando tutte le aste che la compongono si deformano insieme.

Tale spostamento, misurato, ben s'intende, nella solita direzione m , si può allora porre sotto la forma

$$R \cdot \sum (w \cdot d \cdot d')$$

prodotto della forza data per la somma dei momenti di second'ordine dei pesi elastici quali dianzi definiti per le singole aste, presi tutti rispetto alla linea d'azione della forza ed a quella secondo cui si intendono misurati gli spostamenti.

Confrontando questo risultato col teorema generale che noi abbiamo enunciato a pag. 173, si è senz'altro condotti a concludere che il complesso dei pesi elastici w delle singole aste, si presenta come affatto equivalente, almeno dal punto di vista dei momenti del second'ordine che compaiono in questi nostri calcoli, al peso elastico W della travatura considerata nel suo insieme.

Più precisamente possiamo affermare:

- 1) che il peso elastico della travatura data è eguale alla somma dei pesi elastici delle singole aste di cui la travatura è composta;
- 2) che la sua ellisse di elasticità non è altro che l'ellisse centrale d'inerzia di quei pesi elastici parziali, concentrati, come si è detto poc'anzi, nei rispettivi centri.

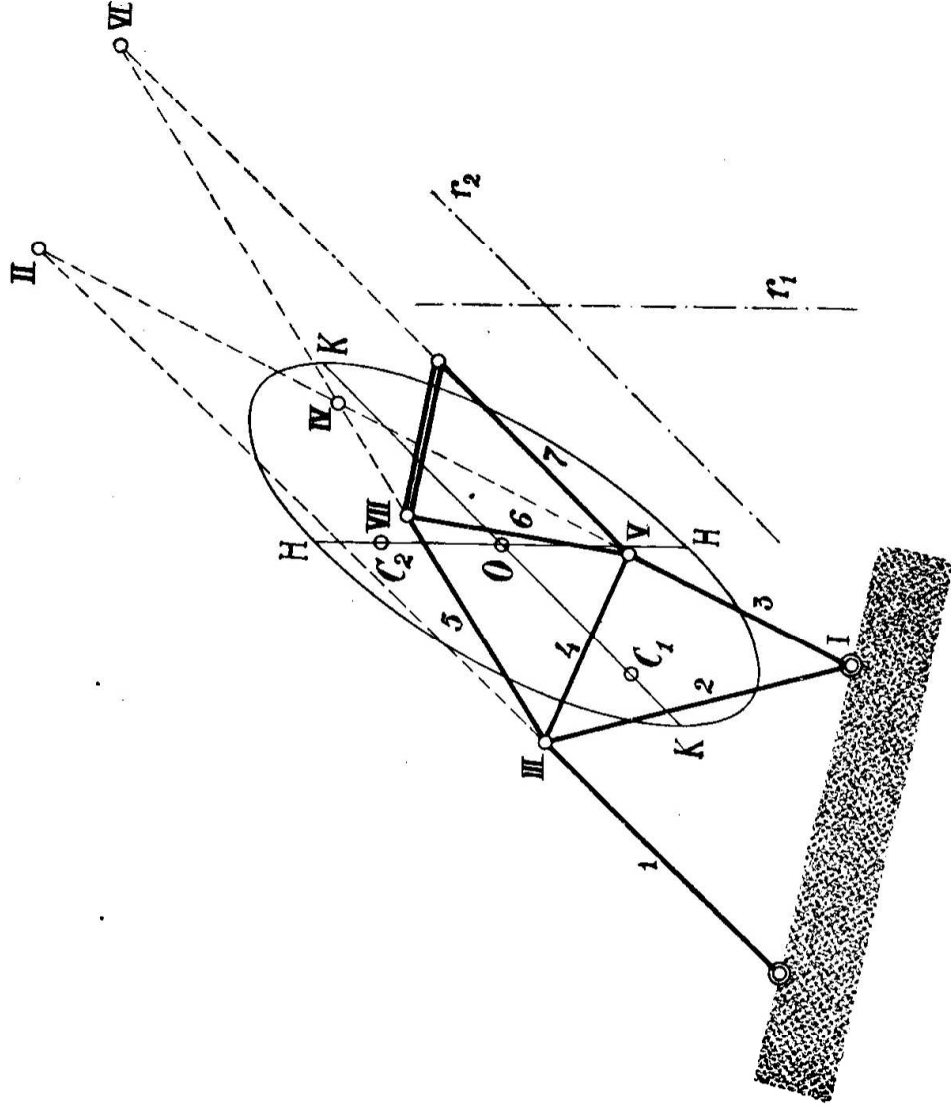


Fig. 65.

*
*
*

Così il problema della costruzione dell'ellisse di elasticità, per un gran numero di quelle travature di cui più frequentemente ha occasione di occuparsi il tecnico, resta ridotto ad una semplicissima questione di calcolo grafico.

Determinati i pesi elastici delle singole aste

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...

nonchè le posizioni dei punti

I, II, III, IV, V, VI, VII, ...

in cui quei pesi elastici si devono intendere concentrati (fig. 65), si incomincerà col determinarne il baricentro O .

Contemporaneamente si potranno trovare i momenti statici di quei pesi elastici per rapporto ad una retta r_1 arbitrariamente scelta nel piano della figura; si passerà quindi alla ricerca del centro C_1 di questi momenti statici.

Si avrà così in OC_1 la direzione del diametro dell'ellisse coniugato alla direzione r_1 .

Detto C'_1 il punto in cui la OC_1 incontra la r_1 (fig. 66), si costruirà la circonferenza che ha $C_1C'_1$ per diametro, si eleverà da O la perpendicolare, si ribalterà il segmento che la circonferenza intercetta su questa perpendicolare da una parte e dall'altra di O : si otterrà così il diametro KK dell'ellisse.

Si passerà poi alla determinazione dei momenti statici degli stessi pesi elastici per rapporto ad una nuova retta r_2 parallela ad OC_1 (fig. 65); e si determinerà il centro C_2 di questi momenti statici, che dovrà necessariamente giacere sulla parallela ad r_1 condotta per O .

Con questi elementi si potrà immediatamente costruire il diametro HH coniugato a KK .

Ed abbiamo detto già come, in queste condizioni, l'ellisse riesca completamente determinata.

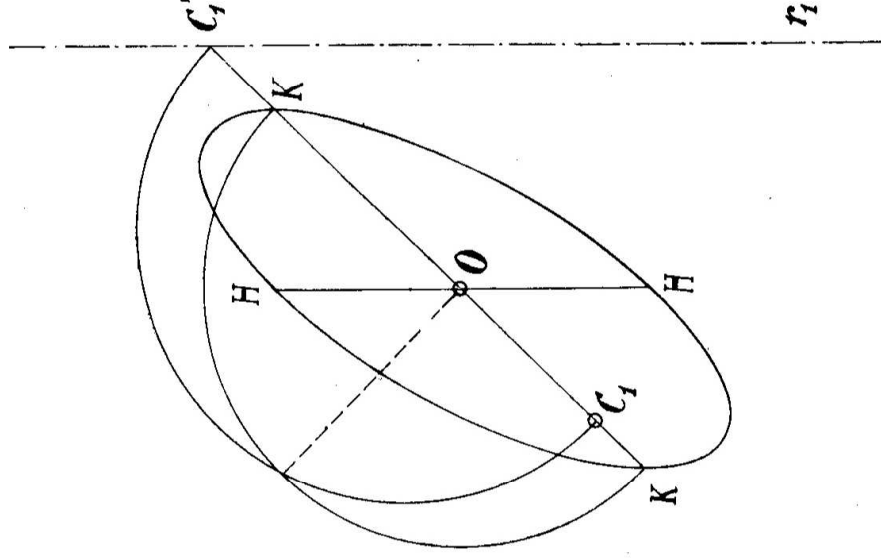


Fig. 66.

* *

Del resto la costruzione effettiva dell'ellisse di elasticità non è neppure, nella maggior parte dei casi, indispensabile.

Vi sono molti problemi, tra i più interessanti della pratica tecnica, a risolvere i quali basta la conoscenza del sistema dei pesi elastici concentrati relativi alle singole aste.

Immaginiamo, per esempio, di voler calcolare gli spostamenti che i varî nodi di una travatura reticolare subiranno, in una determinata direzione, per effetto di una forza R che, tanto per fissar le idee su di un caso concreto, supporremo verticale ed applicata in un punto generico dell'asta terminale nel modo indicato nella nostra figura 67.

È evidente che lo spostamento che, per effetto di una tal forza, subisce un nodo qualunque della travatura, sarà una funzione delle deformazioni che la forza stessa determina in quelle aste che servono di collegamento tra il nodo considerato ed il sistema fisso di riferimento.

Poco importa infatti, quando si tratta di calcolare lo spostamento di un nodo, il modo con cui si deformano le aste della porzione di travatura compresa fra tale nodo e l'asta terminale; questa porzione della travatura non ha, agli effetti del particolare problema proposto, altra funzione che quella di trasmettere la sollecitazione, ed a questa funzione assolverebbe egualmente bene anche se fosse, per esempio, perfettamente indeformabile.

Lo spostamento del nodo generico si potrà dunque sempre esprimere sotto forma di prodotto della grandezza della forza per la somma dei momenti di second'ordine dei pesi elastici di quelle sole tra le aste della travatura che servono di collegamento tra il nodo considerato ed il sistema fisso di riferimento; momenti presi, ben inteso, rispetto alla linea d'azione della forza ed alla parallela condotta dal nodo stesso alla direzione secondo cui si intendono misurati gli spostamenti.

* *

Per spiegare in poche parole come si possa giungere graficamente al calcolo di queste somme di momenti del second'ordine, impieghiamo momentaneamente la serie dei numeri naturali

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots$$

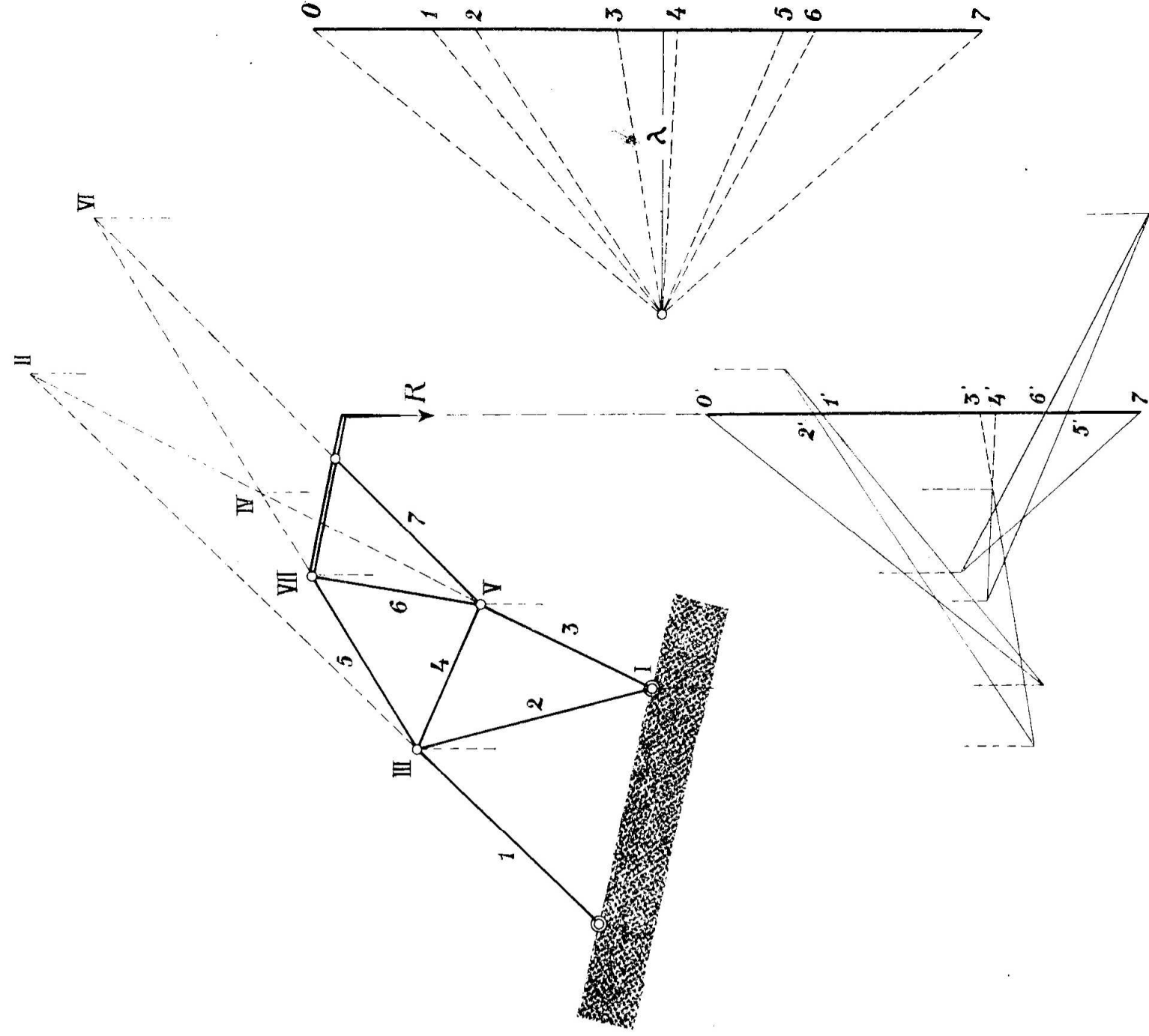


Fig. 67.

per denotare le singole aste della travatura in quell'ordine in cui esse vanno considerate quando si vuol giustificare il progressivo collegamento dei varî nodi al sistema fisso di riferimento; ed indichiamo con

$$0.1, 1.2, 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7, \dots$$

i rispettivi pesi elastici, e con

$$I, II, III, IV, V, VI, VII, \dots$$

i centri in cui, a norma di quel che si è detto dianzi, gli stessi pesi elastici debbono intendersi concentrati.

Consideriamo questi pesi elastici come delle forze aventi tutte quella medesima direzione (verticale) secondo cui si è supposta agire la forza esterna R .

Collegghiamoli con un poligono funicolare, di distanza polare arbitraria λ , e prolunghiamo i successivi lati di questo fino ad incontrare la linea d'azione di R .

È noto che ciascuno dei segmenti

$$0'.1', 1'.2', 2'.3', 3'.4', 4'.5', 5'.6', 6'.7', \dots$$

su di essa linea intercetti da due successivi lati del poligono funicolare — moltiplicato per la distanza polare λ — ci dà la misura del momento statico di uno dei pesi elastici considerati, preso rispetto alla linea d'azione stessa.

Consideriamo ora questi momenti statici come delle nuove forze, applicate in quei medesimi centri a cui avevamo già applicati i singoli pesi elastici, ma dirette parallelamente a quella direzione secondo cui si vogliono misurare gli spostamenti.

Nella nostra figura 68 questa direzione è stata essa pure assunta verticale, come quella della forza R , ma questa particolare scelta non implica evidentemente la benchè minima limitazione nelle conclusioni a cui stiamo per giungere; tanto è vero che nella figura 69 lo stesso procedimento è stato applicato assumendo come direzione per la misura degli spostamenti la direzione orizzontale.

Collegghiamo quindi le forze momenti statici con un nuovo poligono funicolare, la cui distanza polare indicheremo con μ ; esso ci fornirà evidentemente i momenti statici dei momenti di statici precedentemente calcolati, vale a dire i momenti di second'ordine dei primitivi pesi elastici.

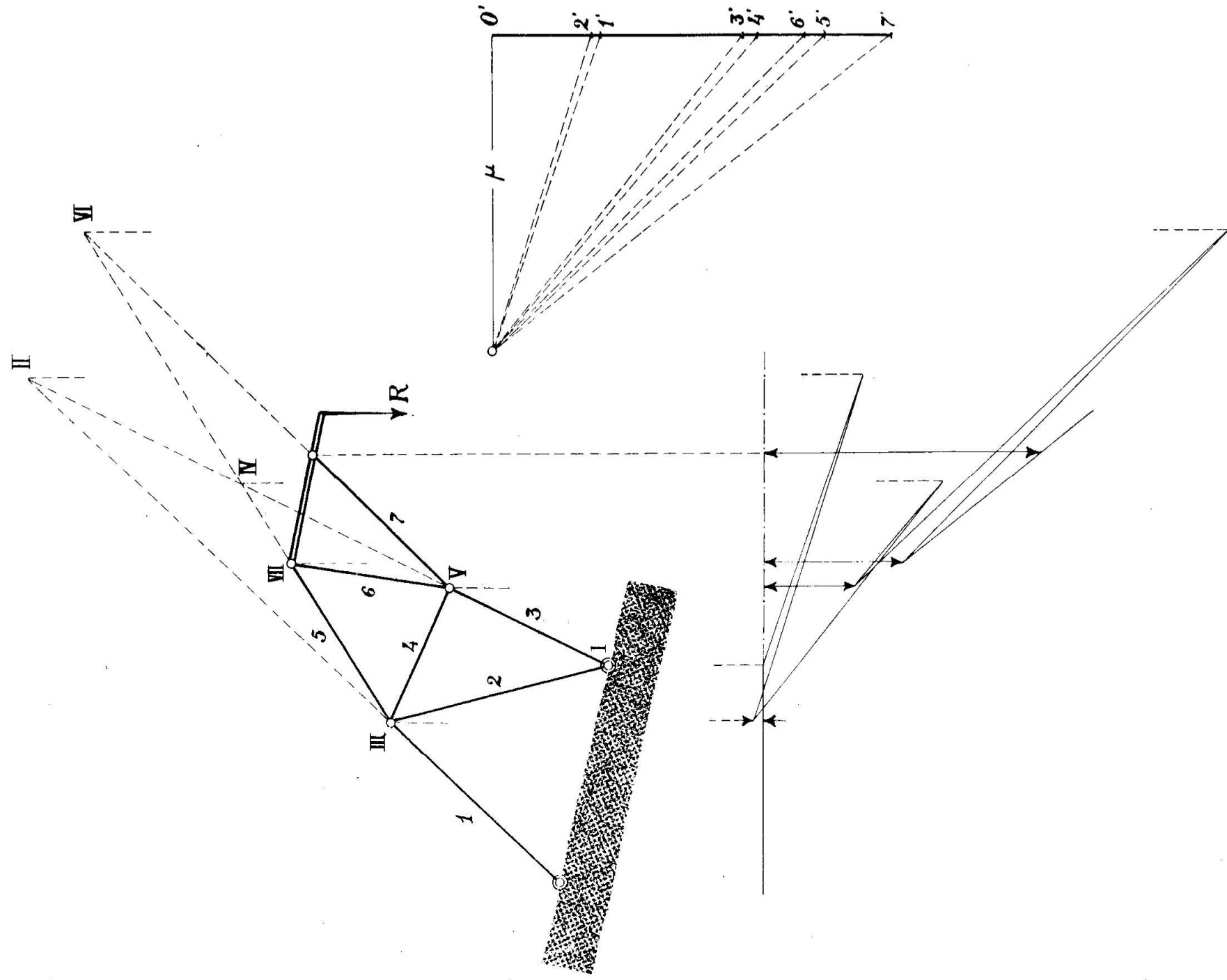
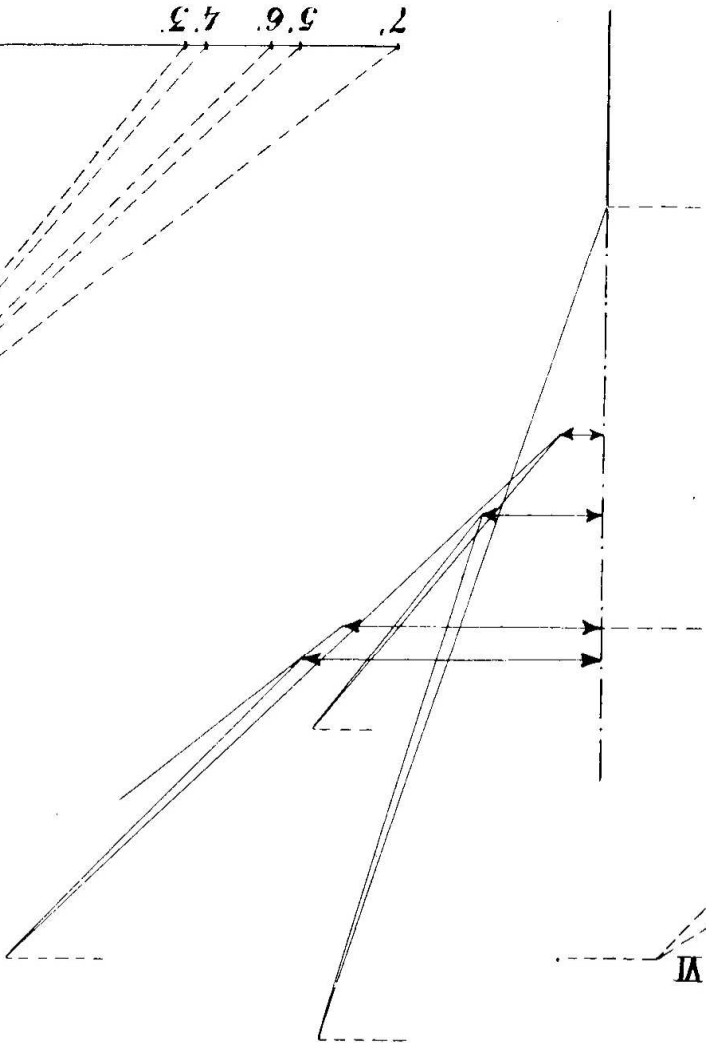


Fig. 68.



A schematic diagram of a mechanism. It features a fixed frame (link 1) represented by a hatched area at the top right. A crank (link 2) is pivoted to the frame at joint I and is connected to a connecting rod (link 3) at joint V. The connecting rod (link 3) is pivoted to a slider (link 4) at joint VI. The slider (link 4) moves vertically along a guide, indicated by a dashed line and an arrow labeled 'H'. A second connecting rod (link 5) is pivoted to the slider at joint VII and to a lever (link 6) at joint III. The lever (link 6) is pivoted to the frame at joint II and has a weight (link 7) attached to its end at joint IV. The weight (link 7) is represented by a downward-pointing arrow. The joints are labeled with Roman numerals: I, II, III, IV, V, VI, and VII.

Più precisamente, la sua ordinata y verticale (od orizzontale) compresa fra quel lato estremo del poligono funicolare che corrisponde al sistema fisso di riferimento e quel lato qualunque che corrisponde al nodo generico che si vuol considerare, ci darà la misura — nella base $\lambda \mu$ — del momento di second'ordine del gruppo dei pesi elastici delle aste che servono a collegare questo nodo al sistema fisso di riferimento; momento preso, s'intende sempre, per rapporto alla solita linea d'azione fissa della forza R ed alla verticale (o rispettivamente alla orizzontale) condotta per il nodo generico considerato.

Queste ordinate, che nelle nostre figure sono state messe in particolare evidenza a mezzo di apposite frecce, si potranno senz'altro interpretare come le misure degli spostamenti verticali (ovvero orizzontali) che i varî nodi subiscono nella deformazione della travatura determinata dalla data forza esterna R .

Che se poi si rammenta il teorema di Betti, e l'applicazione che ne abbiamo fatta a pag. 161, si può subito passare da questa ad un'altra non meno interessante interpretazione dello stesso poligono, riconoscendo in esso la linea di influenza degli spostamenti verticali del punto di applicazione della R dovuti ad una forza verticale (ovvero orizzontale) la quale si sposti dall'uno all'altro nodo della travatura mantenendosi sempre costante in grandezza e parallela a se stessa.

*
*
*

Un'ultima parola resta a dirsi a proposito della scelta delle distanze polari e della scala in cui gli spostamenti vanno letti.

Abbiamo infatti dimostrato che lo spostamento di un nodo generico, in una direzione arbitraria, dovuto alla forza R — o, ciò che fa esattamente lo stesso, lo spostamento del punto a cui si è supposta applicata la R , nella direzione stessa della R , dovuto ad una forza eguale, ma applicata in quel nodo ed in quella direzione — è misurato dal prodotto

$$R \cdot \lambda \cdot \mu \cdot y$$

Ora questo prodotto, dovendo per definizione essere il prodotto di una forza per un momento di second'ordine di pesi

elastici, dovrà, oltre al fattore forza, contenere un fattore avente le dimensioni di un peso elastico e due fattori aventi le stesse dimensioni di due lunghezze.

Dei tre segmenti λ , μ ed y del disegno, uno dunque, per esempio λ , si dovrà leggere nella scala adottata per la rappresentazione grafica dei pesi elastici, mentre gli altri due, μ ed y , si leggeranno nella scala delle lunghezze, vale a dire nella scala adottata per rappresentare in disegno la travatura.

Volendo che lo spostamento cercato sia senz'altro misurato dall'ordinata y del secondo poligono funicolare, basterebbe valersi dell'arbitrarietà di scelta delle distanze polari, ed assumere per esempio

$$\mu = \frac{1}{R \cdot \lambda}$$

ciò che non contraddice alle condizioni sopra enunciate, perchè quando a λ si attribuiscono le dimensioni di un peso elastico (cioè dell'inverso del prodotto di una forza per una lunghezza) μ viene ad essere omogeneo con una lunghezza.

Non bisogna però dimenticare che le deformazioni di cui noi ci occupiamo, come abbiamo avuto occasione di dire e di ripetere più di una volta, sono sempre molto piccole a fronte delle dimensioni della travatura cui esse si riferiscono.

Qualunque sia la scala in cui la travatura stessa è stata rappresentata in disegno, le deformazioni devono per conseguenza apparire nel disegno stesso praticamente invisibili, se non si provvede ad ingrandirle opportunamente.

Ora, questo indispensabile cambiamento di scala delle ordinate y si presenta particolarmente facile a realizzarsi nel caso di cui ci stiamo attualmente occupando.

Se si vuole, infatti, che l'ordinata y rappresenti lo spostamento ingrandito ξ volte rispetto alla scala del disegno, basta adottare nella costruzione grafica sopra descritta una distanza polare μ che sia ξ volte più piccola di quella dianzi calcolata.

Più generalmente, basta scegliere le varie distanze polari che compaiono nel disegno in modo che risulti

$$\mu = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{R \cdot \lambda}$$

* * *

Una sola difficoltà nasce nell'applicazione di questo procedimento di calcolo delle deformazioni, difficoltà la quale qualche volta si può seriamente frapporre alla sua utilizzazione nei casi pratici.

La difficoltà deriva dal fatto che i vari pesi elastici devono, come si è detto, essere considerati e collegati nell'ordine in cui si succedono le aste nella loro funzione di collegamento dei singoli nodi al sistema fisso di riferimento.

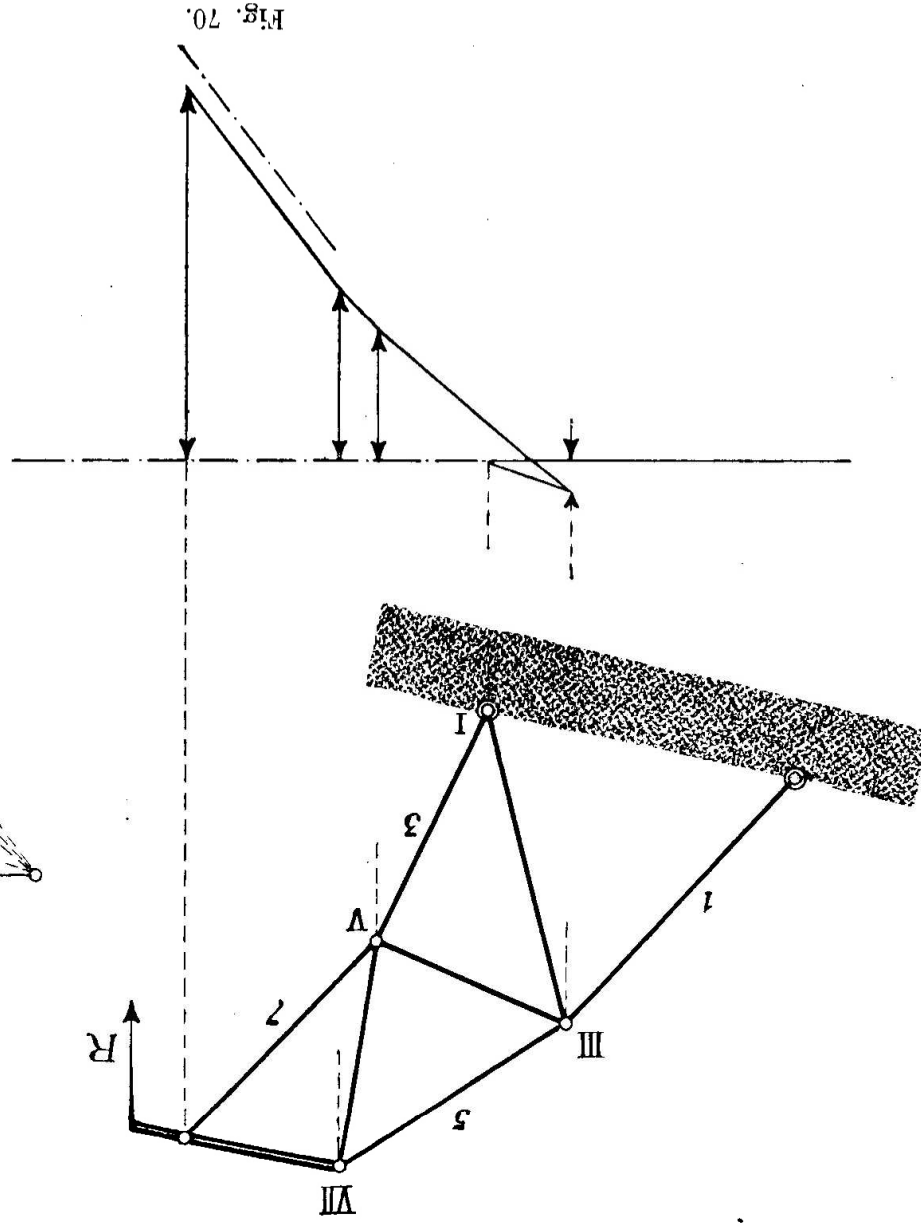
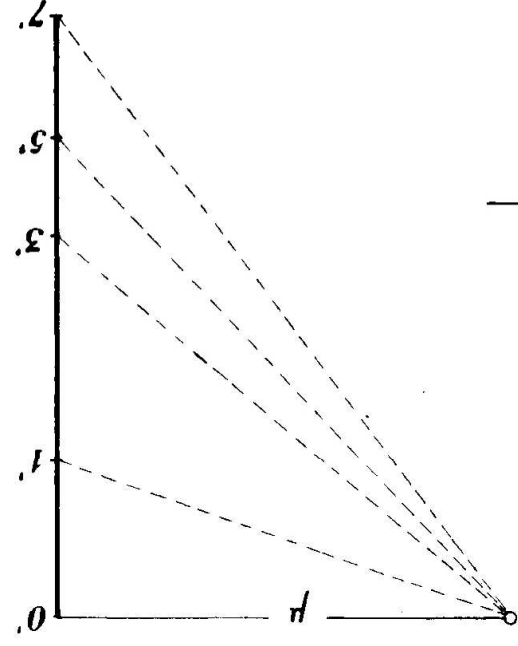
E ciò dà luogo a poligoni funicolari variamente intrecciati, i quali, per poco che il numero delle aste sia grande, assumono un aspetto molto complicato che male si presta alla loro interpretazione.

La difficoltà diviene poi veramente grave quando i centri di applicazione dei pesi elastici di alcune delle aste vanno a cadere fuori dei limiti del disegno, o addirittura all'infinito, come può molto facilmente succedere, nelle stesse travature del tipo triangolare, per le aste di parete, se le coppie di aste di contorno interessate dalle rispettive sezioni canoniche formano fra loro angoli molto piccoli, o addirittura nulli.

È però facile convincersi, quando si prendono ad esaminare i singoli casi concreti, che l'influenza delle aste di parete nel fenomeno della deformazione complessiva di una travatura, è quasi sempre assai piccola a fronte di quella delle aste di contorno.

Per questa ragione, in molti dei calcoli della scienza delle costruzioni — e soprattutto in quelli che hanno per iscopo la determinazione delle incognite iperstatiche — si può raggiungere una approssimazione più che soddisfacente anche trascurando completamente la deformabilità delle aste di parete, e quindi mettendo in conto, nelle costruzioni grafiche dianzi descritte, i pesi elastici delle sole aste di contorno, i quali pesi elastici, nelle travature del tipo triangolare, hanno per centri di applicazione i nodi stessi della travatura.

Quando si opera a questo modo, anche la difficoltà accennata scompare, ed il procedimento di calcolo delle deformazioni basato sull'uso dei pesi elastici diviene singolarmente semplice e spedito.



Valga a titolo di esempio la fig. 70, nella quale le costruzioni stesse della fig. 68 sono state ripetute limitatamente alle sole aste di contorno. Il paragone si svolge, in verità, nelle condizioni più sfavorevoli, per il fatto che nella impostazione dei calcoli, alle aste di parete era stata di proposito attribuita una deformabilità molto rilevante, nell'intento di rendere meglio visibili nelle loro particolarità i vari poligoni funicolari e di mettere bene in evidenza il loro modo di intrecciarsi. Ciò malgrado, l'entità delle differenze tra gli spostamenti dei punti dell'asta terminale quali risultano dai calcoli semplicemente approssimati della fig. 70 e quelli rigorosamente calcolati in fig. 68 (e riportati con linea a tratti e punti nella fig. 70) è tale da giustificare appieno l'uso invalso fra i tecnici di tener conto soltanto delle deformazioni delle aste di contorno.
