

VII.

I teoremi di Maxwell e di Betti.

Consideriamo una travatura reticolare — staticamente determinata od indeterminata, poco importa, — ed immaginiamo di assoggettarla ad un dato sistema di forze esterne F_1 .

Siano S_1 gli sforzi che nelle varie aste della travatura si producono all'atto dell'applicazione di quelle forze, e per effetto della loro azione, ed

$$s_1 = \frac{S_1 \cdot l}{E \cdot A}$$

le corrispondenti variazioni di lunghezza delle aste, caratterizzanti il passaggio della travatura dallo stato naturale al suo nuovo stato di equilibrio.

Supponiamo poi che, soppresso il sistema di forze F_1 , e restituita così la travatura al suo stato naturale, questa venga in un secondo tempo assoggettata ad un secondo sistema di forze esterne F_2 .

Siano al solito S_2 gli sforzi relativi a questa seconda condizione di carico ed

$$s_2 = \frac{S_2 \cdot l}{E \cdot A}$$

le corrispondenti variazioni di lunghezza delle aste.

Noi sappiamo che la relazione fondamentale

$$\Sigma F \cdot f = \Sigma S \cdot s$$

è applicabile tutte le volte che le F e le S costituiscono un sistema di forze in equilibrio, e che le s e le f rappresentano le variazioni di lunghezza delle aste e gli spostamenti dei nodi (nelle direzioni delle forze F) relativi ad una medesima varia-

zione possibile di configurazione, che non è però affatto necessario che sia proprio quella che deriva dalla applicazione delle F .

Tale relazione può dunque in particolare applicarsi sia assumendo come forze le F_1 ed S_1 e come variazioni di lunghezza le s_2 , sia anche assumendo come forze le F_2 ed S_2 e come variazioni di lunghezza le s_1 .

Naturalmente nel primo caso bisognerà assumere come spostamenti f gli spostamenti che i varî nodi della travatura subiscono, nelle direzioni delle forze del primo sistema, per effetto delle forze del secondo sistema; li indicheremo simbolicamente con $f_{1,2}$.

Nell'altro caso invece bisognerà assumere come spostamenti f quelli che gli stessi nodi subiscono nelle direzioni delle forze del secondo sistema, per effetto delle forze del primo sistema: li indicheremo alla lor volta con $f_{2,1}$.

Si ottengono così le due relazioni

$$\sum F_1 \cdot f_{1,2} = \sum S_1 \cdot s_2 = \sum S_1 \frac{S_2 \cdot l}{E \cdot A}$$

e

$$\sum F_2 \cdot f_{2,1} = \sum S_2 \cdot s_1 = \sum S_2 \frac{S_1 \cdot l}{E \cdot A}$$

da cui si ricava subito l'eguaglianza

$$\Sigma F_1 \cdot f_{1,2} = \Sigma F_2 \cdot f_{2,1} \quad (31)$$

che esprime il teorema:

Date due diverse deformazioni di una travatura reticolare, relative a due diversi sistemi di forze esterne, il lavoro che le forze del primo sistema compirebbero qualora ai varî loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la seconda deformazione, è eguale al lavoro che compirebbero le forze del secondo sistema nell'ipotesi che ai loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la prima deformazione.

Questo teorema o "principio di reciprocità", che ENRICO BETTI dimostrò per la prima volta nel 1872 nella sua classica *Teoria dell'elasticità* ⁽¹⁾, non è altro che un caso particolare di

⁽¹⁾ *Il Nuovo Cimento*, serie 2^a, tom. VII ed VIII.

un più generale principio di meccanica; ma, anche se ci si limita a considerarlo nel solo ambito della particolarissima teoria delle travature reticolari di cui qui ci stiamo occupando, la reciprocità che esso stabilisce fra differenti deformazioni di una medesima travatura trova utile applicazione nei più svariati problemi; si può anzi dire che non v'è problema in tutta questa teoria a cui questo elegantissimo tra i principii della fisica matematica non possa non venir applicato con qualche vantaggio.

*
*
*

Supponiamo per un momento che le forze del secondo sistema si riducano ad un'unica forza concentrata F_2 applicata ad un certo ben determinato nodo della travatura secondo una certa direzione arbitraria.

Se si indica con $f_{2,1}$ la componente secondo questa direzione dello spostamento che il nodo in discorso subisce sotto l'azione del primo sistema di forze esterne, si può senz'altro scrivere il secondo membro della (31) sotto la forma del semplice prodotto

$$F_2 \cdot f_{2,1}$$

Per

$$F_2 = 1$$

si ottiene senz'altro la misura dello spostamento $f_{2,1}$ in funzione delle componenti di spostamento dei varî nodi della travatura supposta sollecitata dalla sola forza unitaria suddetta; si ha infatti

$$\Sigma F_1 \cdot f_{1,2} = f_{2,1} \quad (32)$$

Come caso particolare, se anche il primo sistema di forze si riducesse ad un'unica forza concentrata F_1 applicata in un certo altro nodo qualunque e secondo una qualunque direzione, anche il primo membro della equazione di Betti si ridurrebbe al solo prodotto

$$F_1 \cdot f_{1,2}$$

$f_{1,2}$ essendo lo spostamento che il nodo a cui è applicata la forza F_1 subirebbe nella direzione stessa di questa forza per effetto della forza F_2 a cui si è supposto ridotto il secondo sistema.

Per

$$F_1 = F_2 = 1$$

si troverebbe allora

$$f_{1,2} = f_{2,1} \quad (33)$$

Dati dunque in una travatura reticolare due nodi qualunque, che per semplicità designeremo addrittura coi numeri 1 e 2, e per essi due direzioni r_1 ed r_2 ad arbitrio, *lo spostamento che il nodo 1 subisce nella direzione r_1 sotto l'azione di una forza unitaria applicata al nodo 2 nella direzione r_2 , è eguale allo spostamento che subirebbe questo medesimo nodo 2 in questa stessa direzione r_2 per effetto di una forza pure unitaria la quale agisse sul nodo 1 nella direzione r_1 .*

Sotto questa forma particolarissima il principio di reciprocità era stato già enunciato da J. C. MAXWELL fin dal 1864.

*
*
*

Sotto questa forma il principio stesso può del resto venir direttamente dimostrato nel modo seguente.

Immaginiamo che sulla travatura venga in un primo tempo applicata soltanto la forza F_1 ed indichiamo con $f_{1,1}$ lo spostamento che il nodo su cui la forza agisce subisce, nella direzione stessa della forza, per effetto di questa.

Il corrispondente valore del lavoro di deformazione si potrà, grazie al teorema di Clapeyron, esprimere sotto la forma

$$\frac{1}{2} F_1 \cdot f_{1,1}$$

Immaginiamo ora di introdurre la seconda forza F_2 . Sotto la sua azione il nodo a cui è applicata la F_1 subirà un ulteriore spostamento, la cui proiezione sulla direzione di F_1 (in conformità colle convenzioni fatte dianzi) noi indicheremo con $f_{1,2}$. Durante questo spostamento del suo punto di applicazione la forza F_1 compirà un lavoro evidentemente misurato dal prodotto

$$F_1 \cdot f_{1,2}$$

Naturalmente anche la nuova forza F_2 avrà nel frattempo eseguito un certo lavoro. Se si suppone che la forza sia stata

applicata senza urti, vale a dire con intensità gradatamente crescente dal valor zero al suo valore finale, e se, com'è ormai naturale di fare, si indica con $f_{2,2}$ lo spostamento che sotto l'azione della forza F_2 viene a subire il nodo a cui detta forza è applicata, nella direzione stessa della forza, questo lavoro sarà

$$\frac{1}{2} F_2 \cdot f_{2,2}$$

Il lavoro di deformazione della travatura nello stato finale di equilibrio che essa assume sotto l'azione simultanea delle due forze F_1 ed F_2 , dovrà dunque esser misurato dalla somma

$$\frac{1}{2} F_1 \cdot f_{1,1} + F_1 \cdot f_{1,2} + \frac{1}{2} F_2 \cdot f_{2,2}$$

Ma allo stesso identico stato finale di equilibrio si sarebbe evidentemente arrivati se si fosse supposto di applicare alla travatura dapprima la sola forza F_2 e di aggiungere poi, colle stesse cautele, la F_1 ; nel qual caso si sarebbe però arrivati all'espressione

$$\frac{1}{2} F_2 \cdot f_{2,2} + F_2 \cdot f_{2,1} + \frac{1}{2} F_1 \cdot f_{1,1}$$

Dal paragone di queste due espressioni, che devono necessariamente essere identicamente eguali, si ricava l'equazione

$$F_1 \cdot f_{1,2} = F_2 \cdot f_{2,1}$$

la quale, quando le due forze hanno intensità eguali, si riduce a quella

$$f_{1,2} = f_{2,1} \quad (33)$$

che esprime il principio di reciprocità sotto la forma particolare datagli dal Maxwell.

*
* *
*

Di questo principio vogliamo qui indicar subito alcune caratteristiche conseguenze ed alcune importantissime applicazioni.

Immaginiamo, per incominciare, di sapere individuare, in grandezza, direzione e senso, lo spostamento $B'B''$ che il nodo B

della travatura reticolare data subirebbe per effetto di una forza unitaria applicata ad un certo altro suo nodo A in una certa direzione qualunque a (fig. 56).

Il teorema di Maxwell viene allora a stabilire l'eguaglianza tra lo spostamento di A nella direzione a , prodotto da una

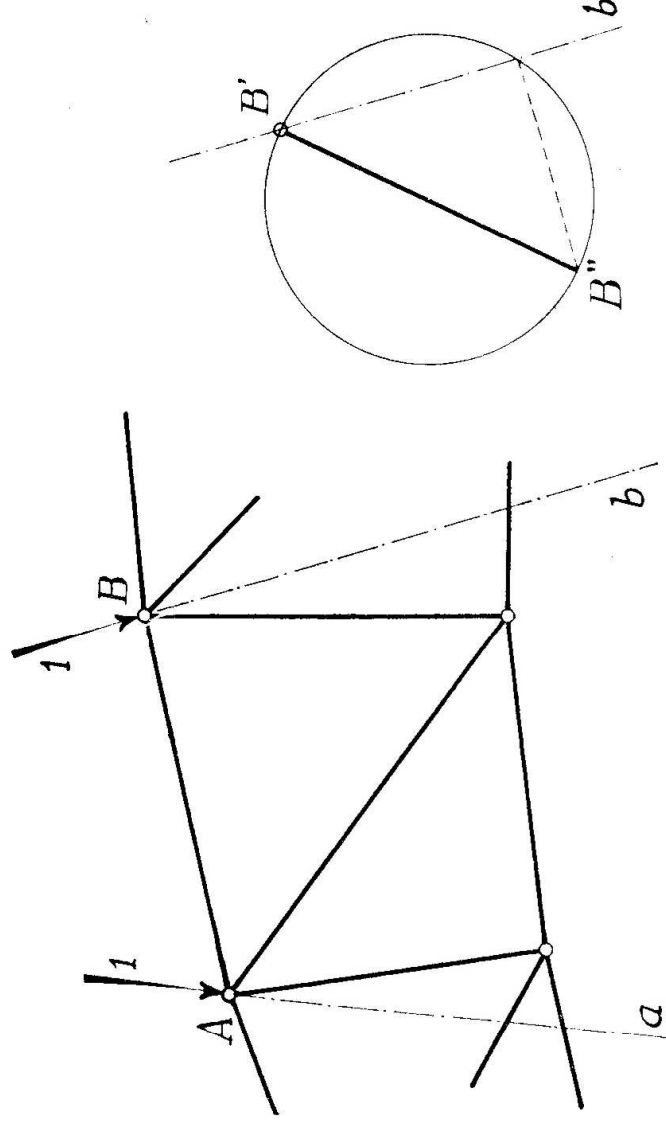


Fig. 56.

forza unitaria applicata in B secondo la direzione arbitraria b , e la proiezione del vettore $B'B''$ su questa direzione.

Se pertanto si suppone questa direzione variabile a volontà, se cioè si immagina che la forza applicata in B possa prendere tutte le possibili direzioni — possa cioè ruotare comunque attorno a B — senza per altro mutar di grandezza, lo spostamento di A nella direzione a deve a sua volta variare come la proiezione di $B'B''$ sulla direzione della forza, il che è quanto dire come il segmento che sulla parallela condotta per B' alla linea d'azione della forza viene intercettato dalla circonferenza che ha $B'B''$ per diametro.

Veniamo ad un secondo esempio, un po' più complesso in apparenza, ma anche più importante per la varietà delle applicazioni a cui si presta.

Immaginiamo che siano stati in qualche modo calcolati gli spostamenti

$$f_a, f_b, f_c, \dots$$

che certi nodi $A, B, C, \dots$ di una data travatura reticolare subiscono, in una ben determinata direzione r , per effetto della solita forza unitaria applicata in un nodo generico N nella direzione arbitraria n .

In virtù del teorema di Betti l'espressione

$$F_a \cdot f_a + F_b \cdot f_b + F_c \cdot f_c + \dots$$

misura lo spostamento che il nodo N subirebbe nella direzione n qualora la travatura venisse sollecitata da un sistema di forze

$$F_a, F_b, F_c, \dots$$

tutte parallele ad r ed applicate rispettivamente ai nodi $A, B, C, \dots$.

Un simile stato di cose si presenta nei problemi pratici tutte le volte che si deve studiare una travatura sopportante un complesso di carichi paralleli per il tramite di una soprastruttura del tipo di quella schematicamente rappresentata nella nostra fig. 57 a pagina seguente.

Se, come accade di solito, la soprastruttura è o si può ritenere opportunamente sezionata in corrispondenza di ciascuno dei nodi della travatura su cui essa riposa, per modo che ciascun suo campo riesca agli effetti statici del tutto indipendente dai campi adiacenti, ad ogni carico applicato P la cui linea d'azione disti di z_a e di z_b dai due nodi A e B che limitano il campo su cui il carico insiste, si possono sempre immaginar sostituite le sue due componenti aventi per linee d'azione le parallele condotte per quei medesimi due nodi alla linea d'azione di P .

Dette componenti sono notoriamente misurate da

$$F'_a = P \frac{z_b}{z_a + z_b}$$

e da

$$F'_b = P \frac{z_a}{z_a + z_b}$$

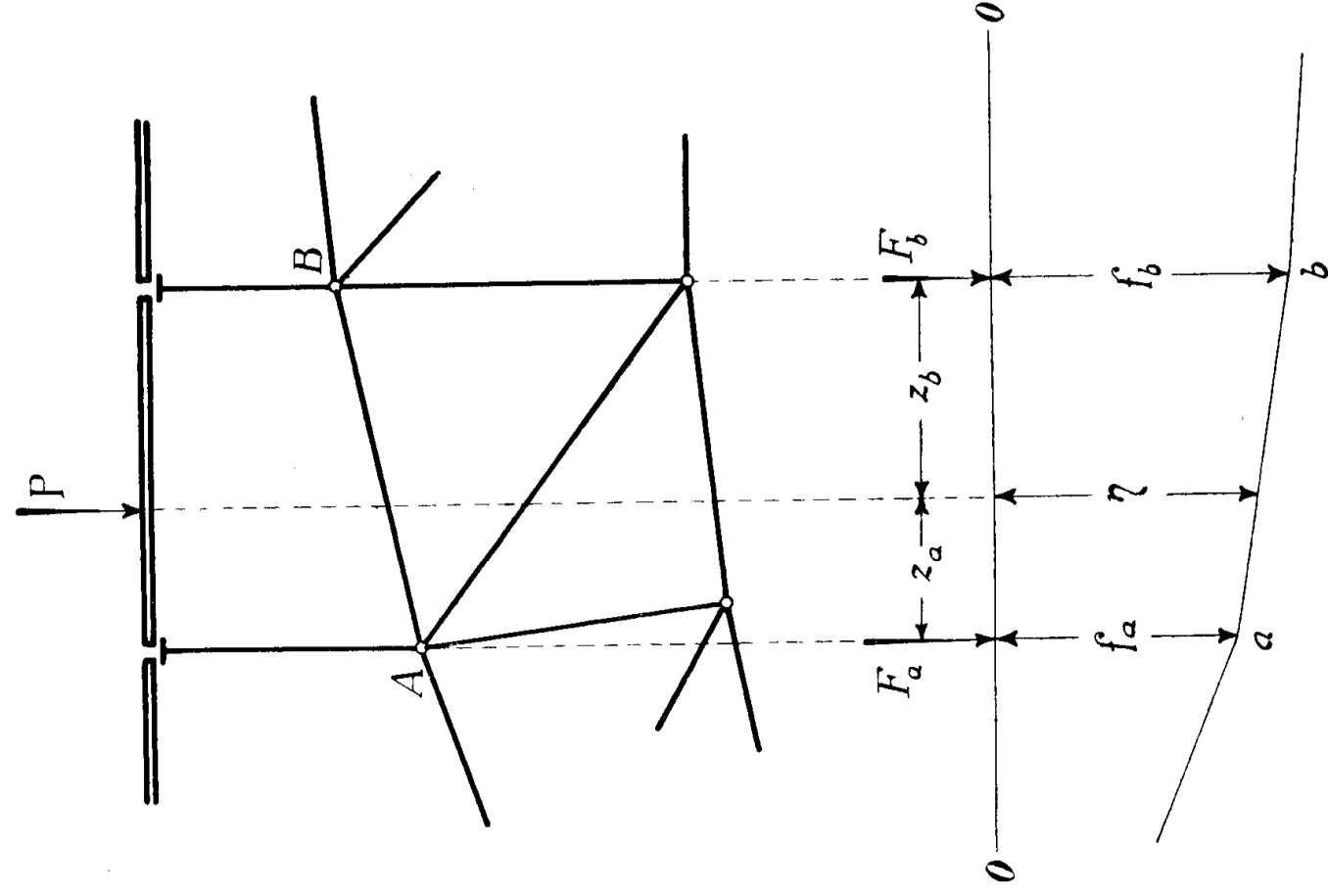


Fig. 57.

Ora se si fa la somma dei prodotti di queste componenti per i corrispondenti valori f_a ed f_b degli spostamenti dei due nodi predetti, si trova un'espressione della forma

$$F_a f_a + F_b f_b = P \left(f_a \frac{z_b}{z_a + z_b} + f_b \frac{z_a}{z_a + z_b} \right)$$

la quale si può molto semplicemente rappresentare col prodotto

$$P \cdot \eta$$

se con η si designa l'ordinata intercetta sulla linea d'azione di P dal trapezio che ha per basi i due spostamenti f_a ed f_b .

Così stando le cose, si immaginino condotte per i diversi nodi $A, B, C, \dots$ le parallele alla direzione fissa r ; e su ciascuna di esse, a partire da una trasversale OO , si pensino segnati dei segmenti rappresentanti in grandezza e segno gli spostamenti

$$f_a, f_b, f_c, \dots$$

La spezzata $a b c \dots$ che ha gli estremi di questi segmenti per vertici, riferita ad OO come fondamentale, rappresenta quella che si potrebbe chiamare la deformata secondo la direzione r della poligonale $A, B, C, \dots$ o addirittura della soprastruttura portante i carichi, per la particolare condizione di carico rappresentata dalla forza unitaria applicata in N nella direzione n .

Ma in virtù del teorema di Betti quella stessa spezzata rappresenta anche la legge secondo cui varierebbe lo spostamento di N nella direzione n sotto l'azione di una forza unitaria la quale, mantenendosi sempre parallela alla direzione fissa r , si spostasse a volontà sulla soprastruttura.

Perciò tale spezzata prende anche il nome di "linea di influenza", dello spostamento di N nella direzione n .

**

Un interessante corollario del teorema di Betti si ottiene se si considera il caso in cui uno dei due sistemi di forze, per esempio il secondo, si riduce a due sole forze, eguali e contrarie, applicate a due nodi A e B della travatura (fig. 58).

È ovvio che queste forze dovranno necessariamente avere per linea comune d'azione la congiungente di quei due nodi: supporremo per semplicità che la loro grandezza sia eguale all'unità e che esse siano rivolte verso l'esterno del segmento finito AB sicchè facciano lavoro positivo quando la distanza AB subisce un incremento positivo.

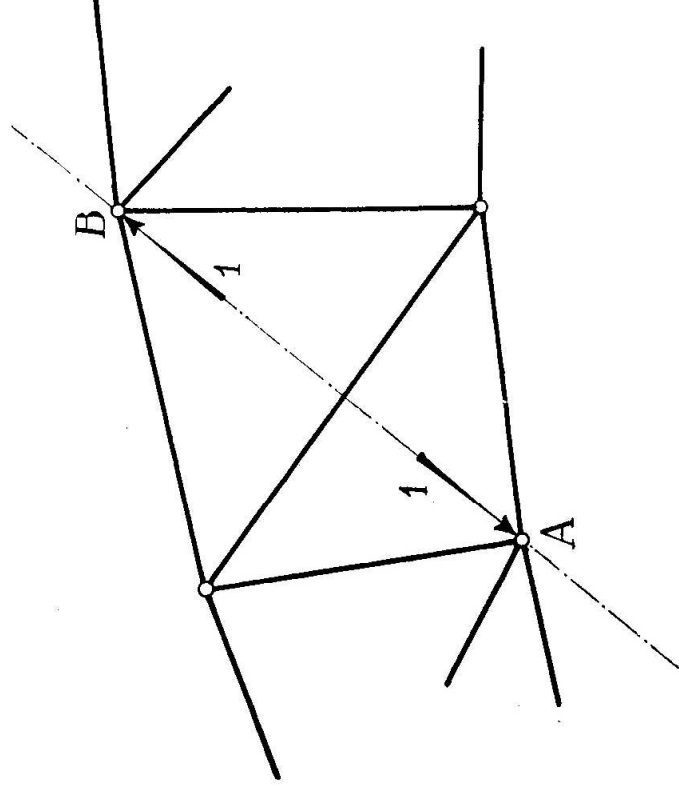


Fig. 58.

Siano ora F le forze del primo sistema e δ la variazione (piccolissima) della distanza dei due nodi AB che esse forze determinano; epperò sia $1 \cdot \delta$ il lavoro che in questa variazione di configurazione compirebbero le forze del secondo sistema.

Se si suppongono noti gli spostamenti f che i singoli punti di applicazione delle forze F subirebbero, nelle direzioni stesse delle F , nella deformazione determinata dalle due forze eguali e contrarie applicate in A ed in B , la variazione δ si può senz'altro ricavare dall'equazione di Betti

$$\Sigma F \cdot f = \delta$$

Come caso particolare, quando le forze del primo sistema si riducono ad una forza sola

$$F = 1$$

applicata ad un nodo generico N in una direzione arbitraria n , quell'equazione si riduce a

$$f = \delta$$

e ci dice che: *la variazione di distanza di due nodi A B dovuta all'azione di una forza unitaria applicata ad un altro nodo qua-*

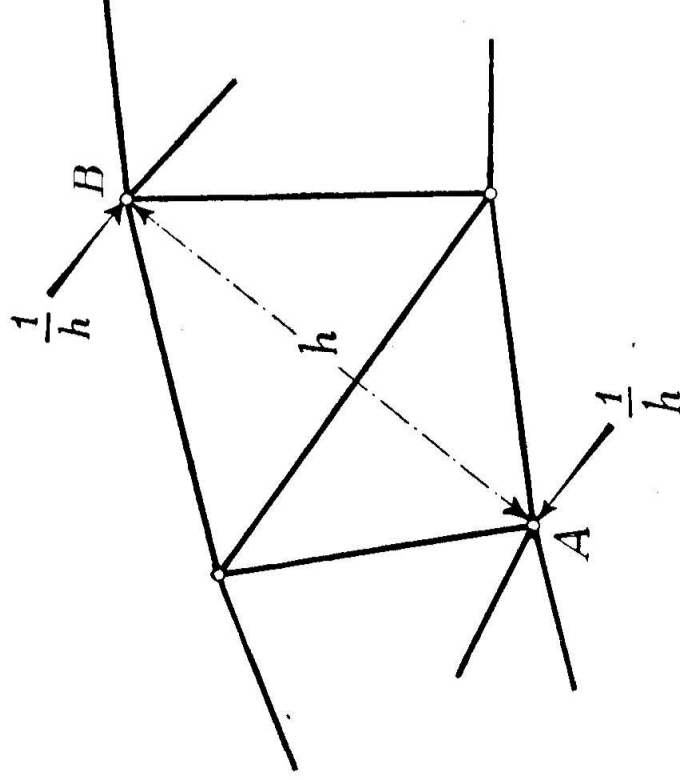


Fig. 59.

lunque N in una direzione arbitraria n, è eguale allo spostamento che il nodo N subirebbe nella direzione n se la travatura venisse sollecitata da due forze unitarie applicate ai due nodi A e B secondo la comune loro linea d'azione e rivolte in sensi contrarii, e precisamente verso l'esterno del segmento finito AB.

**

Nè meno interessante è l'altro corollario a cui si giunge se si considera il caso in cui le forze del secondo sistema si riducono ancora a due sole, eguali in grandezza e rivolte in sensi contrarii, ma con linee d'azione distinte, e precisamente normali alla congiungente dei loro punti di applicazione, sì da formare una coppia il cui momento supporremo, per semplicità, eguale all'unità (fig. 59).

Allora il lavoro che esse compiono in una variazione qualunque di configurazione della travatura si può esprimere col prodotto $1 \cdot \varphi$ essendo φ l'angolo (piccolissimo) di cui ruota la congiungente dei due nodi A e B a cui le forze sono applicate.

Designremo ancora con F le forze del primo sistema dalle quali si suppone determinata la rotazione φ .

Se si suppongono noti gli spostamenti f che i singoli punti di applicazione delle forze F' subirebbero, nelle direzioni stesse delle F , nella deformazione determinata dalle due forze che si sono supposte applicate in A ed in B , la grandezza dell'angolo φ si può anche questa volta ricavare dall'equazione di Betti

$$\Sigma F \cdot f = \varphi$$

Come caso particolare, quando le forze del primo sistema si riducano ad una forza sola

$$F = 1$$

applicata ad un nodo generico N in una direzione arbitraria n , quell'equazione si riduce a

$$f = \varphi$$

e ci dice che: *l'angolo di cui ruota la congiungente di due nodi A B nella variazione di configurazione determinata da una forza unitaria applicata ad un altro nodo qualunque N in una qualunque direzione n, è eguale allo spostamento — o, per esser più precisi, è misurato dallo stesso numero che misura lo spostamento — che il nodo N subirebbe nella direzione n se la travatura venisse sollecitata in corrispondenza dei due nodi A e B da due forze dirette normalmente alla congiungente AB e costituenti una coppia di momento unitario.*