

determinata, travatura che al solito chiameremo, per intenderci, travatura principale (fig. 52).

Dato il sistema delle forze esterne F che sollecitano la travatura data, immaginiamo applicate tali forze alla travatura principale (fig. 53) e denotiamo con S_p lo sforzo (sforzo principale) che in queste condizioni si determina in un'asta generica.

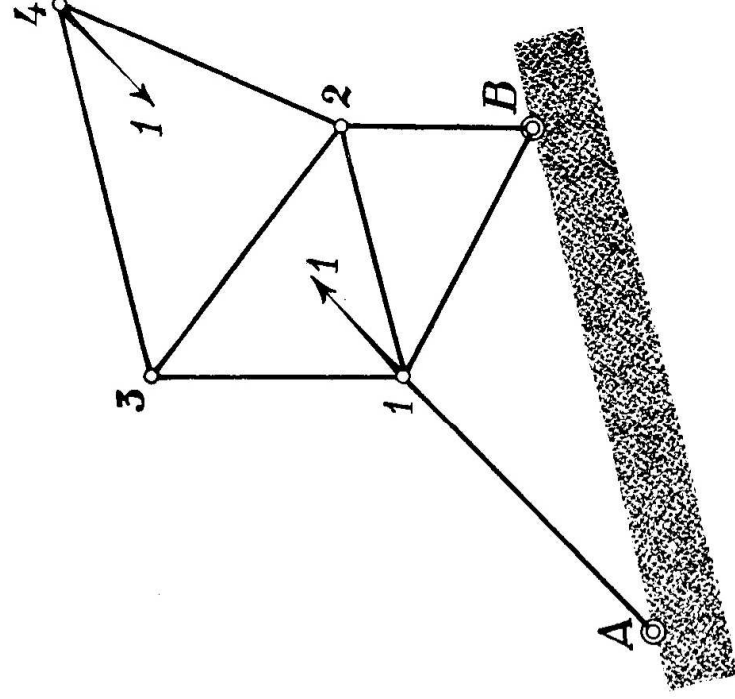


Fig. 54.

Poi, eliminate le forze esterne F , immaginiamo la stessa travatura principale sollecitata invece da due sole forze, eguali e contrarie, applicate ai due nodi già collegati dalla prima asta sovrabbondante, e quindi aventi necessariamente per linea d'azione l'asse stesso di quest'asta.

Supposto, per semplicità, che la grandezza comune di tali due forze sia eguale all'unità (fig. 54), designeremo un tale stato di sollecitazione col nome di

$$\text{sollecitazione } X_1 = 1$$

ed indicheremo con S_1 lo sforzo che così si viene a determinare nella solita asta generica.

Similmente indicheremo con S_2 lo sforzo che nella medesima asta generica si determina sotto l'azione di una ipotetica

sollecitazione $X_2 = 1$

nella quale la travatura principale si immagina assoggettata a due sole forze eguali e contrarie (di grandezza unitaria) appli-

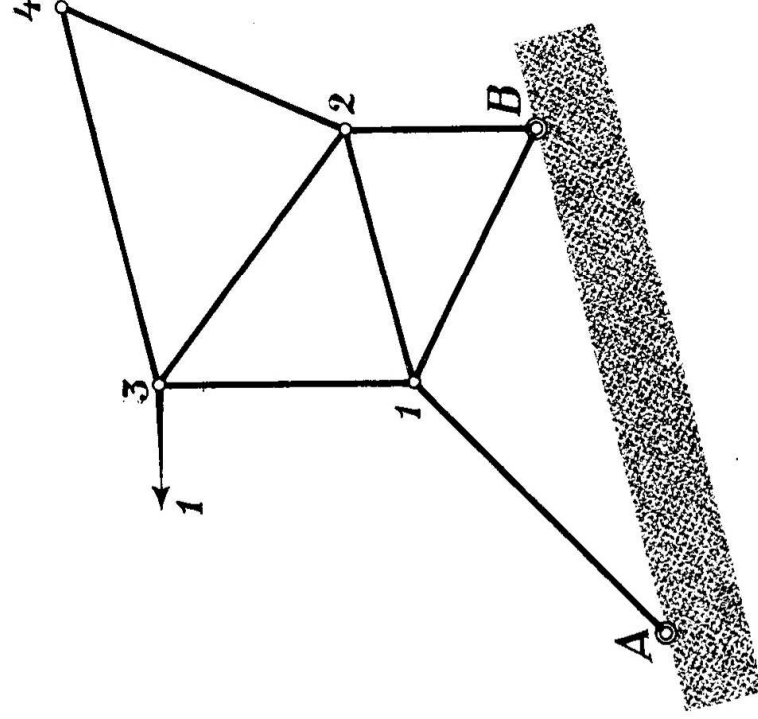


Fig. 55.

cate ai due nodi già collegati dalla seconda asta sovrabbondante. Nella fig. 55 in cui questa sollecitazione trovasi rappresentata con riferimento al caso concreto sopra considerato una sola di tali due forze compare: ciò dipende dal fatto che la seconda asta sovrabbondante è nel predetto caso un'asta di vincolo, la quale cioè fa capo con uno dei suoi due estremi ad un punto del sistema fisso di riferimento; ed è ovvio che quella delle due forze che viene ad agire su tale punto non ha influenza di sorta sulle condizioni statiche della travatura principale.

In virtù del principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio, lo sforzo S che alla solita asta generica spetta, sia che si consideri la travatura iperstatica data in condizioni di equi-

librio sotto l'azione del dato sistema di forze esterne, sia che si consideri invece la sola travatura principale sotto l'azione simultanea delle stesse forze esterne e delle forze

$$\begin{array}{rcl} X_1 & & - X_1 \\ X_2 & & - X_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_k & & - X_k \end{array}$$

equipollenti alle azioni delle k aste sovrabbondanti, si può allora scrivere sotto la forma

$$S = S_p + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_k X_k$$

dalla quale, per derivazione, si ricavano subito i valori dei coefficienti

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} = S_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_2} = S_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial S}{\partial X_k} = S_k$$

Le k equazioni dianzi scritte divengono

$$\sum \frac{S \cdot S_1 \cdot l}{E \cdot A} = 0$$

$$\sum \frac{S \cdot S_2 \cdot l}{E \cdot A} = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\sum \frac{S \cdot S_k \cdot l}{E \cdot A} = 0$$

*
*
*

Consideriamo, per fissar le idee, una travatura reticolare costituita da n nodi e da

$$a = 2n + k$$

aste.

Noi abbiamo trovato, seguendo la prima delle vie che conducono alla soluzione del problema dell'equilibrio di una tal travatura per forze esterne date, che la identificazione dello stato di equilibrio cercato poteva farsi dipendere dalla risoluzione di un sistema di $2n$ equazioni lineari (e non omogenee) nei $2n$ parametri geometrici a cui possono venir riferite le configurazioni possibili della travatura.

Seguendo la seconda via, abbiamo invece trovato che quello stesso stato di equilibrio poteva anche venir identificato attraverso la risoluzione di un altro sistema composto di k equazioni, pure lineari (e non omogenee) nelle k incognite iperstatiche a cui abbiamo imparato a riferire le distribuzioni equilibrate di sforzi interni.

Ora è a questo punto ben evidente che l'una via, ovvero l'altra, sarà in pratica da preferirsi a seconda che è più piccolo $2n$ ovvero k .

Nei problemi pratici --- nei casi cioè che la tecnica sottopone all'attenzione dell'ingegnere --- k è sempre più piccolo di $2n$, sovente di gran lunga più piccolo. Perciò il procedimento di calcolo dedotto dal teorema di Menabrea si presenta, in pratica, costantemente e nettamente preferibile al procedimento classico che fa capo al metodo generale di Lagrange.

I teoremi di Castigliano.

Questi riguardano il calcolo delle deformazioni, e più precisamente la ricerca della componente, secondo una data direzione, dello spostamento che subisce un nodo generico di una travatura quando questa, deformandosi sotto l'azione di date forze esterne, passa dal suo stato naturale alla configurazione di equilibrio che tali forze definiscono.

Nell'intento di mettere in evidenza la continuità delle considerazioni che veniamo svolgendo, noi incominceremo col far dipendere l'analisi delle deformazioni dal teorema stesso di Menabrea che abbiamo poc'anzi stabilito e discusso.

Ciò si può far facilmente se si ricorre al seguente artificio.

Immaginiamo di imporre alla travatura data, qualunque essa sia, staticamente determinata od iperstatica, un vincolo nuovo, che sarà quindi sicuramente sovrabbondante. Più precisamente, immaginiamo di collegare il nodo di cui vogliamo conoscere gli spostamenti ad un punto fisso dello spazio mediante una nuova asta, simile in tutto alle aste che già fanno parte della travatura, la quale abbia quella direzione istessa secondo cui si vuole che gli spostamenti siano misurati.

Deformandosi la travatura data, ove avvenga qualche spostamento del nodo considerato nella data direzione, dovrà deformarsi anche la nuova asta: al lavoro di deformazione L proprio della travatura data, andrà allora aggiunto quello dell'asta.

Se conveniamo di chiamare con X_i lo sforzo con cui questa asta reagisce all'accennato spostamento, il lavoro di deformazione complessivo della travatura così arricchita di una nuova asta si potrà scrivere sotto la forma

$$L + \frac{X_i^2 \cdot l_i}{2 E_i \cdot A_i}$$

Ma abbiamo detto che il nuovo vincolo aggiunto alla travatura data non può che essere sovrabbondante; perciò la reazione X_i che esso sviluppa è da considerarsi come staticamente indeterminata.

Per determinarla basta prendere in considerazione le configurazioni che si ottengono mantenendo immutati tutti gli elementi dati del sistema e facendo variare comunque la X_i : tali configurazioni saranno invero tutte certamente equilibrate e tra esse non potrà non esser compresa la configurazione risolvante, cioè compatibile col nuovo vincolo da noi introdotto.

Applicando il teorema di Menabrea si giunge così all'equazione

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(L + \frac{X_i^2 \cdot l_i}{2 E_i \cdot A_i} \right) = 0$$

che si può anche scrivere

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = - \frac{X_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i}$$

Ma il secondo membro misura evidentemente l'accorciamento che l'asta nuova da noi introdotta subisce sotto l'azione dello sforzo X_i che in essa si è determinato: e questo accorciamento, nella configurazione risolvente, non può differire dallo spostamento che il nodo considerato viene contemporaneamente a subire nella direzione dell'asta.

Possiamo pertanto concludere che tale spostamento è misurato dalla derivata del lavoro di deformazione L presa rispetto alla reazione X_i sviluppata dall'asta da noi aggiunta.

*
*
*

In questo risultato L rappresenta, per verità, il lavoro di deformazione della travatura data supposta naturalmente soggetta, oltre che alle forze esterne ad essa effettivamente applicate, anche alla reazione X_i del nuovo vincolo che noi le abbiamo arbitrariamente imposto.

E analogamente lo spostamento che così si viene a calcolare è quello che il dato sistema di forze esterne produrrebbe in quel certo nodo e in quella data direzione ove tale vincolo esistesse effettivamente.

Però si può osservare che nel ragionamento da noi fatto non abbiamo avuto bisogno di introdurre alcuna ipotesi speciale sulla natura dell'asta adottata per vincolare ulteriormente la travatura.

La formola a cui siamo giunti sta dunque, senza alcun dubbio, qualunque sia il valore del modulo di elasticità normale E_i del materiale di cui quella particolare asta si intende costituita; sta in particolare anche se si suppone, come caso limite,

$$E_i = 0$$

L'asta si dice allora infinitamente cedevole e si rivela subito incapace di sviluppare reazione di sorta; la travatura data si comporta esattamente come se l'asta non ci fosse, e la derivata di L per rapporto ad X_i viene allora a fornire la misura dello spostamento reale che noi ci eravamo proposti di determinare.

Con ciò non si deve credere che le considerazioni che precedono rappresentino un giro vizioso che noi abbiamo fatto senza ragione; vi è bensì, nell'aggiunta di un'asta che noi abbiamo supposto di apportare alla travatura, qualche cosa di arbitrario che serve soltanto a fissar le nostre idee ed a dare un significato fisico, sia pure fittizio, al ragionamento: più precisamente, è assolutamente arbitraria l'interpretazione della forza variabile X_i come reazione di un vincolo ideale: ma la considerazione di questa forza è, dal punto di vista dell'analisi, assolutamente indispensabile per poter eseguire la derivata.

In pratica noi potremo prescindere da ogni ipotesi relativa alla sua origine ed annoverarla senz'altro fra le forze esterne; la indicheremo anzi addirittura con F_i e la considereremo come una forza applicata al nodo considerato secondo la data direzione, senza preoccuparci di precisare se essa esista realmente o no; e ne lasceremo soltanto indeterminata la grandezza.

Il lavoro di deformazione L risulterà allora naturalmente espresso in funzione di tutte le forze deformatrici, non esclusa la F_i , ed il teorema da noi dimostrato si potrà enunciare così:

Lo spostamento f_i che il nodo a cui è applicata la forza F_i subisce, nella direzione di questa forza, durante la deformazione elastica della travatura, è eguale alla derivata parziale del lavoro di deformazione L presa rispetto alla forza stessa

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial F_i} \quad (28)$$

Questo spostamento riesce naturalmente una funzione lineare delle forze date: in essa si dovrà intendere attribuito a ciascuna di dette forze il relativo valore.

In particolare, se F_i fosse una forza realmente applicata alla travatura, si dovrebbe, in luogo di F_i , introdurre nell'espressione testè scritta, la sua grandezza; se invece F_i non è altro che una forza fittizia aggiunta da noi, ma in realtà non esistente, si porrà nella (28)

$$F_i = 0$$

Il teorema testè enunciato, nonchè la regola che esso contiene per il calcolo degli spostamenti elastici dei nodi di una travatura reticolare, sono dovuti ad A. CASTIGLIANO, il quale

ne espose le numerose ed interessantissime applicazioni in un volume ⁽¹⁾ che ha segnata una data nella storia della Scienza delle costruzioni, non tanto per la diffusione che esso potè avere, quanto per la notorietà che alle teorie in esso esposte diede in appresso H. MÜLLER-BRESLAU ⁽²⁾.

*
* * *

Ecco come si dovrebbe procedere per dimostrare il teorema per via diretta.

Consideriamo la travatura reticolare data, in equilibrio sotto l'azione del sistema dato di forze esterne F , e sia

$$L = \frac{1}{2} \sum F \cdot f$$

il valore del suo lavoro di deformazione.

Immaginiamo di far variare l'intensità di una delle forze date, la F_i , attribuendole un incremento piccolissimo, per modo che essa passi dal valore F_i al nuovo valore, vicinissimo, $F_i + dF_i$. Anche la funzione L subirà in conseguenza un certo incremento, e diverrà

$$L + \frac{\partial L}{\partial F_i} dF_i$$

Questo nuovo valore del lavoro di deformazione della travatura si può calcolare assai facilmente: in realtà, alla stessa configurazione finale di equilibrio si potrebbe giungere immaginando la travatura inizialmente sollecitata dalla sola forza piccolissima dF_i , ed applicando poi ad essa le forze date F con intensità gradatamente crescenti da zero ai lor singoli valori finali.

Il lavoro di deformazione iniziale, dell'ordine di grandezza del quadrato di dF_i , potrebbe allora venir trascurato a fronte del lavoro di deformazione prodotto dall'applicazione del sistema di forze F .

⁽¹⁾ A. CASTIGLIANO, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Turin, 1879.

⁽²⁾ H. MÜLLER-BRESLAU, *Die Neueren Methoden der Festigkeitslehre*, Leipzig, 1904.

Quest'ultimo è infatti misurato dalla somma

$$\frac{1}{2} \sum F \cdot f + dF_i \cdot f_i$$

in cui compare necessariamente quello stesso lavoro di deformazione che si aveva quando le forze F agivano da sole in quanto che gli spostamenti f da esse prodotti non possono, per il solo fatto nuovo della presenza della forza dF_i , esser mutati; ma si ha in più un nuovo termine il quale misura il lavoro che questa forza dF_i eseguisce quando il suo punto di applicazione sotto l'azione delle forze F subisce lo spostamento f_i .

Si ha dunque, a meno di infinitesimi del secondo ordine, l'eguaglianza

$$L + \frac{\partial L}{\partial F_i} dF_i = \frac{1}{2} \sum F \cdot f + f_i \cdot dF_i$$

dalla quale si ricava immediatamente la (28)

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial F_i}$$

nonchè il teorema che la esprime.

* * *

Niente di più facile, del resto, che arrivare allo stesso risultato per via esclusivamente analitica.

Basta immaginare che alla travatura reticolare data, supposta sempre in equilibrio sotto l'azione del dato sistema di forze esterne F , venga impressa una variazione piccolissima di configurazione nella quale ciascuno degli spostamenti f subisca un certo incremento infinitesimo df .

L'incremento corrispondente del lavoro di deformazione dovrà naturalmente essere eguale al lavoro che, nella considerata variazione piccolissima di configurazione, fanno le forze applicate; lavoro che, a meno di infinitesimi di second'ordine, è ovviamente misurato da

$$dL = \Sigma F \cdot df$$

Ma dall'espressione generale del lavoro

$$L = \frac{1}{2} \sum F \cdot f$$

si deduce, differenziando,

$$dL = \frac{1}{2} \sum F \cdot df + \frac{1}{2} \sum f \cdot dF$$

Si deve dunque avere anche

$$dL = \Sigma f \cdot dF$$

D'altra parte basta tener presente che gli spostamenti f sono delle funzioni lineari delle forze F che li determinano, per poterne concludere che il lavoro di deformazione L si deve sempre poter esprimere anche come una funzione (certamente quadratica) delle sole F .

E basta pensar espresse le F come delle funzioni lineari delle f , per avere il diritto di dedurne che L si può poi ancora mettere sotto la forma di una funzione (essa pure quadratica) delle sole f . In conseguenza si dovranno trovare, per il solito incremento dL , due altre espressioni del tipo

$$dL = \sum \frac{\partial L}{\partial f} \cdot df = \sum \frac{\partial L}{\partial F} \cdot dF$$

le quali coincidono colle precedenti, per valori qualunque degli incrementi dF e df se e soltanto se:

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial F_i} \quad (28)$$

ed

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial f_i} \quad (29)$$

La prima di queste due relazioni è quella che noi già conosciamo.

L'altra esprime il teorema, in certo qual senso reciproco:

La derivata parziale del lavoro di deformazione L presa rispetto allo spostamento f_i che un dato nodo della travatura subisce nella direzione della forza esterna F_i ad esso applicata, è sempre eguale alla intensità di questa forza.

* *

Adottiamo per il lavoro di deformazione L la solita espressione

$$L = \frac{1}{2} \sum S^2 \cdot l \over E \cdot A$$

La (28) diviene

$$f_i = \frac{\partial L}{\partial F_i} = \sum \frac{S \cdot l}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial S}{\partial F_i} = \sum s \cdot \frac{\partial S}{\partial F_i}$$

Se poi si tien conto che gli sforzi S sono al solito delle funzioni lineari delle forze esterne che li determinano, e che perciò le loro derivate parziali prime per rapporto a queste forze esterne sono delle costanti, ecco che lo spostamento f_i di un dato nodo in una data direzione ci si conferma (cfr. pag. 105) come una funzione lineare delle variazioni di lunghezza s delle singole aste.

Nè sarebbe difficile dimostrare, con un ragionamento affatto analogo a quello già esposto a pag. 142, che i coefficienti di questa funzione lineare altro non sono che gli sforzi S_i che, nelle medesime aste, sono determinati da una ipotetica

$$\text{sollecitazione } F_i = 1$$

consistente in una unica forza unitaria applicata al nodo considerato nella direzione prescelta.

* *

Ma preferiamo stabilire questo importante risultato per via diretta.

A tal fine applichiamo la nota relazione

$$\Sigma F \cdot f = \Sigma S \cdot s$$

assumendo come sistema di variazioni di lunghezza delle aste e di spostamenti dei nodi quelli effettivi che ci proponiamo di studiare, e come sistema di forze la sollecitazione $F_i = 1$ e la corrispondente distribuzione di sforzi interni S_i .

Quella relazione si riduce allora subito alla forma

$$f_i = \Sigma S_i \cdot s \quad (30)$$

dianzi preannunciata.

Ma questo modo di stabilire l'espressione di f_i ha questo di interessante, che mette in evidenza la possibilità di adottare come sforzi S_i non già quelli che la sollecitazione $F_i = 1$ produce nella travatura iperstatica data, bensì quelli che essa determina nella sua travatura principale; più generalmente: in una qualunque delle diverse travature principali che si possono da quella ottenere per soppressione di k aste (sovrabbondanti).

È noto infatti che la relazione da cui qui siamo partiti è valida sempre, qualunque sia la deformazione che si considera purchè congruente, e qualunque sia lo stato di tensione purchè equilibrato.

Nulla ci impedisce pertanto di considerare, tra gli infiniti stati di tensione equilibrati, proprio quello che corrisponde a valori tutti nulli delle incognite iperstatiche.

Ed è ben evidente che così facendo il calcolo della (30) si semplifica notevolmente.