
VI.

L'equilibrio elastico e le sue leggi.

Da tutto quel che siamo venuti dicendo nei precedenti capitoli risulta che un qualunque stato di equilibrio di una travatura reticolare soggetta a forze esterne date, si può indifferentemente caratterizzare sia dando il sistema degli sforzi interni $S_0 + S$, sia dando il corrispondente sistema delle variazioni di lunghezza $s_0 + s$ delle sue aste.

Chè anzi, se si suppongono note le caratteristiche dello stato naturale, e si assume questo come stato di riferimento, è lecito anche più semplicemente affermare che un altro stato qualunque di equilibrio della travatura si può ritenere indifferentemente caratterizzato tanto dai soli sforzi interni S che nella travatura si generano all'atto dell'applicazione del dato sistema di forze esterne, e per effetto dell'azione di queste, come dalle sole variazioni di lunghezza s che le aste corrispondentemente subiscono nel passare dallo stato naturale allo stato generico di equilibrio considerato.

In realtà, una volta stabilita, nei modi e colle riserve espresse nel nostro capitolo IV, quella legge di Hooke che lega biunivocamente gli sforzi alle deformazioni, può sembrare perfettamente indifferente, per caratterizzare uno stato di equilibrio della travatura, far uso degli uni o delle altre.

Naturalmente, nell'un caso come nell'altro dovranno esser verificate tutte le condizioni che l'equilibrio presuppone, sia di natura statica, sia di indole semplicemente geometrica.

Noi sappiamo, infatti, che la determinazione della soluzione del problema dell'equilibrio proviene, generalmente parlando, dal coesistere di due gruppi ben distinti di equazioni di condizione; l'uno dei quali concerne direttamente gli sforzi e preci-

samente esprime le condizioni a cui questi sforzi debbono soddisfare in virtù delle leggi generali della statica, tenuto conto delle forze esterne applicate ai diversi nodi della travatura; l'altro invece riguarda le variazioni di lunghezza delle aste, o meglio quella parte di esse che si verifica nel passaggio della travatura dallo stato naturale allo stato di equilibrio considerato, ed esprime le condizioni geometriche a cui tali variazioni debbono sottostare per esser tra loro compatibili.

Nell'intento di esser chiari e nel tempo stesso concisi, noi converremo di denotar d'or innanzi col nome di "equilibrato" ogni sistema di sforzi interni che, insieme colle forze esterne date, soddisfai alle leggi della statica.

Adotteremo poi definitivamente la denominazione di "congruente" per indicare un sistema di variazioni di lunghezza delle aste che soddisfai alle equazioni geometriche di condizione.

Dopo di che si può compendiare tutto quel che noi già sappiamo in merito alla risoluzione del problema dell'equilibrio delle travature reticolari dicendo che lo stato di equilibrio di una travatura soggetta a date forze esterne è completamente definito — per rapporto allo stato naturale assunto come stato di riferimento — quando si impone al sistema degli sforzi S di essere equilibrato, ed al corrispondente sistema di variazioni di lunghezza s di essere congruente.

*
*
*

Cerchiamo di precisare.

A tal fine basta osservare che, fin che ci si limita ad immaginar realizzata una soltanto di quelle due condizioni, fin che ci si limita, ad esempio, ad imporre che il sistema delle variazioni di lunghezza che le aste subiscono nel passaggio dallo stato naturale allo stato generico considerato sia congruente, si viene a definire non una configurazione particolare, bensì una intera classe di configurazioni; nel caso specifico la classe delle configurazioni che soddisfano alle equazioni geometriche di condizione, epperò sono geometricamente possibili.

Tra esse dovrà necessariamente esser compresa quella particolare configurazione che la travatura effettivamente assume in condizioni di equilibrio sotto l'azione delle forze esterne date: tale configurazione dovrà anzi essere caratterizzata fra tutte le

altre dal fatto che il sistema degli sforzi interni risulta equilibrato.

Per contro, se ci si limita ad imporre che il sistema degli sforzi interni sia equilibrato per rapporto al dato sistema di forze esterne, si viene a definire un'altra classe di configurazioni della travatura, quella delle configurazioni che soddisfano alle equazioni generali della statica. Tra esse vi dovrà certamente essere anche la configurazione che la travatura effettivamente assume in condizioni di equilibrio sotto l'azione del dato sistema di forze esterne; e sarà fra tutte le altre caratterizzata dal fatto che il sistema delle variazioni di lunghezza che le aste subiscono nel passare dallo stato naturale allo stato generico considerato, deve necessariamente, perchè questa particolare configurazione sia possibile, risultar congruente.

Ecco che vi son dunque, in tesi generale, due vie ben distinte per risolvere il problema dell'equilibrio di una travatura reticolare soggetta a forze esterne date.

La prima consiste nel considerare il sistema delle variazioni di lunghezza s delle aste che risolve il problema, come l'unico tra tutti i sistemi congruenti a cui corrisponda un sistema di sforzi interni S equilibrato.

L'altra via consiste invece nel considerare il sistema degli sforzi interni S che risolve il problema, come l'unico tra tutti i sistemi equilibrati a cui corrisponda un sistema congruente di variazioni di lunghezza s delle aste.

Ed il teorema dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio — teorema che noi possiamo considerare come definitivamente acquisito dacchè abbiám provvisto ad eliminare dalle nostre considerazioni tutte le travature che per la loro singolarità di costituzione si prestano ad infinite soluzioni o non ne ammettono alcuna — il teorema dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio si può sinteticamente esprimere dicendo:

1) che esiste sempre uno ed un solo sistema congruente di variazioni di lunghezza s delle aste a cui corrisponda un sistema di sforzi interni S equilibrato;

2) che esiste sempre uno ed un solo sistema equilibrato di sforzi interni S a cui corrisponda un sistema di variazioni di lunghezza s delle aste che sia congruente.

*
*
*

Merita un cenno il caso particolare delle travature reticolari liberamente dilatabili.

In queste travature le variazioni di lunghezza delle aste non sono, per definizione, soggette ad alcuna condizione: qualunque sistema di variazioni di lunghezza riesce pertanto congruente: si può dire che la classe delle configurazioni congruenti comprende quindi tutte indistintamente le configurazioni immaginabili.

Per contro, le equazioni della statica cui debbono soddisfare gli sforzi interni sono, in questo caso, tante quanti sono questi sforzi: questi riescono quindi da quelle equazioni definiti in modo unico e ben determinato: la classe delle configurazioni equilibrate si riduce quindi ad una configurazione sola, che è naturalmente quella risolvante.

In questo senso si è potuto dire a suo tempo che le travature reticolari liberamente dilatabili sono sempre staticamente determinate.

Il procedimento classico.

Il procedimento classico per la risoluzione del problema dell'equilibrio elastico è quello che realizza la prima delle due vie sopra indicate.

Abbiamo detto che essa consiste nel considerare il sistema delle variazioni di lunghezza che le singole aste subiscono nel passaggio dallo stato naturale allo stato di equilibrio che si vuol considerare, come l'unico fra tutti i sistemi congruenti a cui corrisponda un sistema di sforzi equilibrato per rapporto alle forze esterne date.

Si tratta, in termini poveri, di considerare tutte le configurazioni che la travatura può effettivamente assumere, al variare, per esempio, del sistema delle forze esterne ad essa applicate, e di riconoscere tra esse quella che è la configurazione di equilibrio per le date forze F .

A tal fine conviene immaginar per un momento di conoscere questa configurazione risolvante.

Siano al solito

S_0 ed s_0 gli sforzi e le variazioni di lunghezza delle singole aste, nello stato naturale della travatura;

S ed s gli sforzi e le variazioni di lunghezza delle singole aste, dovute all'azione del dato sistema di forze F (sforzi e variazioni di lunghezza che si sovrappongono dunque ai precedenti all'atto dell'applicazione delle dette forze esterne);

f i contemporanei spostamenti dei diversi nodi della travatura, misurati come sempre nelle direzioni delle forze F ad essi nodi applicate.

Immaginiamo ora di aggiungere al sistema delle forze date F un nuovo sistema di forze, che indicheremo con dF tanto per tener presente il loro carattere, che è quello di una variazione impressa al sistema delle F ; supporremo che queste nuove forze siano piccolissime a fronte delle prime, sicchè possano, nei calcoli, trattarsi come infinitesime.

Sotto l'azione simultanea dei due sistemi di forze F e dF la travatura assumerà naturalmente una nuova configurazione di equilibrio che noi potremo a buon diritto ritenere di pochissimo differente dalla prima.

Siano

dS e ds gli incrementi (infinitesimi) degli sforzi interni e delle variazioni di lunghezza delle aste;

df i contemporanei incrementi (pure infinitesimi) degli spostamenti dei singoli nodi, misurati sempre nelle direzioni stesse delle forze date F .

L'energia potenziale elastica della travatura passerà, in questo mutamento piccolissimo di configurazione, dal valore (19)

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum (S_0 + S) \cdot (s_0 + s)$$

al nuovo valore

$$\Phi + d\Phi = \frac{1}{2} \sum (S_0 + S + dS) \cdot (s_0 + s + ds)$$

Se si eseguiscano le operazioni indicate, si trova per l'incremento $d\Phi$ l'espressione

$$d\Phi = \frac{1}{2} \sum (S_0 + S) \cdot ds + \frac{1}{2} \sum (s_0 + s) dS + \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

Se poi si tien conto che

$$s_0 + s = \frac{(S_0 + S) \cdot l}{E \cdot A}$$

e che

$$ds = \frac{dS \cdot l}{E \cdot A}$$

e che quindi

$$(S_0 + S) \cdot ds = (s_0 + s) \cdot dS$$

si ha anche più semplicemente

$$d\Phi = \sum (S_0 + S) \cdot ds + \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

La prima delle due sommatorie che compaiono in questa formula è d'altronde suscettibile di importanti trasformazioni ulteriori.

È intanto evidente che essa può subito scindersi nelle due:

$$\Sigma S_0 \cdot ds \quad \text{e} \quad \Sigma S \cdot ds$$

Ora una di queste, la prima, è sempre eguale a zero: basta, per dimostrarlo, ripetere qui parola per parola il ragionamento da noi già fatto in un caso affatto identico, a pag. 112.

Quanto all'altra, la si può sempre trasformare ricorrendo alla (23): gli sforzi S costituiscono infatti per ipotesi un sistema di sforzi equilibrati per rapporto al sistema di forze esterne F ; le variazioni di lunghezza ds costituiscono un sistema congruente a cui corrispondono gli spostamenti df dei nodi; si ha dunque identicamente

$$\Sigma S \cdot ds = \Sigma F \cdot df$$

Se poi, come accade sempre nei problemi pratici, le forze date F derivano da una funzione di forza ⁽¹⁾ e quindi posseggono un'energia potenziale Π , si potrà ulteriormente scrivere

$$\Sigma F \cdot df = - d\Pi$$

⁽¹⁾ Cfr. G. COLONNETTI, *Principii di dinamica*, Torino, U.T.E.T., 1929, Parte seconda, Cap. IV, pag. 136 e sgg.

Si avrà così, in ultima analisi,

$$d\Phi = -d\Pi + \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

ossia

$$d(\Phi + \Pi) = \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

La somma $\Phi + \Pi$ dell'energia potenziale elastica della travatura e dell'energia potenziale del sistema di forze esterne ad essa applicato, prende il nome di “energia potenziale totale”.

Quest'energia potenziale totale subisce dunque, nella supposta variazione piccolissima di configurazione, una variazione

$$\frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

essenzialmente positiva ed infinitesima del second'ordine.

La configurazione di equilibrio inizialmente considerata riesce pertanto caratterizzata, tra tutte le altre configurazioni possibili che l'attorniano, dalla duplice condizione dell'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale, e della positività della sua variazione seconda: duplice condizione che notoriamente definisce un “minimo”, di quella funzione.

Noi esprimeremo dunque sinteticamente il comportamento dell'energia potenziale totale di una travatura reticolare soggetta ad un dato sistema di forze esterne, dicendo che, in corrispondenza della configurazione di equilibrio che la travatura assume sotto l'azione di quel sistema di forze, deve sempre aversi

$$\Phi + \Pi = \text{minimum} \quad (25)$$

Giova distinguere bene la differente portata delle due proposizioni che sono racchiuse in quest'ultimo enunciato.

All'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale noi avremmo infatti anche potuto giungere direttamente — ed in modo del tutto indipendente dalla maggior parte delle restrizioni introdotte in questa nostra trattazione — attraverso la pura e semplice applicazione del teorema dei lavori virtuali,

che rappresenta, come tutti sanno ⁽¹⁾, la sintesi più completa delle leggi della statica.

La deduzione qui indicata, se ha l'inconveniente di presentare il generalissimo principio di Lagrange in un caso così particolare, senza neppur metterne in evidenza la maggior portata, ha però il pregio non trascurabile di mettere questo teorema in più stretta relazione con alcuni altri di cui dovremo poi occuparci, e di farne quindi meglio risaltare le peculiari caratteristiche e l'intimo significato.

Perciò ci è parsa, dal punto di vista didattico, preferibile. Quanto alla positività della variazione seconda dell'energia potenziale totale, è ben evidente che essa non è altro che una conseguenza delle ipotesi relative alla elasticità che noi abbiamo poste a base dei nostri ragionamenti: la constatazione è pertanto della maggiore importanza in quanto ci fa certi che l'equilibrio elastico, quale noi l'abbiamo definito, soddisfa sempre alla condizione della stabilità ⁽²⁾.

* * *

Dal punto di vista delle applicazioni, vale a dire ai fini della determinazione della configurazione di equilibrio che la travatura assume sotto l'azione di un sistema di forze date, il solo fatto dell'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale è perfettamente sufficiente.

Per convincersene basta pensar riferita la configurazione generica della travatura ad un sistema di $2n$ parametri opportunamente scelti

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$$

Questi potranno essere senz'altro le variazioni di lunghezza delle $2n$ aste principali della travatura, come potranno essere le variazioni delle coordinate degli n nodi, ovvero le variazioni di $2n$ altre caratteristiche geometriche qualunque, purchè espri-

⁽¹⁾ Cfr. G. COLONNETTI, *I fondamenti della statica*, Torino, U.T.E.T., 1927, Parte prima, Cap. III, pag. 65 e sgg.

⁽²⁾ Cfr. G. COLONNETTI, *I fondamenti della statica*, Torino, U.T.E.T., 1927, Parte prima, Cap. IV, pag. 73 e sgg.; G. COLONNETTI, *Principi di dinamica*, Torino, U.T.E.T., 1929, Parte seconda, Cap. IV, pag. 137 e sgg.

mibili sotto forma di funzioni lineari di quelle $2n$ variazioni di lunghezza (cfr. pag. 25).

L'energia potenziale elastica Φ della travatura, nella configurazione generica considerata, si potrà allora evidentemente riguardare come una funzione quadratica di quei $2n$ parametri.

Quanto all'energia potenziale Π del sistema delle forze esterne applicate, non v'è dubbio che la si potrà sempre alla sua volta esprimere in funzione degli stessi parametri.

Chè anzi se vogliam limitarci al caso pratico di cui ci siamo sempre occupati fino ad ora, ed a cui ci proponiamo di limitare anche nel seguito le nostre considerazioni — se vogliamo cioè limitarci al caso in cui le forze esterne F sono o si possono riguardar come costanti, nel senso che sono o si possono riguardar come indipendenti dagli spostamenti piccolissimi dei nodi cui sono applicate — l'energia potenziale assume senz'altro la forma

$$\Pi = -\Sigma F \cdot f + \text{costante}$$

che è lineare negli spostamenti f e quindi anche nei parametri λ a cui quegli spostamenti (come le variazioni di lunghezza delle aste) sono per ipotesi linearmente connessi.

In queste condizioni l'annullarsi della variazione prima dell'energia potenziale totale $\Phi + \Pi$ viene a potersi esprimere sotto forma di un'equazione

$$\frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 + \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 + \dots + \frac{\partial(\Phi + \Pi)}{\partial \lambda_{2n}} d\lambda_{2n} = 0$$

la quale deve riuscir verificata per valori qualunque delle variazioni

$$d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_{2n}$$

epperò si scinde subito nelle $2n$ equazioni distinte

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\Phi + \Pi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\Phi + \Pi) = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{2n}} (\Phi + \Pi) = 0$$

lineari e non omogenee nelle

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$$

i cui valori risultano quindi da quelle equazioni definiti in modo unico e ben determinato.

*
* * *

È chiaro che queste $2n$ equazioni — in quanto definiscono, tra tutte le configurazioni possibili della travatura, quella che è di equilibrio per rapporto al dato sistema di forze esterne — non possono differir sostanzialmente da quelle che, a questo medesimo fine, noi abbiamo altrove pensato di dedurre dalla pura e semplice applicazione delle leggi generali della statica.

Lo si può del resto controllare facilmente.

Basta scrivere esplicitamente l'espressione dell'energia potenziale elastica Φ in funzione delle variazioni s di lunghezza delle aste

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum \frac{E \cdot A}{l} (s_0 + s)^2$$

Si ha allora, per rapporto ad uno qualunque dei parametri λ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \sum \frac{E \cdot A}{l} (s_0 + s) \cdot \frac{\partial s}{\partial \lambda} = \sum (S_0 + S) \frac{\partial s}{\partial \lambda}$$

Similmente dall'espressione scritta dianzi dell'energia potenziale delle forze esterne

$$H = - \Sigma F \cdot f + \text{costante}$$

si ricava, sempre per rapporto ad uno qualunque dei parametri λ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = - \sum F \frac{\partial f}{\partial \lambda}$$

Ma tanto le f che le s sono per ipotesi delle funzioni lineari dei parametri λ ; le loro derivate parziali prime per rapporto a tali parametri son quindi delle costanti.

Le $2n$ equazioni risolventi si possono pertanto scrivere sotto la forma, già da noi adottata in uno dei capitoli precedenti (cfr. pag. 102),

$$\Sigma a_1 (S_0 + S) = \Sigma b_1 F$$

$$\Sigma a_2 (S_0 + S) = \Sigma b_2 F$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Sigma a_{2n} (S_0 + S) = \Sigma b_{2n} F$$

Qui siamo in grado di precisare il significato dei coefficienti:

$$a_1 = \frac{\partial s}{\partial \lambda_1} \qquad b_1 = \frac{\partial f}{\partial \lambda_1}$$

$$a_2 = \frac{\partial s}{\partial \lambda_2} \qquad b_2 = \frac{\partial f}{\partial \lambda_2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{2n} = \frac{\partial s}{\partial \lambda_{2n}} \qquad b_{2n} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_{2n}}$$

Come caso particolare la (25) può naturalmente anche applicarsi allo studio dello stato naturale.

S'intende che, poichè tutte le forze esterne sono in questo caso nulle, sarà identicamente nulla anche l'energia potenziale relativa

$$\Pi = 0$$

Inoltre l'energia potenziale elastica si ridurrà naturalmente alla sola energia vincolata

$$\Phi = \Phi_0$$

Si trova così, come caratteristica dello stato naturale, la condizione

$$\Phi = \text{minimum} \qquad (26)$$

che noi avevamo già per tutt'altra via stabilita a pag. 114.

Da essa si ricavano, nel modo istesso che abbiamo poc'anzi illustrato a proposito del caso generale, le $2n$ equazioni

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_2} = 0$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_{2n}} = 0$$

o, ciò che fa esattamente lo stesso, le loro equivalenti

$$\Sigma a_1 S_0 = 0$$

$$\Sigma a_2 S_0 = 0$$

$$\dots$$

$$\Sigma a_{2n} S_0 = 0$$

di cui ci siamo già serviti altra volta (cfr. pag. 102).

Il metodo di Menabrea.

Tentiamo ora la seconda delle due vie che conducono alla risoluzione del problema dell'equilibrio elastico.

Seconda via che consiste, come abbiamo detto a suo tempo, nel considerare il sistema degli sforzi interni S che si generano all'atto dell'applicazione del dato sistema di forze esterne e per effetto dell'azione di queste, come l'unico tra tutti i sistemi equilibrati a cui corrisponda un sistema congruente di variazioni di lunghezza s delle aste.

Si tratta, in altre parole, di considerar tutte le possibili distribuzioni di sforzi interni che possono far equilibrio al sistema dato di forze esterne, e di scegliere tra esse quella che può effettivamente venir realizzata dalla travatura reticolare data.

Notiamo, fra parentesi, che questa scelta ha un senso solo in quanto si ammetta implicitamente che di distribuzioni di sforzi interni equilibrate per rapporto al dato sistema di forze esterne ve ne siano infinite, o quanto meno ve ne sia più d'una.

Ciò accade notoriamente tutte le volte che la travatura possiede qualche asta sovrabbondante.

Il procedimento di cui stiamo per occuparci non avrà per contro nessuna possibilità di riferimento alle travature reticolari staticamente determinate, le quali non ammettono che una sola distribuzione di sforzi interni in equilibrio colle forze esterne date.

Ciò premesso, vediamo come la scelta possa farsi.

A tal fine noi ricorremo al solito artificio, che consiste nell'immaginar conosciuta la distribuzione di sforzi interni S che caratterizza lo stato di equilibrio della travatura, e nel metterla a raffronto colle altre distribuzioni equilibrate che differiscono di pochissimo da essa.

Queste si potranno immaginar generate attribuendo al sistema degli sforzi S un sistema di incrementi (infinitesimi) dS staticamente compatibili col dato sistema di forze esterne F , tali cioè che le equazioni dell'equilibrio a cui, tenuto conto delle predette forze esterne, soddisfano gli sforzi S continuino ad esser soddisfatte dai nuovi sforzi $S + dS$.

È facile constatare che, perchè ciò avvenga, occorre e basta che i nuovi sforzi dS si facciano equilibrio fra loro: che cioè, per usare la terminologia adottata, il sistema degli sforzi dS sia equilibrato per forze esterne tutte nulle.

S'intende poi che corrispondentemente agli incrementi degli sforzi anche le variazioni di lunghezza s delle aste subiranno certi incrementi (pur infinitesimi) che indicheremo con ds .

Consideriamo ora il lavoro di deformazione proprio della travatura nello stato di equilibrio di cui ci stiamo occupando. In dipendenza degli incrementi attribuiti agli sforzi S esso passerà dal valore

$$L = \frac{1}{2} \sum S \cdot s$$

al nuovo valore

$$L + dL = \frac{1}{2} \sum (S + dS) \cdot (s + ds)$$

subirà cioè un incremento

$$dL = \frac{1}{2} \sum S \cdot ds + \frac{1}{2} \sum s \cdot dS + \frac{1}{2} \sum ds \cdot S$$

Se si tien conto che

$$s = \frac{S \cdot l}{E \cdot A}$$

e che

$$ds = \frac{dS \cdot l}{E \cdot A}$$

e che quindi

$$S \cdot ds = s \cdot dS$$

si ha, anche più semplicemente,

$$dL = \sum s \cdot dS + \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

Ora, è facile dimostrare che la prima sommatoria è sempre identicamente nulla. Basta ricorrere alla solita relazione (23) nella quale come sistema congruente di variazioni di lunghezza s delle aste si prenderà il sistema effettivamente presentato nel passaggio della travatura dallo stato naturale allo stato di equilibrio di cui ci stiamo occupando: come sistema di sforzi equilibrato si assumerà invece il sistema degli sforzi dS che, come abbiamo già dichiarato, è effettivamente equilibrato per forze esterne tutte nulle: ciò è quanto dire che nello scrivere la (23) si dovrà porre

$$F = 0$$

Essa si riduce perciò a

$$\sum s \cdot dS = 0$$

e l'espressione dell'incremento del lavoro di deformazione diviene

$$dL = \frac{1}{2} \sum dS \cdot ds$$

Questo incremento è dunque infinitesimo del secondo ordine. In esso ds è sempre dello stesso segno di dS : esso è dunque essenzialmente positivo.

La distribuzione di sforzi interni S che caratterizza lo stato di equilibrio della travatura riesce pertanto individuata, fra tutte le altre distribuzioni equilibrate, dalla duplice condizione dell'annullarsi della variazione prima del lavoro di deforma-

zione, e della positività della sua variazione seconda; duplice condizione che al solito definisce un "minimo", di quella funzione.

Siamo così condotti ad esprimere sinteticamente il comportamento del lavoro di deformazione di una travatura reticolare soggetta ad un dato sistema di forze esterne, dicendo che, in corrispondenza a quella tra le distribuzioni equilibrate di sforzi interni che caratterizza lo stato di equilibrio, deve sempre aversi

$$L = \text{minimum} \quad (27)$$

* * *

In questa proposizione, annunciata per la prima volta dal MENABREA alla R. Accademia delle Scienze di Torino nel 1857 sotto il nome di "principio di elasticità", o "del minimo lavoro", noi abbiamo conservato il nome di lavoro di deformazione alla funzione L sebbene, quando non si tratta di una deformazione possibile della travatura, ma soltanto di una variazione ideale del sistema dei suoi sforzi interni, questa L non ha più tale significato fisico nè può riguardarsi come atta a misurare, colle sue variazioni, le variazioni dell'energia potenziale elastica della travatura.

All'espressione "lavoro di deformazione", dovrà perciò qui attribuirsi soltanto un significato astratto di somma ideale delle energie elastiche delle singole aste della travatura considerate come indipendenti.

Tutto al più si potrà attribuire, nelle applicazioni, un significato fisico più concreto alla funzione L immaginando convenientemente svincolate ad uno dei loro estremi le varie aste sovrabbondanti della travatura: con ciò L verrà a rappresentare l'energia potenziale elastica della travatura resa così staticamente determinata in quei suoi stati equilibrati per rapporto al dato sistema di forze esterne che non sono, generalmente, possibili per la travatura iperstatica data.

Ed è soltanto per quel particolare stato che, unico possibile fra tutti questi equilibrati, rappresenta la soluzione del problema dell'equilibrio, che L viene a riacquistare il suo significato di lavoro di deformazione della travatura iperstatica data.

Il teorema di Menabrea dovrebbe perciò, a rigore, enunciarsi dicendo che *tra tutte le distribuzioni equilibrate di sforzi*

interni, quella che corrisponde allo stato di equilibrio è quella che rende minima la funzione L ; il valore minimo di questa funzione è allora precisamente eguale al lavoro di deformazione della travatura.

È però invalso l'uso di enunciare più brevemente questo teorema affermando che la distribuzione degli sforzi interni in una travatura reticolare in equilibrio è *quella che rende il lavoro di deformazione minimo compatibilmente colle forze esterne date.*

Sotto questa forma esso ha dato luogo alle più strane controversie: in realtà la proposizione sarebbe affatto priva di significato qualora si intendesse parlare del lavoro di deformazione propriamente detto, relativo cioè ai soli stati effettivamente possibili della travatura che si considera: perchè di tali stati uno solo è in equilibrio con le date forze esterne — proprio quello che si tratta di individuare — epperò, non essendovene altri, non avrebbe senso parlare di minimo del lavoro di deformazione compatibilmente colle forze esterne date.

La proposizione vuole, per riacquistare il suo significato, essere riferita alle configurazioni non congruenti, configurazioni che nulla ci impedisce di scegliere compatibili (cioè in equilibrio) colle date forze esterne, e per le quali la funzione L può ancora, come si è già detto, essere definita, se non come un vero e proprio lavoro di deformazione della travatura data, almeno come la somma dei lavori di deformazione delle singole sue aste considerate come indipendenti.

Così inteso questo teorema fa utile riscontro all'altro teorema di minimo che abbiamo trovato dianzi.

Abbiamo visto allora che l'applicazione di quel teorema conduceva in sostanza a riscrivere le note condizioni necessarie e sufficienti perchè una configurazione possibile della travatura data fosse in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne.

Possiamo facilmente prevedere che il teorema di Menabrea, che prende in esame le configurazioni equilibrate, e determina la soluzione del problema dell'equilibrio elastico per esclusione di tutte quelle non congruenti, dovrà compendiare in sè le condizioni di congruenza.

Ne segue che i due procedimenti sono completamente e perfettamente distinti (contrariamente a quanto si è da qualche Autore affermato), benchè vaevoli entrambi a caratterizzare, sotto un diverso punto di vista, lo stesso stato di equilibrio.

Nè si creda che, perchè si viene a risolvere sempre lo stesso problema, non si debba sperare, in ultima analisi, alcun vantaggio dall'uso dell'uno piuttosto che dell'altro procedimento: il considerare invero il lavoro di deformazione, come testè abbiamo fatto, espresso in funzione degli sforzi interni, ed il caratterizzare la configurazione risolvante per mezzo delle proprietà di questa funzione, ha se non altro il vantaggio di condurci direttamente alla ricerca della effettiva distribuzione degli sforzi e delle reazioni di vincolo, senza il previo calcolo della deformazione subita dalla travatura.

Il che è di non lieve importanza nello studio di molti dei problemi della Scienza delle costruzioni, laddove non sempre interessa conoscere le caratteristiche della deformazione: in realtà è precisamente e soltanto la distribuzione degli sforzi interni che l'ingegnere ha bisogno di avere sott'occhio quando vuol farsi un'idea del grado di sicurezza con cui la travatura può sopportare l'azione di un dato sistema di forze esterne.

* * *

Ma v'è un'altra ragione, anche più importante, per la quale il teorema di Menabrea può per la risoluzione dei problemi pratici presentarsi singolarmente vantaggioso; e questa ragione ci apparirà chiaramente se noi alla semplice scrittura della condizione generica di minimo sostituiamo la scrittura delle diverse equazioni che la esprimono in termini finiti.

A tal fine incominciamo coll'osservare che, come nell'applicazione del precedente teorema non era necessario prendere in considerazione tutte indistintamente le configurazioni possibili della travatura, ma ci si poteva limitare ad una classe particolare di esse se v'era qualche ragione per prevedere che vi fosse compresa la configurazione di equilibrio cercata, così anche nell'applicazione del teorema di Menabrea non è a priori indispensabile prendere in esame tutte indistintamente le configurazioni equilibrate della travatura che si vuol studiare; che anzi se si riesce in qualche modo a precisare che la cercata configurazione di equilibrio deve appartenere ad una data classe di configurazioni equilibrate, si possono senz'altro escludere da ogni ulteriore studio tutte le configurazioni estranee a quella

classe, limitandosi a cercare nell'ambito più ristretto di essa la soluzione del problema.

In quest'ordine di idee converrà ricorrere alla già accennata riduzione della travatura iperstatica data ad una travatura staticamente determinata mediante svincolo, ad uno dei loro estremi, delle singole aste sovrabbondanti, con che gli sforzi in queste aste sovrabbondanti vengono a potersi assumere ad arbitrio, gli sforzi nelle aste principali restando determinati in conseguenza.

Abbiamo già detto in altra occasione (pag. 36) che questi sforzi nelle aste sovrabbondanti prendono il nome di incognite iperstatiche del problema.

Se pertanto si indicano con

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

queste k incognite, in funzione delle quali si possono, linearmente e biunivocamente, esprimere gli sforzi in tutte le altre aste della travatura in modo che costituiscano un sistema equilibrato per rapporto alle forze esterne date, si può dimostrare che la soluzione del problema viene senz'altro a dipendere dalla risoluzione di un semplice sistema di k equazioni lineari e non omogenee fra quelle k incognite.

Ed invero, nelle ipotesi fatte, il ricercare quella tra le infinite configurazioni equilibrate della travatura che soddisfa al teorema di Menabrea significa procedere alla ricerca di quei valori delle k incognite iperstatiche che rendono minima la funzione L ; funzione la quale, nella sua qualità di funzione quadratica ed omogenea degli sforzi, può evidentemente essere anche considerata come una funzione, certo quadratica, per quanto in generale non più omogenea, delle suddette incognite

$$X_1, X_2, \dots, X_k$$

Ora, il verificarsi della condizione di minimo espressa dalla (27) richiede al solito che si annulli la variazione prima della funzione L , ciò che si può ormai esprimere imponendo che la equazione

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} \cdot dX_1 + \frac{\partial L}{\partial X_2} \cdot dX_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial X_k} \cdot dX_k = 0$$

sia identicamente verificata per valori qualunque delle variazioni

$$dX_1, dX_2, \dots, dX_k$$

per il che occorre e basta notoriamente che siano separatamente soddisfatte le k equazioni

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_k} = 0$$

certamente lineari e non omogenee nelle k incognite iperstatiche, epperò atte, come avevamo previsto, a definirne i valori in modo unico e ben determinato.

Immaginiamo espresso il lavoro di deformazione L sotto la forma di funzione, naturalmente quadratica, degli sforzi

$$L = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 \cdot l}{E \cdot A}$$

Le k equazioni tentè dedotte dal teorema di Menabrea assumono allora la forma

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \sum \frac{S \cdot l}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial S}{\partial X_1} = \sum s \frac{\partial S}{\partial X_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = \sum \frac{S \cdot l}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial S}{\partial X_2} = \sum s \frac{\partial S}{\partial X_2} = 0$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_k} = \sum \frac{S \cdot l}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial S}{\partial X_k} = \sum s \frac{\partial S}{\partial X_k} = 0$$

Se si tien conto che gli sforzi S sono delle funzioni lineari delle incognite iperstatiche X , e che perciò le loro derivate parziali prime per rapporto alle X sono delle costanti, si può

concludere che il teorema di Menabrea conduce in definitiva a stabilire k equazioni lineari ed omogenee tra le variazioni s di lunghezza delle a aste della travatura; in queste equazioni (fatte le dovute sostituzioni di simboli) il lettore riconoscerà senz'altro le k equazioni normali (6) di cui si è discusso nel capitolo I (pag. 23) e che esprimono le condizioni geometriche di compatibilità tra le variazioni di lunghezza delle aste: sono le condizioni a cui la distribuzione di sforzi interni che abbiām considerata deve soddisfare perchè le corrispondenti variazioni di lunghezza delle aste costituiscano un sistema congruente.

La nuova forma sotto cui ci appaiono scritti qui i coefficienti di quelle k equazioni normali è però meritevole della maggiore attenzione.

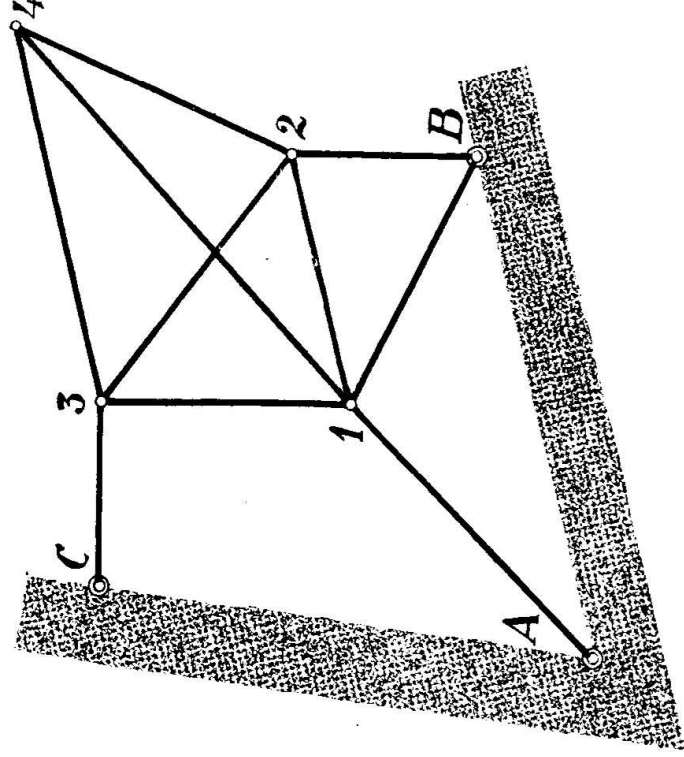


Fig. 51.

Intanto essa si presta ad una interpretazione meccanica di singolare interesse. Consideriamo infatti una travatura ad aste sovrabbondanti: riferiamoci, per esempio, tanto per fissar le idee, a quella rappresentata in fig. 51, ed assumiamo come sovrabbondanti le aste 1-4 e C-3. Immaginiamole momentaneamente sopprese: si otterrà così una travatura staticamente

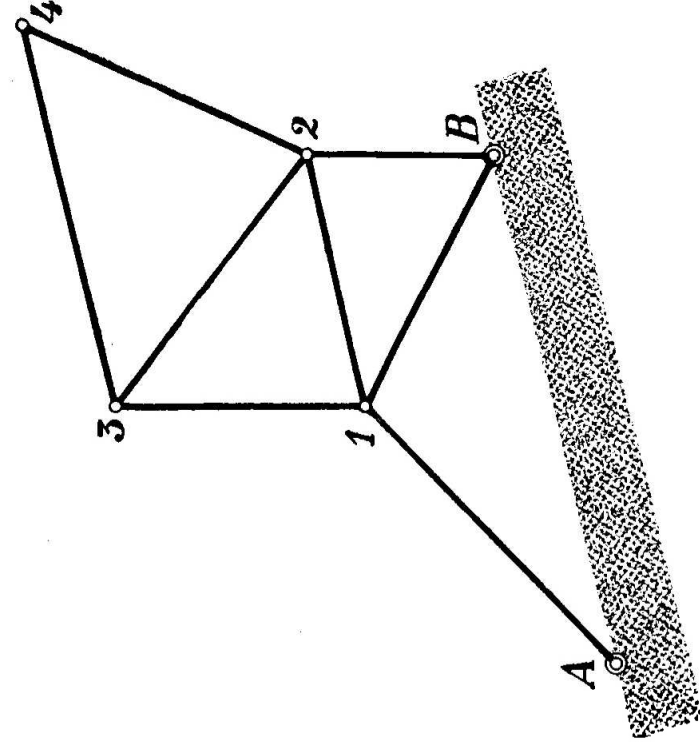


Fig. 52.

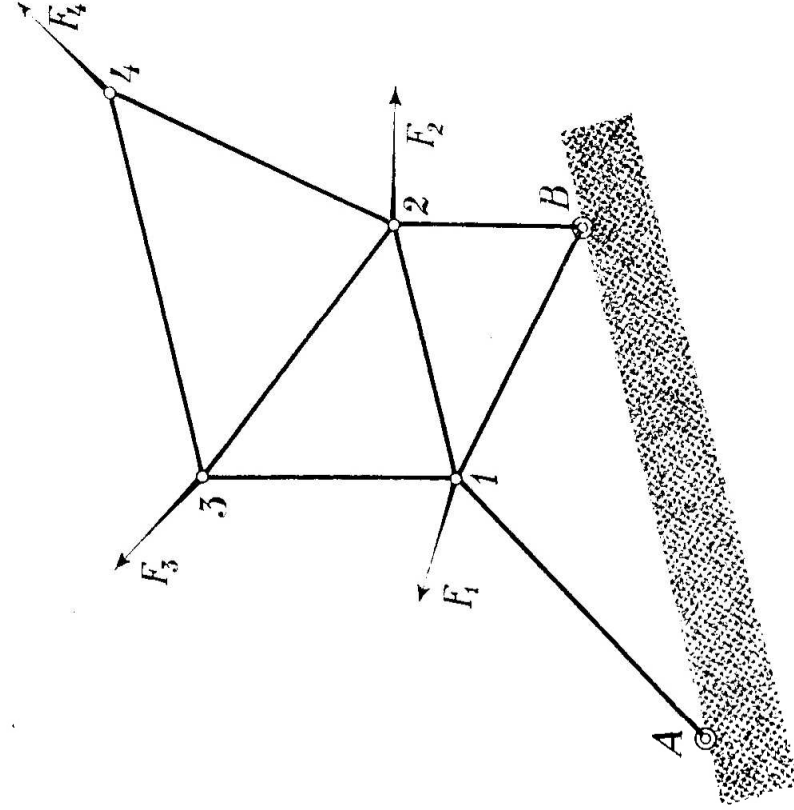


Fig. 53.