V.

L'energia potenziale elastica ed il lavoro di deformazione.

Nel definire le deformazioni delle travature reticolari che dovevano essere oggetto del nostro studio noi non abbiamo mancato di stabilire ben chiaramente che esse avrebbero sempre dovuto soddisfare alla duplice condizione di essere piccolissime e di essere elastiche.

Ora il lettore avrà forse notato che noi abbiamo già avuta più di una occasione di valerci del fatto che le deformazioni son piccolissime; ma non ci è occorso mai, fino ad ora, di ricordare che esse debbono essere elastiche.

È pertanto giunto il momento di soffermarci brevemente su questo concetto per precisare quali siano le condizioni che debbono essere verificate, perchè la deformazione sia suscettibile di scomparire spontaneamente al cessare delle cause che l'hanno prodotta, o almeno per dar forma analitica a queste condizioni sì da poterle introdurre nei calcoli ed utilizzare ai fini del nostro studio.

A questo scopo — ricorrendo ad un procedimento che è comune anche ad altri rami delle scienze fisiche — noi converremo di esprimere la tendenza di un sistema deformato a ritornare, appena gli sia possibile, nel suo stato non deformato, ammettendo l'esistenza di un'energia potenziale nella quale si deve intendere trasformato il lavoro meccanico che è stato necessario eseguire per portare il sistema nel suo attuale stato di deformazione, e che è suscettibile di trasformarsi di bel nuovo in lavoro meccanico se la deformazione viene ad annullarsi.

Sulla natura di questa “ energia potenziale elastica „ noi faremo l'ipotesi seguente: che l'energia di un sistema composto di più parti sia sempre identicamente eguale alla somma delle energie elementari delle singole parti prese separatamente, e che ciascuna di queste energie elementari risulti completamente definita dalla conoscenza dello stato di quella parte del sistema a cui si riferisce, senza che occorra far intervenire nella sua definizione nè la sua posizione nello spazio, nè lo stato delle altre parti del sistema, nè la posizione di queste per rapporto alla prima.

Si tratta evidentemente di un'ipotesi affatto arbitraria, e che ci deve sembrar tanto più arbitraria se pensiamo ad altri rami della fisica nei quali notoriamente accade tutto il contrario. In realtà una sola giustificazione di questa ipotesi è possibile: ed è quella che ci verrà spontaneamente offerta " a posteriori „ dalla concordanza dei risultati a cui noi perverremo ragionando su di essa, coi risultati delle esperienze che noi potremo istituire sui sistemi elastici naturali.

Per intanto accettiamo l'ipotesi come tale, ed applichiamola al caso delle travature reticolari. Saremo senz'altro autorizzati ad affermare:

1) che l'energia potenziale elastica di una travatura reticolare in un suo qualunque stato di deformazione è sempre identicamente eguale alla somma delle energie potenziali elastiche delle sue singole aste;

2) che l'energia potenziale elastica di ciascun'asta è funzione soltanto dello stato di deformazione di questa, epperò può essere studiata e calcolata a sè, facendo completa astrazione dalla presenza, anzi addirittura dalla esistenza, delle altre aste che compongono la travatura.

***

Fermiamoci dunque a considerare una particolare asta di una travatura reticolare; ed immaginiamo di determinare in essa lo stato di deformazione che le compete mediante l'applicazione, ai suoi due estremi, di due forze eguali e contrarie, nel modo già indicato a suo tempo e rappresentato nelle figure 18 e 19 a pag. 33.

Per renderci conto del lavoro che tali forze debbono compiere per produrre una data deformazione dell'asta, noi supporremo che l'intensità di esse cresca gradualmente dal valor zero al valore finale con lentezza sufficiente perchè per ciascun valore intermedio della forza abbia tempo di stabilirsi lo stato di deformazione corrispondente.

Così operando l'asta passerà infatti dallo stato iniziale non deformato allo stato finale di deformazione voluta, con un moto continuo e senza l'intervento di quei fenomeni dinamici che indubbiamente accompagnerebbero un'applicazione istantanea delle forze, dando origine a dispersione dell'energia impiegata, parte della quale, trasmettendosi anche al mezzo circostante (con o senza produzione di fenomeni acustici), finirebbe inevitabilmente per trasformarsi in calore.

Detto S il valore dello sforzo in un istante generico t del fenomeno, ed

$$s = \frac{S \, . \, l}{E \, . \, A}$$

il corrispondente valore della deformazione, consideriamo un intervallo di tempo infinitesimo immediatamente successivo dt durante il quale l'intensità dello sforzo presenterà un incremento, pure infinitesimo, dS e la deformazione subirà l'incremento corrispondente

$$ds = \frac{dS \cdot l}{E \cdot A}$$

Si compie così un lavoro elementare

$$S \, . \, ds = S \, . \, \frac{l}{E \, . \, A} \, . \, dS$$

Al crescere dello sforzo S del valore iniziale " zero " fino ad un valore finale qualunque S_1 a cui corrisponda il valore finale della deformazione

$$s_1 = \frac{S_1 \, . \, l}{E \, . \, A}$$

si viene quindi a compiere un lavoro complessivo misurato da

$$\int_o^{S_1} S \, . \, ds = \int_o^{S_1} S \, . \, \frac{l}{E \, . \, A} \, . \, dS = \frac{S_1^2}{2} \, . \, \frac{l}{E \, . \, A} = \frac{1}{2} \, S_1 \, . \, s_1$$

Allo stesso valore, ma mutato di segno, si perverrebbe evidentemente calcolando il lavoro che si compirebbe all'invertirsi del fenomeno, vale a dire nella ipotesi che, decrescendo lo sforzo gradualmente dal valore S_1 al valore “ zero „ l'asta riprendesse pure gradualmente la sua lunghezza primitiva.

Noi siamo così naturalmente condotti ad assumere l'espressione

$$\varphi = \frac{1}{2} S \,.\, s \tag{15}$$

come la misura dell'energia potenziale elastica di un'asta sollecitata da uno sforzo S e che abbia in conseguenza subita la variazione di lunghezza s.

Va da sè che, siccome nelle ipotesi da noi adottate S ed s hanno sempre il medesimo segno, l'energia potenziale elastica riesce sempre positiva.

Risulta d'altronde già dal calcolo fatto poc'anzi ch'essa si può esprimere come una forma quadratica dello sforzo

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{E \,.\, A} \,.\, S^2 \tag{16}$$

e basta tener presente la (14) per convincersi che essa si può anche, volendo, esprimere come una forma quadratica della deformazione

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{E \,.\, A}{l} \,.\, s^2 \tag{17}$$

***

Tutto ciò premesso, noi possiamo riprendere in considerazione la travatura reticolare nel suo complesso, e, caratterizzatone un qualunque stato di equilibrio sia mediante il sistema degli sforzi interni, sia mediante il corrispondente sistema di variazioni di lunghezza delle aste, esprimere, in funzione di queste grandezze, il valore dell'energia potenziale elastica.

Noi abbiamo infatti avvertito che l'energia potenziale elastica della travatura avrebbe sempre dovuto esser eguale alla somma delle energie potenziali elastiche delle singole sue aste.

La potremo esprimere pertanto, nel caso dello stato naturale, sotto la forma

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum S_0 \,.\, s_0 \tag{18}$$

Nello stato di equilibrio generico, determinato da un dato sistema di forze esterne, si avrà invece l'espressione

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum (S_0 + S) \, . \, (s_0 + s) \tag{19}$$

Nell'un caso come nell'altro resta ben inteso che la sommatoria va estesa a tutte indistintamente le aste della travatura.

* * *

Se si eseguiscono le operazioni indicate nella (19) si trova

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum S_0 \, . \, s_0 + \frac{1}{2} \sum S_0 \, . \, s + \frac{1}{2} \sum S \, . \, s_0 + \frac{1}{2} \sum S \, . \, s$$

Se poi si tien conto che

$$s_0 = \frac{S_0 \, . \, l}{E \, . \, A}$$

e che

$$s = \frac{S \, . \, l}{E \, . \, A}$$

e che quindi

$$S \, . \, s_0 = S_0 \, . \, s$$

si può, nello sviluppo precedente, raccogliere insieme la seconda e la terza sommatoria in una sommatoria unica che si potrà scrivere indifferentemente

$$\Sigma \, S \, . \, s_0$$

ovvero

$$\Sigma \, S_0 \, . \, s$$

Ma questa sommatoria è sempre identicamente eguale a zero.

Consideriamo infatti la travatura nel suo stato naturale, soggetta agli sforzi interni S_0 in equilibrio in assenza di forze esterne; ed immaginiamo per un momento che i singoli suoi nodi possano venir idealmente svincolati gli uni dagli altri e dal sistema fisso di riferimento, sicchè si possano trattare come punti liberi da ogni vincolo, ciascuno dei quali è esclusivamente soggetto agli sforzi S_0 relativi alle aste che ad esso facevano capo.

Ad un tale complesso di forze in equilibrio, applichiamo ora il principio dei lavori virtuali, assumendo come spostamenti virtuali dei singoli nodi proprio quelli che caratterizzano il passaggio della travatura dallo stato naturale a quel particolare stato di equilibrio che essa assume sotto l'azione del solito sistema di forze esterne F.

È intuitivo che, nella espressione del lavoro virtuale che così facendo si verrà ad ottenere, ciascuno sforzo S_0 comparirà una sola volta ovvero due volte a seconda che l'asta cui esso si riferisce è un'asta di vincolo, la quale congiunge un nodo della travatura ad un punto fisso, ovvero è un'asta di collegamento propriamente detta, la quale cioè unisce due diversi nodi fra loro.

Nel primo caso S_0 comparirà moltiplicato per lo spostamento virtuale del nodo a cui è applicato, nella direzione dell'asta secondo cui agisce; e poichè in questo caso l'altro estremo dell'asta è fisso, lo spostamento in discorso non potrà che coincidere identicamente con la variazione di lunghezza dell'asta.

Nell'altro caso S_0 si troverà moltiplicato per i due spostamenti dei due nodi interessati, nella direzione dell'asta che li congiunge. Basterà pertanto raccogliere i due termini in un solo mettendo S_0 in evidenza per ritrovare anche qui lo sforzo moltiplicato per la variazione di lunghezza dell'asta.

Facendo la somma dei lavori virtuali si troverà (segno a parte) proprio quella $\Sigma S_0 s$ di cui stavamo discorrendo. E poichè il principio dei lavori virtuali è stato qui da noi applicato ad un sistema di forze che è per definizione un sistema in equilibrio, quella sommatoria dovrà risultare identicamente nulla, come avevamo annunciato.

Ecco dunque che la (19) viene a potersi in definitiva scrivere sotto la forma, singolarmente espressiva,

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum S_0 s_0 + \frac{1}{2} \sum S s \tag{20}$$

***

Ora, i due gruppi di termini che questa espressione dell'energia potenziale elastica mette in evidenza, hanno un significato facilmente identificabile. Il primo gruppo infatti

$$\frac{1}{2} \sum S_0 s_0$$

altro non è che l'espressione (18) dell'energia potenziale elastica Φ_0 propria dello stato naturale. L'altro gruppo

$$\frac{1}{2}\sum S s$$

rappresenta invece il valore a cui si ridurrebbe l'energia potenziale elastica relativa alla configurazione di equilibrio considerata, qualora nella sua espressione (19) si annullassero tanto gli S_0 che gli s_0: il valore dunque che si otterrebbe se nel calcolo si prescindesse completamente dalla esistenza dello stato di coazione iniziale.

Di qui una prima ed importante conseguenza, ed è questa: che anche nel calcolo dell'energia potenziale elastica — come già in quello degli sforzi interni e delle variazioni di lunghezza delle aste — è lecito scindere il problema generale dell'equilibrio in due parti, calcolando dapprima, ed una volta per tutte, il valore che a questa funzione spetta nello stato naturale, poi quello che ad essa compete in dipendenza degli incrementi di sforzi e di variazioni di lunghezza delle aste determinati dalla azione delle forze esterne, e sommando poi semplicemente i risultati.

E si noti bene che questa conseguenza era tutt'altro che facilmente prevedibile a priori, perchè l'energia potenziale elastica non è più una funzione lineare, bensì una funzione quadratica degli sforzi (o delle deformazioni) alla quale quindi il principio di sovrapposizione non è, generalmente parlando, applicabile.

Ma un'altra osservazione noi dobbiamo ancora fare, a proposito della (20), che è essa pure della maggiore importanza.

L'energia potenziale elastica Φ_0 propria dello stato naturale, va in certo qual modo considerata come una costante della travatura reticolare data, nel senso che non dipende dal particolare sistema di forze esterne che alla travatura si immaginano applicate.

L'altro gruppo di termini, invece, varia al variare delle forze esterne F e si annulla se le F si annullano, cioè ogniqualvolta la travatura ritorna nel suo stato naturale.

Ora, se si tien presente che i singoli termini che compaiono nella (20) sono sempre e tutti, per la loro stessa natura, essenzialmente positivi, si è senz'altro condotti a concluderne che, tra tutti i valori che l'energia potenziale elastica Φ può assumere al variare comunque del sistema delle forze esterne applicate, quello

$$\Phi = \Phi_0$$

relativo allo stato naturale è in ogni caso il minimo.

Avremo occasione di ritornar più innanzi su questa proprietà come su quella che può servire, occorrendo, a definire la configurazione naturale della travatura tra tutte le altre configurazioni possibili.

Per ora ci basta l'avervi accennato per poterne concludere che è impossibile render libera (vale a dire trasformare in lavoro meccanico) l'energia Φ_0 senza alterare il grado di connessione del sistema ovvero le sue condizioni di vincolo.

Resta così esaurientemente giustificato il nome di " energia vincolata " che si dà d'ordinario, e che noi stessi daremo d'or innanzi, alla Φ_0.

L'altra porzione dell'energia elastica, la quale deriva esclusivamente dall'azione delle forze esterne, e che si annulla, o meglio vien dalla travatura restituita sotto forma di lavoro meccanico esterno, quando le dette forze cessano di agire, verrà da noi più precisamente denominata " lavoro di deformazione " e denotata colla lettera L; porremo cioè

$$L = \frac{1}{2} \sum S \, . \, s \tag{21}$$

dopo di che l'espressione generale (20) dell'energia potenziale elastica si potrà sinteticamente scrivere sotto la forma

$$\Phi = \Phi_0 + L \tag{22}$$

la quale mette, meglio di ogni altra, in rilievo il diverso carattere e le differenti proprietà delle due parti di cui l'energia stessa è costituita.

***

Poichè il lavoro di deformazione dipende esclusivamente dalle forze esterne applicate alla travatura, è facile prevedere che esso dovrà potersi mettere sotto la forma di una funzione di dette forze.

Ma per far ciò è opportuno che noi apriamo prima una breve parentesi, e che stabiliamo, in modo assolutamente generale, una formola fondamentale a cui, anche nel seguito, avremo frequenti occasioni di fare ricorso.

Prescinderemo a tal fine momentaneamente da ogni relazione la quale stabilisca una qualsiasi corrispondenza tra i sistemi degli sforzi interni ed i sistemi delle variazioni di lunghezza delle aste, in dipendenza della supposta elasticità dei materiali di cui queste aste sono formate.

Prenderemo cioè in considerazione i singoli sistemi di sforzi in equilibrio per forze esterne date, ed i singoli sistemi di variazioni di lunghezza congruenti (vale a dire soddisfacenti al noto sistema di equazioni geometriche di condizione), senza per nulla preoccuparci che essi si corrispondano, anzi ammettendo esplicitamente che essi possano anche non corrispondersi affatto.

Sia F una qualunque delle forze esterne date, ed S uno qualunque degli sforzi interni in equilibrio con dette forze esterne.

Sia f lo spostamento che il nodo cui è applicata la forza F subisce, nella direzione stessa di F, in una *qualsiasi* variazione possibile di configurazione della travatura — la quale non ha dunque nessun rapporto necessario con quella particolare variazione di configurazione che potrebbe venir determinata dalla predetta sollecitazione — e sia s la variazione di lunghezza che in quella qualsiasi variazione possibile di configurazione compete all'asta di cui abbiamo indicato con S lo sforzo.

Consideriamo per un momento i singoli nodi della travatura come idealmente svincolati gli uni dagli altri e dal sistema fisso di riferimento; sicchè si possano trattare come punti liberi da ogni vincolo, ciascuno dei quali è soggetto alla forza F ad esso applicata ed agli sforzi S relativi alle aste che ad esso facevano capo.

Ed immaginiamo di imprimere ad un tal sistema di punti proprio quegli spostamenti che caratterizzano quella certa variazione possibile di configurazione della travatura che abbiam testè definita.

Poichè la risultante delle forze agenti su ciascun nodo è, per ipotesi, identicamente nulla, deve risultar necessariamente nulla anche la somma dei valori virtuali compiuti dalle diverse forze cui quel punto è soggetto.

Ed in conseguenza deve poi anche riuscir nulla la somma di tutte le somme analoghe relative ai diversi nodi della travatura.

Ora, la forza esterna F applicata ad un nodo il quale subisca uno spostamento virtuale f nella direzione della forza, fa un lavoro misurato dal prodotto $F \cdot f$; la somma dei lavori virtuali eseguiti in tali condizioni dalle diverse forze esterne, potrà pertanto scriversi sotto la forma

$$\Sigma F \cdot f.$$

Quanto agli sforzi interni S noi abbiamo già avuto occasione di dire (pag. 112) che il lavoro fatto da ciascuno di essi si può (in valore assoluto) sempre intender misurato dal prodotto dello sforzo stesso per la variazione di lunghezza virtuale dell'asta a cui esso si riferisce.

Questa volta è però necessario precisare il segno di questo prodotto. A tal fine il lettore ricorderà che noi abbiamo a suo tempo (pag. 33) convenuto di considerar positivi gli sforzi interni quando rappresentano delle tensioni, cioè quando tendono ad avvicinare i nodi su cui operano. Le variazioni di lunghezza devono invece considerarsi come positive quando consistono in allungamenti delle aste, vale a dire quando ad esse corrispondono degli allontanamenti dei nodi che le aste stesse collegano.

Per S ed s entrambi positivi, il lavoro dovrà dunque risultar negativo. Convien dunque che noi, mettendo il segno meno in evidenza, scriviamo l'insieme dei lavori virtuali degli sforzi interni sotto la forma

$$-\Sigma S \, . \, s$$

Si perviene così alla relazione

$$\Sigma F \, . \, f - \Sigma S \, . \, s = 0$$

che scriveremo più frequentemente così:

$$\Sigma F \, . \, f = \Sigma S \, . \, s \tag{23}$$

intendendo che la prima sommatoria va naturalmente estesa a tutti i nodi, mentre la seconda va estesa a tutte le aste che compongono la travatura reticolare data.

Questa eguaglianza — il lettore vorrà notarlo bene e tenerlo sempre presente — non esprime, come a tutta prima potrebbe credersi, una proprietà caratteristica degli stati di equilibrio della travatura, ma sibbene soltanto una relazione identicamente verificata ogniqualvolta le F e le S costituiscono un sistema di forze esterne e di sforzi interni in equilibrio, e le s costituiscono un sistema di variazioni di lunghezza congruenti, cioè tali che si possano effettivamente realizzare con un sistema di spostamenti dei nodi, di cui le f sono le componenti nelle direzioni delle forze esterne.

E ciò indipendentemente da quelle qualsiansi relazioni che possono o non, a seconda dei casi, intercedere fra il sistema delle forze e quello delle deformazioni.

Il procedimento, di carattere meccanico, di cui ci siamo serviti per stabilire la (23), non deve indurci a concludere senz'altro che sempre e necessariamente quella formola debba avere un significato fisico.

Mediante quel procedimento noi ci siamo dispensati dallo scrivere per disteso le relazioni statiche che, in ogni configurazione equilibrata, legano le S alle F, nonchè le relazioni geometriche che, nell'ipotesi della congruenza, sussistono fra le s e le f.

Ma l'interpretazione meccanica, provvisoriamente utilizzata in luogo di quelle relazioni analitiche, non ci obbliga affatto per l'avvenire. E noi considereremo semplicemente la (23) come una formola di trasformazione di una sommatoria estesa alle aste in una sommatoria estesa ai nodi, identicamente valida tutte le volte che le S e le F soddisfano alle equazioni fondamentali della statica, e le f e le s alle equazioni di congruenza.

*
* *

Se, come caso particolare, il sistema delle variazioni di lunghezza s è proprio quello che le aste presentano quando in esse si sviluppano gli sforzi S — nel qual caso gli spostamenti f dei singoli nodi, nelle direzioni delle forze F ad essi applicate, son proprio quelli che effettivamente si verificano sotto l'azione di queste forze — i due membri della (23) riacquistano subito quel significato fisico che ad essi in generale non spetta.

La sommatoria che sta al secondo membro di questa nostra formola viene infatti ad esser quella stessa che già abbiamo scritta nel secondo membro della (21): la quale può per conseguenza immediatamente trasformarsi ed assumere la forma

$$L = \frac{1}{2} \sum F \cdot f \tag{24}$$

Di qui il seguente importantissimo teorema, dovuto a CLAPEYRON:

Il lavoro di deformazione di una travatura reticolare in equilibrio sotto l'azione di date forze esterne è sempre eguale alla metà del lavoro che le stesse forze eseguirebbero qualora ai singoli loro punti di applicazione si attribuissero quei medesimi spostamenti che essi effettivamente subiscono nel passaggio della travatura dallo stato naturale allo stato di equilibrio considerato.