

IV.

Il principio di sovrapposizione degli stati di equilibrio.

Nell'ordinario modo di presentare la teoria si usa ammettere che, quando una travatura reticolare non si trova soggetta ad alcuna forza esterna, anche gli sforzi interni siano nulli, e le singole sue aste si trovino tutte nel loro stato naturale "non deformato".

Ora, ciò è evidentemente e rigorosamente vero per le travature staticamente determinate. In tal caso infatti il sistema delle equazioni dell'equilibrio, per forze esterne tutte nulle, ammette come unica sua soluzione quella ovvia in cui anche gli sforzi interni son tutti eguali a zero.

Ma nel caso delle travature staticamente indeterminate per sovrabbondanza di aste o di vincoli, dato un sistema qualunque di forze esterne, noi sappiamo che si può soddisfare alle equazioni dell'equilibrio in infiniti modi diversi. Se le forze esterne son tutte nulle, tra le soluzioni di quel sistema di equazioni vi sarà certamente anche quella rappresentata da sforzi interni essi pure tutti nulli; ma non sarà più la sola, e non v'è quindi più ragione alcuna per asserire, a priori ed in modo generale, che questa soluzione sia proprio quella che la travatura realizza nel suo stato di equilibrio.

Si possono infatti citare infiniti esempi di travature reticolari iperstatiche le cui aste, anche in assenza di ogni qualsiasi forza esterna, pel solo fatto delle loro mutue connessioni e dei vincoli che esse reciprocamente si impongono, si trovano in uno stato di mutua costrizione — o, come diremo abitualmente, coazione — che non può in alcun modo venire eliminata se non si distruggono, in tutto o in parte, quei vincoli, intaccando la compagine stessa del sistema.

Ora il lettore riuscirà facilmente a comprendere come ciò possa avvenire se vorrà mettere in relazione questa nostra affermazione con quel che si è detto a pag. 21 a proposito delle travature reticolari ad aste sovrabbondanti.

Osservammo allora che, mentre le lunghezze delle aste principali potevano, almeno entro certi limiti, assumersi ad arbitrio, quelle invece delle aste sovrabbondanti dovevano considerarsi come determinate in conseguenza; esse dovevano infatti essere identicamente eguali alle distanze (già perfettamente definite dalla presenza delle aste principali) dei nodi che le aste sovrabbondanti eran destinate a collegare: senza di che le aste stesse sarebbero riuscite incompatibili colle prime, e la travatura non si sarebbe più potuta costruire.

Naturalmente in quel ragionamento, come in tutto quel che si è detto nel capitolo I, era implicita l'ipotesi della perfetta indeformabilità delle aste.

Nel seguito noi abbiamo appreso, e messo in conto, il fatto che le aste sono, nella realtà delle cose, più o meno deformabili.

Dobbiamo pertanto modificare le nostre prime conclusioni nel senso che una travatura reticolare ad aste sovrabbondanti si può in pratica costruire anche se le lunghezze iniziali delle singole sue aste non sono fra loro rigorosamente compatibili; basta che all'atto del montaggio le aste sovrabbondanti siano, mediante l'applicazione di sforzi opportuni, costrette a deformarsi quanto occorre perchè le loro lunghezze vengano a coincidere colle distanze dei punti che esse son destinate a collegare.

S'intende che queste deformazioni, come del resto tutte quelle di cui noi ci occupiamo, si devono presupporre piccolissime a fronte delle lunghezze delle aste cui si riferiscono; il che implica ovviamente che il procedimento di montaggio forzato cui ci riferiamo è suscettibile di venire utilmente applicato solo se le differenze tra le lunghezze effettive delle singole aste e le lunghezze che esse teoricamente dovrebbero avere sono tutte molto piccole.

Comunque, è chiaro che, a montaggio eseguito, e sopresse che siano le azioni esterne che hanno reso il montaggio stesso possibile, il descritto stato di deformazione delle aste sovrabbondanti non potrà naturalmente mantenersi, perchè non equilibrato per forze esterne tutte nulle.

D'altra parte, le variazioni di lunghezza impresse a queste aste sovrabbondanti non potranno neppure annullarsi senza che

si producano delle variazioni di lunghezza nelle aste principali a cui esse sono state ormai indissolubilmente connesse.

Convien dunque ammettere che si stabilirà un regime di sforzi interni, in equilibrio per forze esterne tutte nulle, e che non può venire eliminato se non si sconnettono nuovamente le aste sovrabbondanti dalle principali in modo da consentire che ciascuna di esse riprenda la sua lunghezza iniziale indipendentemente dalle altre: il che equivale a dire, in ultima analisi, che il sistema delle variazioni di lunghezza che caratterizza questo stato naturale così definito non soddisfa alle equazioni geometriche di condizione, cioè non è congruente.

Noi chiameremo col nome di “ stato naturale ”, della travatura la configurazione di equilibrio che essa spontaneamente assume quando non è soggetta ad alcuna forza esterna.

A questo stato naturale ci riferiremo per definire, per esempio, gli spostamenti dei nodi che caratterizzano un altro qualunque stato, sia esso o non di equilibrio, della travatura data.

Ma, dopo quel che abbiamo detto poc'anzi, non potremo più assumere lo stato naturale come stato di riferimento nè nella valutazione degli sforzi interni, nè in quella delle variazioni di lunghezza delle singole aste.

Bisognerà quanto meno tener sempre ben presente che gli sforzi interni e le variazioni di lunghezza delle aste che nella travatura si determinano all'atto dell'applicazione di un dato sistema di forze esterne, e per effetto dell'azione di queste, non sussistono soli, ma vengono a sovrapporsi agli sforzi interni ed alle variazioni di lunghezza preesistenti nello stato naturale.

Noi denoteremo sempre colle lettere S_0 ed s_0 rispettivamente lo sforzo in un'asta generica, e la variazione di lunghezza che alla stessa asta conseguentemente compete, quando la travatura si trova nel suo stato naturale. Riserveremo per contro le lettere S ed s (senza indici) per denotare rispettivamente i nuovi sforzi e le nuove variazioni di lunghezza che alle prime si sovrappongono all'atto dell'applicazione del dato sistema di forze esterne I' , e per effetto dell'azione di questo.

Ne segue che gli sforzi e le variazioni di lunghezza delle aste in uno stato generico di equilibrio di una travatura, defi-

nito da un qualunque sistema dato di forze esterne, risulteranno in tesi generale espressi rispettivamente da

$$S_0 + S$$

e da

$$s_0 + s.$$

S'intende che tanto il sistema degli sforzi $S_0 + S$ caratterizzanti la configurazione generica di equilibrio, come quello degli sforzi S_0 proprii dello stato naturale, debbono essere in equilibrio: il primo per rapporto al sistema di forze esterne che dà origine a quella configurazione, il secondo invece per forze esterne tutte nulle.

Precisiamo.

Gli sforzi $S_0 + S$ debbono, in omaggio alle leggi generali della statica, soddisfare a quelle certe $2n$ equazioni che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè sussista equilibrio fra gli sforzi stessi e le forze esterne date F ; equazioni notoriamente lineari nelle forze e che perciò si possono, pur mantenendo alla nostra trattazione la massima generalità, rappresentare sotto la forma

$$\begin{aligned} \Sigma a_1 (S_0 + S) &= \Sigma b_1 F \\ \Sigma a_2 (S_0 + S) &= \Sigma b_2 F \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma a_{2n} (S_0 + S) &= \Sigma b_{2n} F \end{aligned}$$

$a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ e $b_1, b_2, \dots, b_{2n}$, essendo delle costanti di cui avremo occasione altrove di definire il preciso significato fisico.

Alle stesse equazioni debbono soddisfare gli sforzi S_0 con questa sola avvertenza che, essendo nello stato naturale le forze esterne per ipotesi tutte nulle, si annulleranno in esse identicamente tutti i termini che le contengono; donde il nuovo sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \Sigma a_1 S_0 &= 0 \\ \Sigma a_2 S_0 &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \Sigma a_{2n} S_0 &= 0 \end{aligned}$$

nel quale, si badi bene, i singoli coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ sono quegli stessi che già comparivano nel sistema di equazioni scritto sopra.

Per differenza si ricava subito il sistema di equazioni

$$\begin{array}{rcl} \Sigma a_1 & S & = \Sigma b_1 \quad F \\ \Sigma a_2 & S & = \Sigma b_2 \quad F \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma a_{2n} & S & = \Sigma b_{2n} \quad F \end{array}$$

a cui debbono soddisfare gli sforzi S : questi sforzi debbono dunque alla lor volta costituire un sistema equilibrato per rapporto alle date forze esterne.

D'altra parte, le variazioni di lunghezza s — che a quegli sforzi S sono necessariamente legate dalla stessa relazione di proporzionalità che in virtù della legge di Hooke deve sussistere tanto tra $s_0 + s$ ed $S_0 + S$ come tra s_0 ed S_0 — pel fatto che caratterizzano il passaggio della travatura dallo stato naturale allo stato generico di equilibrio considerato, debbono soddisfare alle $a - 2n$ equazioni che esprimono le condizioni geometriche necessarie e sufficienti perchè esse siano fra loro compatibili.

Se ne deduce che gli sforzi S e le variazioni di lunghezza s che nella travatura si producono all'atto dell'applicazione del dato sistema di forze esterne, e per effetto dell'azione di questo, riescono completamente determinati, in modo del tutto indipendente dalle grandezze S_0 ed s_0 .

Le $2n$ equazioni statiche e le $a - 2n$ equazioni geometriche di condizione a cui quegli a sforzi (o quelle a variazioni di lunghezza) debbono soddisfare, sono infatti quelle stesse che si sarebbero dovute scrivere se si fosse trattato di risolvere il problema dell'equilibrio della travatura data, sotto l'azione del dato sistema di forze esterne, nella ipotesi che nello stato naturale della travatura le singole aste si fossero tutte trovate nel loro stato naturale non deformato, nella ipotesi cioè che tanto gli sforzi S_0 come le variazioni di lunghezza s_0 fossero stati tutti identicamente nulli.

Se, pertanto, non è lecito trascurare l'esistenza di questi sforzi e di queste variazioni di lunghezza che in ogni travatura reticolare ad aste sovrabbondanti posson sussistere in assenza di forze esterne, è però sempre lecito scindere la risoluzione del problema generale dell'equilibrio in due tempi ben distinti: risolvendo a parte ed una volta per tutte il problema che concerne lo stato di coazione iniziale, poi prescindendo completamente dall'esistenza di questa coazione nella determinazione degli sforzi

e delle variazioni di lunghezza dovuti all'applicazione di date forze esterne.

Resta naturalmente ben inteso che i risultati ultimi delle due ricerche dovranno entrambi esser tenuti presenti, ed opportunamente sommati, quando si tratterà di giungere alla conoscenza dello stato effettivo di tensione o di deformazione delle singole aste.

Immaginiamo ora che alla travatura reticolare da noi presa in considerazione vengano successivamente e separatamente applicati due diversi sistemi di forze esterne, che indicheremo, per intenderci, rispettivamente con F'' e con F''' .

Denotiamo in conseguenza con $S_0 + S'$ e con $s_0 + s'$ gli sforzi e le variazioni di lunghezza che le varie aste presentano nella configurazione di equilibrio determinata dalle forze F' ; e similmente con $S_0 + S''$ e con $s_0 + s''$ gli sforzi e le variazioni di lunghezza che le stesse aste presentano nella configurazione di equilibrio determinata dalle forze F'' .

Dai due sistemi di equazioni caratterizzanti questi due stati di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma a_1 (S_0 + S') = \Sigma b_1 F' \\ \Sigma a_2 (S_0 + S') = \Sigma b_2 F' \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Sigma a_{2n} (S_0 + S') = \Sigma b_{2n} F' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma a_1 (S_0 + S'') = \Sigma b_1 F'' \\ \Sigma a_2 (S_0 + S'') = \Sigma b_2 F'' \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \Sigma a_{2n} (S_0 + S'') = \Sigma b_{2n} F'' \end{array} \right.$$

tenuto conto dell'analogo sistema di equazioni relativo allo stato naturale

$$\Sigma a_1 S_0 = 0$$

$$\Sigma a_2 S_0 = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\Sigma a_{2n} S_0 = 0$$

mento alle variazioni di lunghezza s delle singole aste della travatura.

Grazie a questa linearità si può senz'altro estendere ai sistemi degli spostamenti f quel che si è detto dei sistemi di variazioni di lunghezza s , nel senso che se nel passaggio dallo stato naturale della travatura ad un suo stato generico di equilibrio le aste subiscono delle variazioni di lunghezza del tipo

$$k' s' + k'' s''$$

gli spostamenti f risulteranno della forma

$$k' f' + k'' f''$$

E poichè quel che si è detto dianzi per due soli sistemi di forze esterne, si potrebbe evidentemente ripetere parola per parola per un numero qualunque di sistemi, si può concludere, in modo assolutamente generale, che:

Dati certi sistemi di forze esterne

$$F'', F'', \dots$$

i quali, applicati successivamente e separatamente ad una data travatura reticolare, producono degli spostamenti di certi nodi, secondo certe direzioni, misurati rispettivamente da

$$f', f'', \dots$$

nello stato di deformazione della travatura determinato da un sistema di forze esterne del tipo

$$k' F' + k'' F'' + \dots$$

ove

$$k', k'', \dots$$

sono delle costanti arbitrarie, si produrranno in quei medesimi nodi, e secondo quelle medesime direzioni, degli spostamenti del tipo

$$k' f' + k'' f'' + \dots$$

Questo teorema, noto sotto il nome di principio della sovrapposizione degli stati di equilibrio, è nella pratica della più grande utilità, perchè permette spesso di scindere le varie differenti difficoltà di un problema complesso, facendone dipendere la soluzione da quella di altri problemi più semplici.
