

sollecitazioni inferiori al limite di elasticità, le deformazioni permanenti, noi non abbiamo inteso dire che esse non esistono, ma soltanto che esse sono inferiori alle più piccole quantità che i nostri strumenti sono capaci di misurare.

Similmente noi non dobbiamo aspettarci che la teoria delle deformazioni elastiche che noi verremo costruendo sulla legge di Hooke come fondamento, sia verificata esattamente nelle deformazioni dei corpi naturali che noi avremo occasione di osservare e di sottoporre a misura: l'aver constatato che esiste un limite al di sotto del quale la legge di Hooke appare confermata dall'esperienza, non deve tentarci a concludere che al di sotto di quel limite la teoria rappresenti rigorosamente l'andamento dei fenomeni naturali, sibbene soltanto che le divergenze tra la teoria e la realtà delle cose saranno, al di sotto di quel limite, praticamente inapprezzabili perchè inferiori agli errori sperimentali.

In linea generale si può prevedere che il comportamento dei corpi naturali si presenterà tanto più vicino a quello del corpo perfettamente elastico della teoria quanto minore è l'ampiezza delle deformazioni sulle quali si opera.

Ed ciò è tanto vero che, se invece di considerare delle deformazioni statiche, si prendono in esame i moti vibratorii dei corpi elastici, moti le cui caratteristiche possono essere, entro certi limiti, facilmente studiate, anche quando le deformazioni che loro corrispondono sono estremamente piccole, per mezzo degli effetti sonori che li accompagnano, l'accordo della teoria coll'esperienza appare assolutamente completo: già Stokes infatti citava con ragione come una prova perentoria del valore della teoria dell'elasticità la costanza del tono musicale che si ottiene eccitando in un corpo elastico delle vibrazioni di ampiezze anche molto differenti fra loro.

Concludendo, se per una parte la teoria non interpreta completamente nessuna esperienza, per altra parte tutte le esperienze mostrano concordi che, al decrescere dell'ampiezza delle deformazioni, i fenomeni che si osservano nei corpi naturali tendono ad uniformarsi alle leggi della teoria, la quale ci si presenta così con tutti i caratteri di una teoria limite; limite eccezionalmente prezioso perchè, come abbiamo visto, rappresenta in certo qual modo il minimo di complessità dei fenomeni naturali.

**

Ma v'è un altro punto di vista dal quale appaiono ancor più palesemente l'importanza e l'utilità di questa teoria limite, ed è proprio quello dal quale deve guardar le cose il tecnico, l'ingegnere.

Non è infatti da credersi che il grado di approssimazione che l'ingegnere deve chiedere ad una teoria fisica per ritenerla applicabile nei suoi calcoli, sia soltanto determinato dall'ordine di grandezza degli errori sperimentali, e debba quindi necessariamente crescere all'infinito col perfezionarsi incessante dei mezzi strumentali. Esso è determinato invece essenzialmente dalle esigenze dei problemi speciali al cui studio la teoria deve essere applicata.

Ora per l'ingegnere la teoria delle deformazioni elastiche deve servire essenzialmente al calcolo delle dimensioni da attribuirsi agli organi resistenti delle costruzioni e delle macchine.

Il problema tecnico, quale si presenta all'ingegnere, consiste o nel determinare la forma da attribuirsi alle singole parti di un sistema resistente per ottenere la migliore utilizzazione della materia di cui quelle parti son costituite, ovvero, più frequentemente, nel trovare il modo di sfruttare al massimo le proprietà resistenti dei pezzi che gli sono forniti direttamente dall'industria.

Problema in generale assai semplice quest'ultimo: mentre il primo, quasi sempre molto complesso, richiede una soluzione vera e propria soltanto in un numero assai limitato di casi sufficientemente generali perchè ad essi possano tutti gli altri essere ricondotti.

I calcoli tecnici non possono d'altronde che essere grossolani. La necessità in cui si trova il costruttore di prevedere possibili difetti nel materiale che impiega, o notevoli inevitabili imperfezioni nella sua lavorazione o nel modo stesso con cui viene messo in opera, e soprattutto il dovere che gli incombe di mettere la sua costruzione al sicuro dalle conseguenze di possibili eccezionali aumenti nelle sollecitazioni esterne — aumenti la cui entità, a volte anche ragguardevole, non gli è dato di prevedere nell'impostare i suoi calcoli — lo obbligano ad impiegare sempre una quantità di materiale resistente superiore di molto a quella richiesta dalla teoria.

Coll'introdurre nelle sue formole i cosiddetti coefficienti di sicurezza egli viene a calcolare le sue costruzioni come se esse dovessero resistere a carichi assai più grandi di quelli che effettivamente egli pensa di realizzare.

Perciò non interessa in generale all'ingegnere il conoscere le condizioni statiche della sua costruzione ad ogni istante e corrispondentemente ad ogni condizione di carico; gli basta quasi sempre assicurarsi che il massimo cimento a cui il materiale può effettivamente venire assoggettato non giunga mai a mettere in pericolo la solidità della costruzione.

Adoperata in questo senso la teoria delle deformazioni elastiche si presta egregiamente, anzi nel migliore dei modi possibili, ai fini dell'ingegnere, in quanto che lo conduce a metodi di calcolo relativamente semplici nei quali la precisione assoluta poco importa che sia impossibile, dal momento che sarebbe assolutamente inutile.

*
** *

Tutto ciò premesso, diciamo brevemente come si eseguisce l'esperienza che serve a verificare la proporzionalità tra forze e deformazioni in un dato materiale — o meglio a determinare il limite al di sotto del quale tale proporzionalità si può, per quel materiale, ritenere praticamente verificata — e che nel tempo stesso ci fa conoscere il valore della costante di proporzionalità.

Ci riferiremo a tal fine, ed esclusivamente, a quelle particolari forme di saggi ed a quello speciale tipo di sollecitazione che meglio rispecchiano il caso caratteristico delle aste delle travature reticolari: supporremo cioè il saggio prismatico o cilindrico e la linea d'azione dello sforzo coincidente coll'asse del saggio (trazione o compressione semplice).

Una tale sollecitazione si può immaginar nel modo più semplice realizzata supponendo le azioni esterne ridotte a due sole forze eguali e contrarie uniformemente distribuite sulle due basi del prisma (o del cilindro).

Ma non è affatto detto che debba necessariamente esser così: ben di rado anzi l'applicazione delle azioni esterne si potrà in pratica limitare alle sole due basi del saggio: la maggior parte delle volte si deve, per necessità di cose, afferrare il saggio in

corrispondenza della superficie laterale prossima alle basi: in ogni caso la distribuzione delle azioni esterne riuscirà in pratica ben lungi dall'esser uniforme: in generale sarà anzi sconosciuta, e potrà variare sensibilmente da esperienza ad esperienza.

Si può però dimostrare teoricamente, e verificare sperimentalmente, che l'influenza della distribuzione locale delle azioni esterne applicate ad una delle estremità del saggio decresce rapidamente man mano che ci si allontana da essa; ad una distanza eguale al triplo, o tutto al più al quadruplo, della più grande dimensione trasversale del saggio, le deformazioni appaiono dipendere esclusivamente dalla risultante delle azioni esterne applicate alla base, o nelle immediate vicinanze di essa: nessuno dei nostri strumenti di misura, non esclusi i più sensibili e delicati, riesce ad avvertire l'influenza del particolare modo con cui la sollecitazione viene, nei singoli casi, trasmessa.

L'esperienza esige dunque la sola misura della intensità dello sforzo (di trazione o di compressione) applicato al saggio.

A questa misura provvede generalmente la macchina stessa di prova con cui lo sforzo viene prodotto, macchina sui cui particolari dispositivi non è certo qui il caso che noi ci soffermiamo: ci basta avvertire che ai fini dell'esperienza di cui ci stiamo occupando essa deve semplicemente soddisfare a questi due requisiti essenziali:

- 1) la linea d'azione dello sforzo deve mantenersi sempre, colla maggior possibile precisione, coincidente coll'asse geometrico del saggio;
- 2) l'intensità dello sforzo deve potersi mantenere costante, o far variare a volontà dell'operatore e secondo le esigenze della prova.

Quanto alla misura delle deformazioni — o meglio delle variazioni di lunghezza del saggio: le sole tra le deformazioni che il saggio subisce le quali presentino un interesse agli effetti del comportamento delle aste in una travatura reticolare — si eseguiranno coll'aiuto di speciali strumenti, detti estensimetri, che si fissano sul saggio stringendo questo fra punte o fra collaudi in modo da individuare su di esso due sezioni trasversali situate inizialmente ad una distanza nota; e che, man mano che il saggio si deforma, misurano le variazioni di distanza di quelle due sezioni.

Ai fini che qui ci prefiggiamo occorre e basta che l'estensimetro permetta di apprezzare delle variazioni di lunghezza del saggio dell'ordine del centomillesimo. Se, per esempio, le dimensioni del saggio sono tali che, una volta escluse le due porzioni estreme attigue alle basi (sulle quali può influire diversamente il modo di applicazione della sollecitazione), resti disponibile un tratto utile, su cui sperimentare, della lunghezza di cinque a dieci centimetri, un ingrandimento di 500 volte è più che sufficiente.

E lo si ottiene facilmente sia ricorrendo, per valutare gli spostamenti relativi piccolissimi di una delle sezioni per rapporto all'altra, all'uso di un ordinario microscopio, sia provvedendo a trasformare con opportuni dispositivi meccanici quegli spostamenti relativi piccolissimi in rotazioni, pure piccolissime, di uno o più specchi, e valutando poi queste per mezzo delle deviazioni che subiscono i raggi luminosi da essi riflessi.

Così operando si giunge facilmente a constatare che — fin che non si oltrepassa quello, che abbiamo convenuto di chiamare il limite di proporzionalità del materiale — la variazione di lunghezza del saggio è direttamente proporzionale alla lunghezza primitiva l ed alla intensità S dello sforzo applicato; inversamente all'area A della sezione retta.

Noi indicheremo d'or innanzi quella variazione di lunghezza colla lettera s assumendola naturalmente positiva se si tratta di una variazione positiva della lunghezza cioè di un allungamento, negativa se si tratta invece di un accorciamento del saggio; e scriveremo quindi

$$s = \frac{S \cdot l}{E \cdot A} \quad (14)$$

denotando con E una costante, sempre positiva, caratteristica di ciascun materiale, la quale prende il nome di *modulo di elasticità normale*.

È chiaro che il modulo è il rapporto tra lo sforzo per unità di area della sezione e la variazione dell'unità di lunghezza del saggio.

Si potrebbe dire, volendo, che esso rappresenta il valore dello sforzo che, applicato ad un saggio di sezione retta unitaria, sarebbe capace di produrvi un allungamento eguale alla lunghezza primitiva. Occorre appena avvertire che si tratta

però di un valore puramente ideale in quanto che tutto quel che stiamo dicendo vale soltanto fin che gli allungamenti si mantengono molto piccoli a fronte delle dimensioni primitive. Pei materiali di cui noi intendiamo occuparci, ben prima che un tale sforzo potesse venire raggiunto, non solo il limite di proporzionalità e quello di elasticità sarebbero stati superati, ma la resistenza stessa sarebbe stata vinta e si sarebbe verificata la rottura.

I diagrammi di Williot.

Ritorniamo col pensiero al caso semplice di un unico nodo P collegato mediante due aste a due punti A e B del sistema fisso di riferimento (fig. 46), e — traendo partito dal fatto che

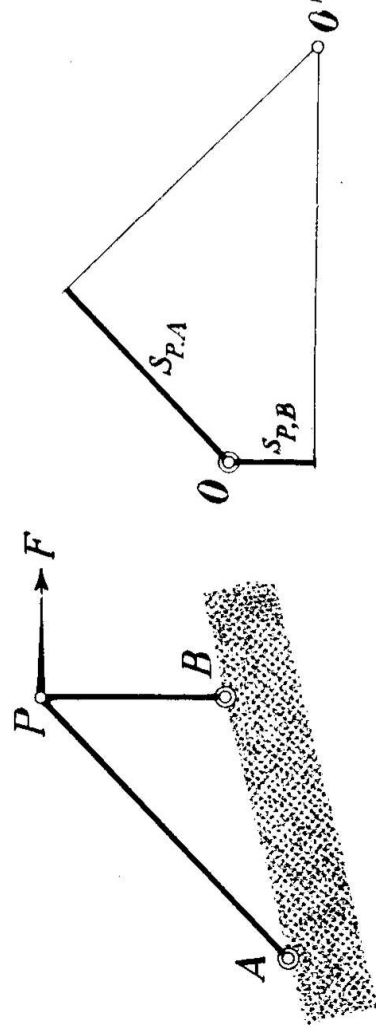


Fig. 46.

abbiamo ormai imparato tanto a determinar graficamente gli sforzi interni dovuti ad una qualsiasi sollecitazione esterna F' , come a dedurne col calcolo le variazioni di lunghezza delle aste — proponiamoci di costruire lo spostamento effettivo del nodo.

Naturalmente, come abbiamo avuto occasione di rilevare anche recentemente (cfr. la nota a pag. 73), per ciò stesso che lo spostamento è piccolissimo a fronte delle dimensioni del sistema, bisognerà necessariamente adottare per rappresentarlo in disegno una scala diversa da quella che ha servito per la rappresentazione della travatura.

Nell'intento di evitare equivoci, noi prenderemo perciò l'abitudine di rappresentare sempre questi spostamenti, non già sullo

schema della travatura (come si era fatto in fig. 44 a solo scopo dimostrativo), ma in un diagramma a parte.

Assumeremo perciò un'origine arbitraria O , ed a partire da essa incominceremo col rappresentare in grandezza, direzione e senso, le variazioni di lunghezza delle due aste di collegamento.

Sia $s_{P,A}$ il vettore che, nella nuova scala adottata, misura la variazione di lunghezza dell'asta AP , o, se si vuole, lo spostamento che il punto P subirebbe per effetto di quella variazione, tenuto conto che A è e rimane fisso, supposto che l'asta AP non mutasse di direzione.

Similmente sia $s_{P,B}$ il vettore che, nella medesima scala, misura la variazione di lunghezza dell'asta BP , epperò anche lo spostamento che P subirebbe per effetto di questa variazione, dato che B è fisso, supposta invariabile la direzione dell'asta BP .

Il lettore farà bene a rilevar, nella figura, il differente segno dei due spostamenti: $s_{P,A}$ che rappresenta una variazione positiva di lunghezza (allungamento) dell'asta, e quindi un allontanamento di P dal punto fisso A , è stato portato, a partire dall'origine O , nella direzione che va da A verso P ; $s_{P,B}$ invece è stato portato nella direzione opposta a quella che da B va verso P , perchè deve rappresentare una variazione di lunghezza negativa (accorciamento), epperò un avvicinamento di P al punto fisso B .

Va da sé che i due spostamenti non sono fra loro compatibili: che cioè i due estremi delle due aste, se queste si allungassero o si accorciassero senza ruotare, cesserebbero di coincidere in un unico punto.

In realtà le due variazioni piccolissime di lunghezza delle aste sono accompagnate da opportune loro rotazioni, pure piccolissime, attorno ai due punti fissi cui fanno capo.

Perciò allo spostamento $s_{P,A}$ del punto P considerato come estremo dell'asta AP , si dovrà sommare geometricamente un altro spostamento derivante da una rotazione di P attorno ad A ; spostamento che, data la sua supposta piccolezza, potrà sempre venir rappresentato con un vettore diretto normalmente alla direzione AP .

Similmente allo spostamento $s_{P,B}$ si dovrà sommare geometricamente un altro spostamento derivante da una rotazione di P attorno a B , e rappresentabile con un vettore diretto normalmente alla direzione BP .

Ciò posto, la condizione che lo spostamento di P , considerato come estremo dell'asta AP , coincida collo spostamento di P , considerato come estremo dell'asta BP , risulta soddisfatta soltanto se a rappresentare tale spostamento, in grandezza, direzione e senso, si assume il vettore OO' che fa capo al punto O' in cui si intersecano la normale condotta per l'estremo di $s_{P,A}$ e quella condotta per l'estremo di $s_{P,B}$.

OO' sarà dunque lo spostamento cercato.

*
**
*

Questa costruzione, opportunamente ripetuta per i diversi nodi, è stata dal Williot riconosciuta utilizzabile per la determinazione per via grafica degli spostamenti dei nodi di una qualsiasi travatura reticolare piana di cui siano noti gli sforzi interni e quindi le variazioni di lunghezza delle aste.

In realtà l'applicazione del procedimento non presenta nessuna difficoltà se la travatura è a nodi canonici.

Valga a dimostrarlo l'esempio della fig. 47, nella quale la solita travatura, che abbiamo già tante volte utilizzata per dar forma concreta ai nostri ragionamenti, si è supposta sollecitata da un'unica forza F_4 .

Nella figura, in basso, si vede disegnato il diagramma Cremoniano della travatura, relativo a questa particolare condizione di carico; in base ad esso sono state calcolate le variazioni di lunghezza delle singole aste. A destra sta il diagramma degli spostamenti nella forma proposta da Williot.

La costruzione dello spostamento 0.1 del nodo 1 non presenta nulla di nuovo per rapporto a quel che dianzi si è detto.

Quando si passa al nodo 2 bisogna tener conto dello spostamento, già calcolato del nodo 1 , e sommare questo spostamento a quello dovuto alla variazione di lunghezza dell'asta 1.2 ed alla possibile rotazione di quest'asta attorno ad 1 come centro; a tal fine basta che il vettore che deve rappresentare la variazione di lunghezza dell'asta 1.2 invece di venir condotto a partire dall'origine, venga condotto a partire dal punto 1 del diagramma.

Similmente per costruire lo spostamento del nodo 3 bisognerà effettuare da un lato la somma dello spostamento 0.1 del nodo 1 con lo spostamento dovuto alla variazione di lunghezza del-

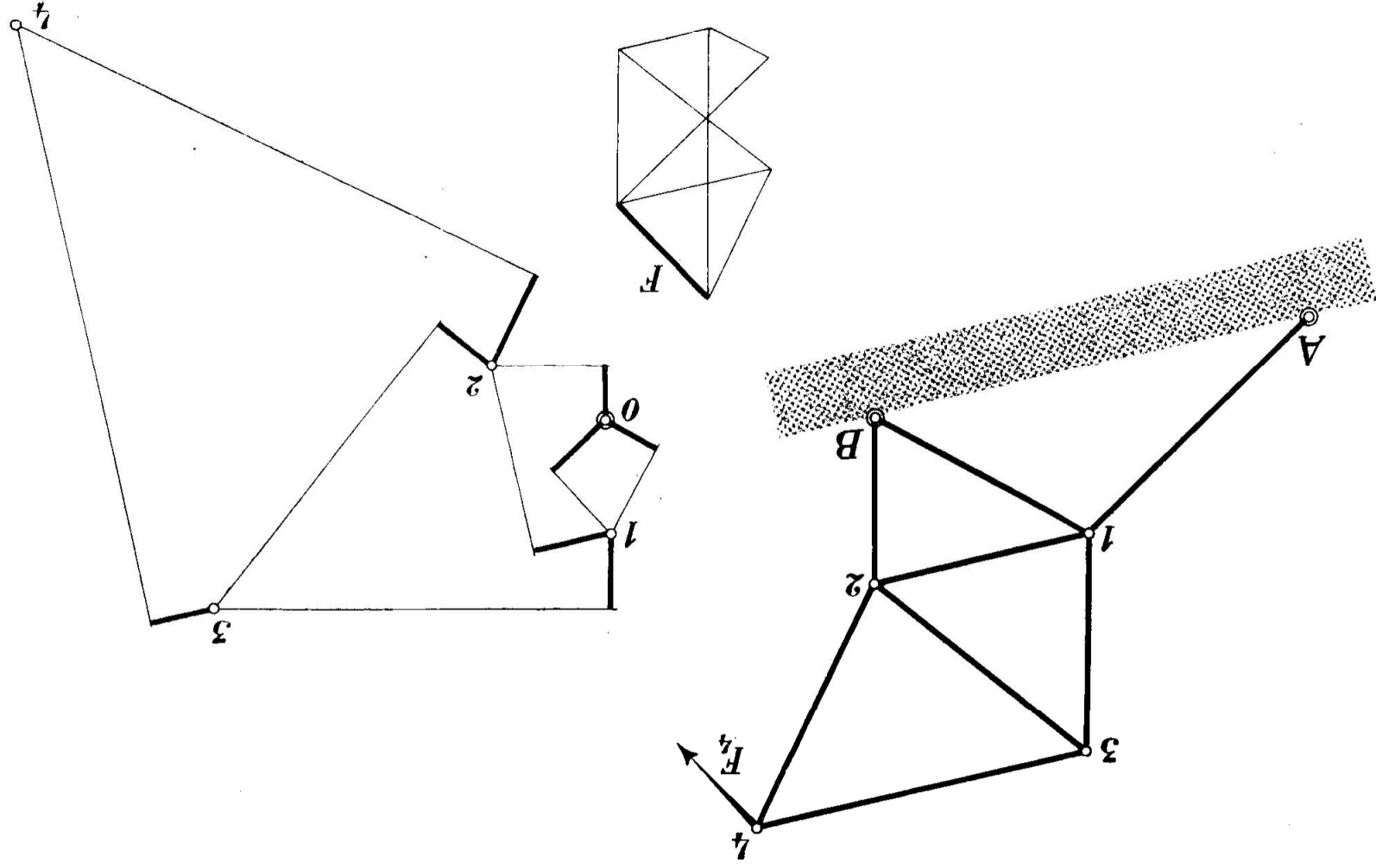


Fig. 47.

l'asta $1 \cdot 3$ ed alla possibile rotazione di quest'asta attorno ad 1 ; dall'altro lato si dovrà effettuare la somma dello spostamento $0 \cdot 2$ del nodo 2 con quello dovuto alla variazione di lunghezza dell'asta $2 \cdot 3$ ed alla sua possibile rotazione attorno a 2 .

Lo stesso si dica per il nodo 4 e per quanti altri per avventura lo seguissero.

*
*
*

Ma se la travatura non è a nodi canonici, il ragionamento, così come l'abbiamo fatto or ora, cessa di essere applicabile.

Si guardi, per esempio, alla travatura rappresentata nella fig. 48.

La determinazione degli sforzi si è eseguita nel modo già indicato a suo tempo (pag. 67) utilizzando dapprima il metodo di Culmann per trovare le tensioni nelle tre aste di vincolo, poi ricorrendo alle solite successive decomposizioni per costruire il diagramma rappresentato nella figura in basso.

Una volta calcolate le variazioni di lunghezza delle singole aste, si potrà determinare lo spostamento del nodo 1 col procedimento solito; ma si vede subito che lo stesso procedimento non servirà più per nessuno degli altri nodi.

Se infatti si tenta di passare dalla considerazione del nodo 1 a quella del nodo 3 , si potrà bensì affermare che lo spostamento di 3 si deve poter ottenere sommando geometricamente quello di 1 con l'allungamento dell'asta $1 \cdot 3$ e con lo spostamento derivante da una eventuale rotazione di 3 attorno ad 1 .

Ma siccome le altre aste che si dipartono da 3 fanno tutte capo a nodi i cui spostamenti sono ancor sconosciuti, così non si vede più in qual modo si potrebbe ora determinare l'ampiezza di quella rotazione.

Conviene allora operare una sostituzione di vincoli che ci riconduca nell'ambito delle travature a nodi canonici.

La cosa si può naturalmente fare in più modi diversi: si può, per esempio, immaginare momentaneamente soppressa l'asta di vincolo $B \cdot 2$ e sostituita idealmente da un'asta che colleghi il punto 3 di cui ci stiamo occupando ad un punto fisso C (fig. 49).

Naturalmente nell'atto di sopprimere l'asta $B \cdot 2$ noi avremo l'avvertenza di immaginar applicata al nodo 2 , che essa vinco-

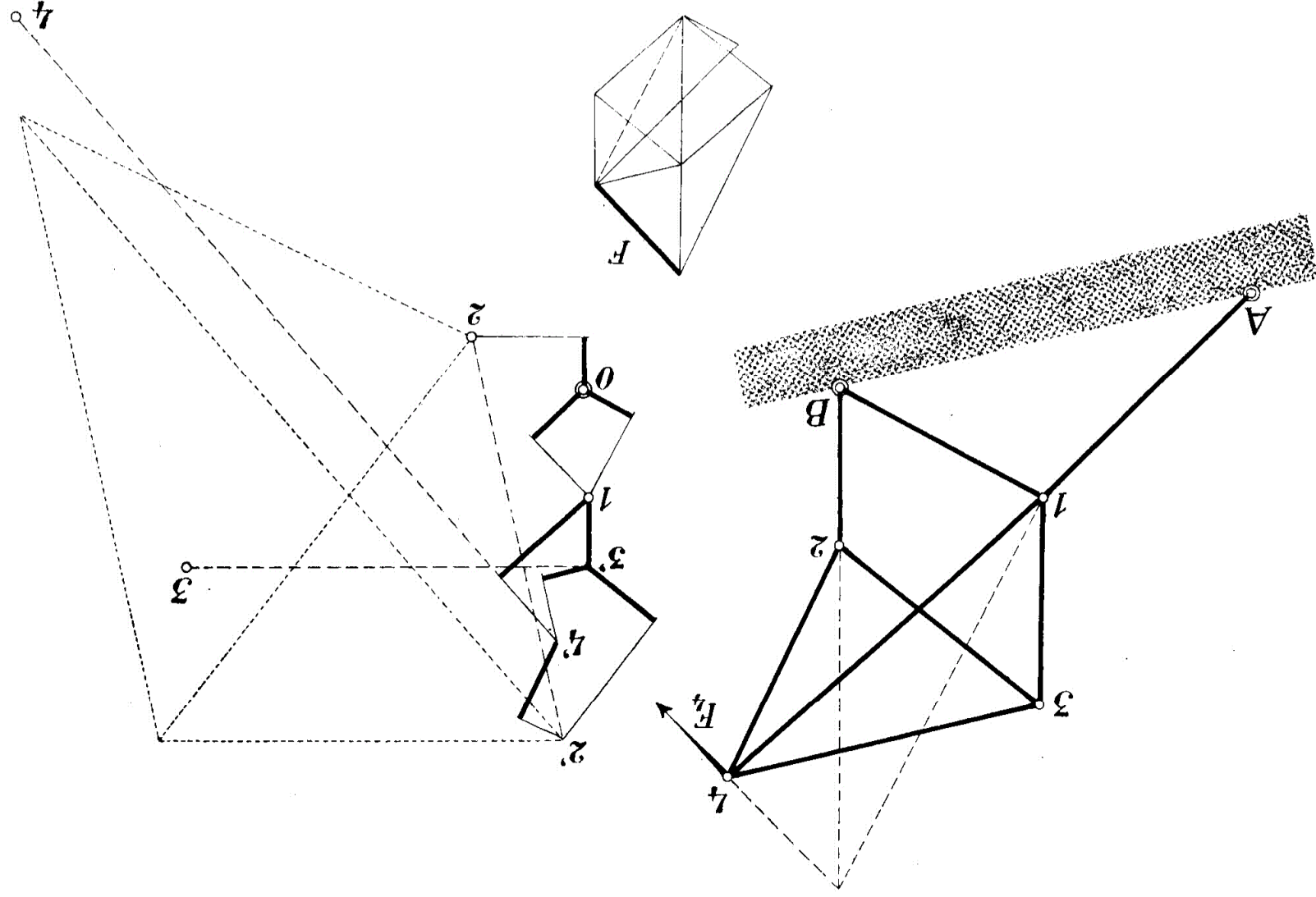


Fig. 48.

lava, una forza $S_{2,B}$ equipollente alla tensione che in quell'asta si sviluppava per effetto della data sollecitazione esterna F'_4 . Grazie a questa avvertenza il regime degli sforzi interni della travatura non resta turbato dalla avvenuta sostituzione di aste, e l'asta nuova $3 \cdot C$ non sviluppa sforzo di sorta.

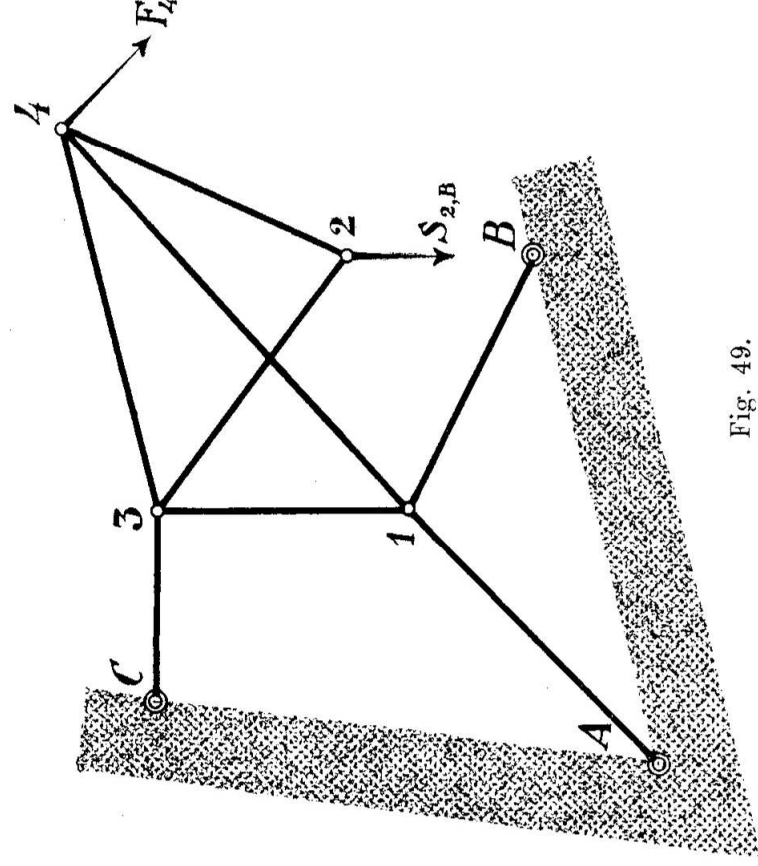


Fig. 49.

La sua presenza basta però a definire lo spostamento del nodo 3; immaginiamo, tanto per fissar le idee, che tale asta sia diretta perpendicolarmente all'asta $1 \cdot 3$; allora, tenuto conto che in essa lo sforzo è nullo e che quindi deve anche necessariamente esser nulla la sua variazione di lunghezza, dovrà esser nulla la rotazione di 3 attorno ad 1.

Lo spostamento di 3 si otterrà dunque nel modo più semplice come somma dello spostamento di 1 e dell'allungamento dell'asta $1 \cdot 3$; sarà perciò rappresentato in disegno dal vettore $0 \cdot 3'$.

In funzione di $0 \cdot 1$ e di $0 \cdot 3'$ si costruiranno poi senza difficoltà gli spostamenti $0 \cdot 4'$ e $0 \cdot 2'$ dei rimanenti nodi 4 e 2 della travatura.

S'intende che, poichè si sono utilizzate le variazioni reali di lunghezza delle aste, questi spostamenti definiranno bensì quelle che si potrebbero chiamare le posizioni relative dei nodi 2 e 4

per rapporto all'asta $1 \cdot 3$ a cui quei nodi sono connessi. Non si tratterà però ancora, in generale, degli spostamenti reali da noi cercati: basta, per convincersene, constatare che lo spostamento $0 \cdot 2'$ non è generalmente compatibile colla presenza dell'asta $B \cdot 2$.

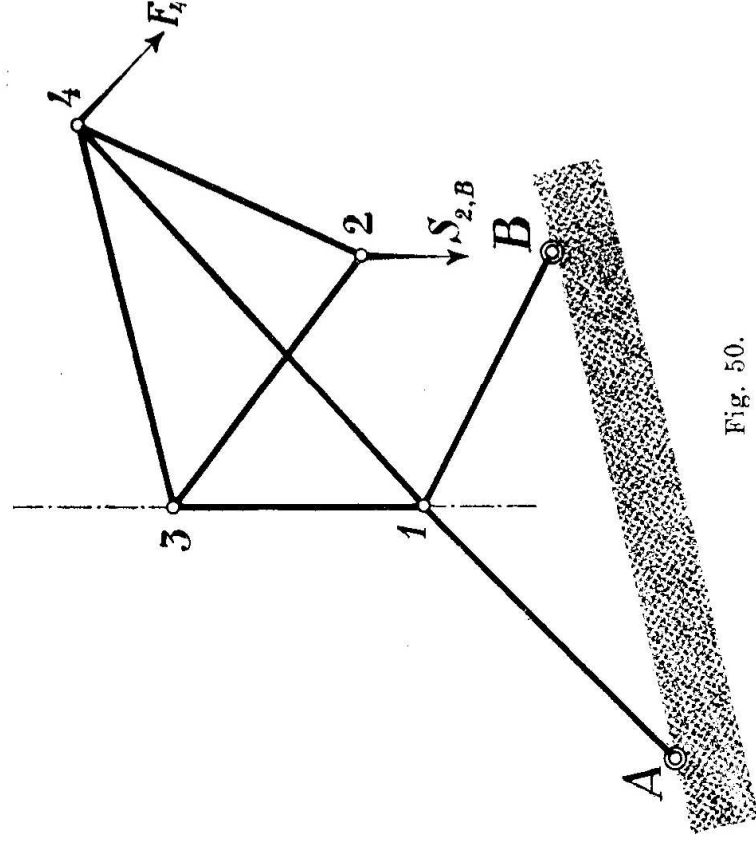


Fig. 50.

Per potere perciò ripristinare l'asta $B \cdot 2$ non basta più, ora che la travatura è deformata, sopprimere l'asta $3 \cdot C$ che l'aveva rimpiazzata, ma bisogna inoltre far subire al gruppo dei nodi che sono connessi all'asta $1 \cdot 3$ una conveniente rotazione attorno al punto 1 come centro.

È chiaro d'altronde che l'asta $3 \cdot C$ non ha rappresentato nel nostro ragionamento che un artificio per giustificare la possibilità di passare dallo spostamento di 1 a quello di 3 senza introdurre la rotazione dell'asta $1 \cdot 3$ attorno ad 1 , rotazione di cui ignoravamo l'ampiezza.

Si sarebbe potuto più semplicemente ragionare così:

Soppressa l'asta di vincolo $2 \cdot B$, ed introdotta in sua vece la relativa tensione $S_{2,B}$ perchè il primitivo stato di equilibrio non venga ad esser turbato, nulla ci vieta di proseguire la costruzione del diagramma di Williot introducendo l'ipotesi affatto arbitraria della invariabilità della direzione dell'asta $1 \cdot 3$ (fig. 50).

A costruzione ultimata, trovato che sia lo spostamento $0.2'$ che, in base a tale ipotesi, spetterebbe al nodo 2 , e constatato che tale spostamento non è generalmente compatibile colla presenza dell'asta $2.B$, si provvederà ad imprimere alla porzione di travatura connessa coll'asta 1.3 una rotazione di conveniente ampiezza attorno al nodo 1 approfittando a tal uopo del grado di libertà di cui il sistema può fruire dopo la soppressione dell'asta $B.2$ semprechè si rinunci alla supposta invariabilità della direzione 1.3 .

L'ampiezza della rotazione che serve allo scopo è ora subito trovata: basta tener presente che lo spostamento reale 0.2 del punto 2 deve potersi ottenere sia sommando geometricamente lo spostamento $0.2'$ già calcolato, con uno spostamento interpretabile come una rotazione attorno ad 1 , epperò diretto normalmente alla direzione della retta che congiunge i nodi 1 e 2 , sia sommando geometricamente la variazione di lunghezza dell'asta $B.2$ con lo spostamento che l'estremo 2 di quest'asta può subire quand'essa ruota attorno all'estremo fisso B .

Si otterrà pertanto il punto 2 conducendo dall'origine il vettore che rappresenta in grandezza, direzione e senso, la variazione di lunghezza dell'asta di vincolo $B.2$ e per l'estremo di esso vettore la perpendicolare, e prolungando questa fino ad incontrare la perpendicolare condotta da $2'$ alla retta congiungente i nodi 1 e 2 .

Quanto agli spostamenti 0.3 e 0.4 dei rimanenti nodi 3 e 4 è chiaro che si otterranno sommando geometricamente agli spostamenti $0.3'$ e $0.4'$ prima trovati gli spostamenti $3'.3$ e $4'.4$ dovuti alla rotazione stessa che al nodo 2 ha impresso lo spostamento $2'.2$.

Questi spostamenti devono evidentemente avere grandezze proporzionali alle distanze dei nodi cui si riferiscono dal comune centro di rotazione 1 ed esser diretti perpendicolarmente ai rispettivi raggi.

Se i nodi son molto numerosi può valer la pena di costruire questi spostamenti a parte con operazioni grafiche adatte; se son pochi potrà esser più comodo calcolarli analiticamente: in ogni caso la determinazione degli spostamenti effettivi non presenta ormai più alcuna difficoltà.
