
III.

Le deformazioni elastiche.

Noi abbiamo esplicitamente supposto — nella impostazione iniziale di questa nostra trattazione del problema dell'equilibrio delle travature reticolari piane — che le aste, le quali collegano i singoli nodi della travatura tra loro ed ai punti del sistema fisso di riferimento, fossero indeformabili: fossero cioè tali da definire in modo assoluto le distanze dei punti a cui fanno capo.

È noto però che in natura non esistono corpi perfettamente indeformabili, cioè dotati di forma e dimensioni assolutamente invariabili: tutti i corpi naturali, sotto l'azione di forze esterne anche piccole, subiscono delle deformazioni, grandi o piccole a seconda dei casi, a volte anche così piccole da sfuggire ad un esame superficiale, ma suscettibili sempre di essere misurate quando si disponga di metodi di misura opportunamente sensibili.

È bensì vero che per costruire le aste delle loro travature reticolari i tecnici si servono precisamente ed esclusivamente di materiali che, sotto l'azione degli sforzi cui le aste stesse posson venir cimentate, non subiscono che deformazioni molto ma molto piccole, sicchè le distanze dei punti a cui esse aste fan capo non variano alla lor volta che di pochissimo.

Si spiega così come, in un primo studio approssimato dei problemi dell'equilibrio delle travature reticolari, si presenti spontanea l'idea di trascurare le deformazioni delle singole aste, e di far dipendere la soluzione di quei problemi dalla teoria dell'equilibrio di sistemi ideali supposti dotati di una perfetta indeformabilità.

Di qui l'applicazione che noi abbiamo fatta della statica dei sistemi rigidi allo studio dell'equilibrio delle travature reticolari.

Questa applicazione si fonda evidentemente sul presupposto che le leggi che l'ipotesi della rigidità conduce a formulare debbano logicamente determinare una soluzione, per lo meno approssimata, del problema reale tutte le volte che le deformazioni effettive della travatura alterano (in ragione della loro piccolezza) di pochissimo le sue condizioni statiche.

E così avviene in realtà in tutti i casi in cui la soluzione offertaci dalla statica dei sistemi rigidi è unica e ben definita, in tutti i casi cioè in cui la travatura è staticamente determinata.

Infatti, è ben vero che la soluzione del problema dell'equilibrio, da noi trovata facendo completa astrazione da ogni qualsiasi deformazione della travatura, cessa, a rigore, di essere esatta se la travatura subisce una deformazione; e ciò perchè, al variare, sia pur di pochissimo, delle dimensioni delle singole aste, variano le distanze dei punti a cui esse fan capo, variano in conseguenza le posizioni dei singoli nodi, e quindi variano anche le direzioni delle aste che li collegano; varia in una parola quello schema della travatura sul quale i calcoli sono stati istituiti.

Ma, se le lunghezze delle aste sono variate, come si è supposto, di pochissimo — se cioè le variazioni delle distanze dei nodi a due a due si mantengono sempre piccolissime a fronte delle distanze stesse — le nuove posizioni dei nodi risulteranno necessariamente vicinissime alle posizioni primitive, e le nuove direzioni delle aste faranno necessariamente degli angoli piccolissimi colle direzioni primitive: in una parola lo schema nuovo della travatura differirà di pochissimo dallo schema primitivo.

Ne segue che, se anche si potessero rieseguire, sullo schema della travatura deformata, quelle operazioni di composizione e di decomposizione di forze a cui in ultima analisi si riduce sempre il calcolo (sia esso grafico od analitico, poco importa) del regime statico di una travatura reticolare staticamente determinata soggetta a carichi dati, i risultati che si otterrebbero differirebbero necessariamente di pochissimo da quelli già ottenuti facendo completa astrazione dalle deformazioni.

Se poi si tien conto del fatto che le variazioni di lunghezza delle aste — e quindi le nuove posizioni dei nodi, ed, in una parola, lo schema nuovo della travatura deformata — dipendono necessariamente dai valori degli sforzi che andiamo cercando, sono cioè delle funzioni delle incognite stesse del pro-

blema, si vede subito a quali gravi complicazioni si andrebbe incontro se si volesse fare un calcolo rigoroso.

Non conviene d'altronde dimenticare che le finalità pratiche che questi calcoli si prefiggono, e le cause di incertezza che son loro proprie, in quanto affettano, per esempio, i dati stessi del problema, sono tali che una precisione assoluta di risultati sarebbe non solo inutile, ma, nella maggior parte dei casi, illusoria.

Perciò tutte le volte che la statica dei sistemi rigidi ci conduce ad una soluzione unica e ben determinata del problema dell'equilibrio di una travatura reticolare — tutte le volte cioè che si possono esprimere gli sforzi nelle singole aste in funzione delle forze esterne applicate, senza mettere in conto le deformazioni che ne conseguono — noi riterremo tale soluzione come applicabile, almeno in via di approssimazione, anche nel caso in cui le deformazioni non son nulle, ma piccolissime: e ciò con una approssimazione che è naturalmente tanto più grande quanto più piccole sono le deformazioni, ma che è, in tutti i casi pratici, più che sufficiente per i bisogni della tecnica.

S'intende bene che con ciò noi non intendiamo già di rinunciare di proposito ad occuparci delle deformazioni delle travature reticolari staticamente determinate; chè anzi ci accadrà non di rado di aver bisogno di valutarle, e di riscontrarle nella travatura eseguita, e di trarre interessanti conclusioni dalla più o meno esatta corrispondenza tra i valori delle deformazioni rilevati sperimentalmente e quelli dedotti per via teorica col calcolo.

Intendiamo soltanto affermare che rinunciamo a tener conto dell'influenza piccolissima che l'esistenza delle deformazioni ha sull'entità degli sforzi nelle singole aste, e che ci limitiamo a calcolar questi sforzi — e quindi anche le deformazioni che ne conseguono — come se la travatura nel suo stato effettivo di equilibrio, invece di esser deformata, avesse ancora la forma e le dimensioni che essa possedeva nel suo stato naturale in assenza di ogni qualsiasi forza esterna.

**

Non è però detto che si possa sempre fare così: non è cioè detto che si possa sempre escludere la possibilità che quelle deformazioni, per quanto piccolissime, abbiano un'influenza non trascurabile sulle condizioni statiche della travatura.

In realtà — anche prescindendo dalla considerazione di quelle particolari travature dotate di singolarità, nei confronti delle quali la statica dei sistemi rigidi cade in difetto nel senso che non conduce a nessuna soluzione ovvero che ne ammette infinite — è facile riconoscere che vi è tutta una categoria di travature reticolari per le quali l'ipotesi della perfetta rigidità

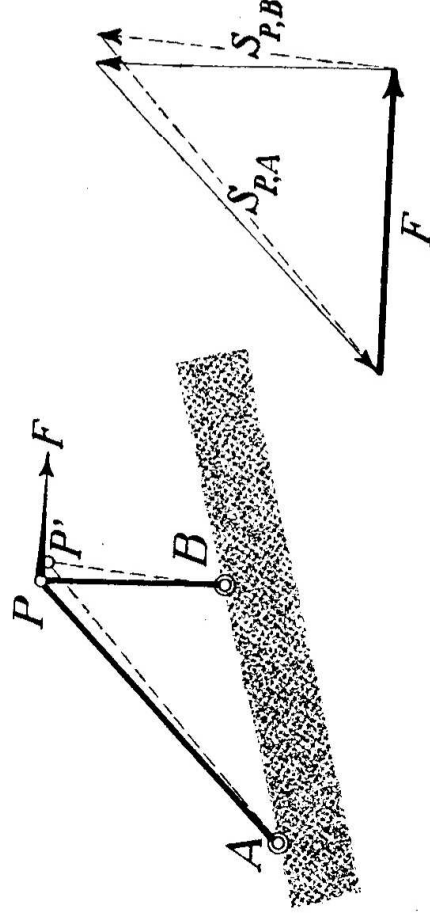


Fig. 44.

non è più lecita: alludiamo alle travature ad aste sovrabbondanti che abbiamo già avuto occasione di designare col nome di travature staticamente indeterminate od iperstatiche.

Ecco un esempio atto a chiarire come vanno allora le cose. Consideriamo in un piano un punto P (fig. 44) collegato mediante due aste a due punti A e B (non allineati con esso) del solito sistema fisso di riferimento.

Noi già sappiamo che se sul punto P agisce una forza esterna F affatto qualunque, nelle due aste di collegamento si sviluppano, in condizioni di equilibrio, due sforzi le cui grandezze si ottengono nel modo più semplice decomponendo la F in due componenti aventi rispettivamente le direzioni delle congiungenti PA e PB .

Possiamo inoltre agevolmente riscontrare l'attendibilità delle considerazioni fatte poc'anzi a proposito della possibilità, anzi della opportunità, di adottare una tal soluzione del problema dell'equilibrio del punto P anche quando le due aste di collegamento, sotto l'azione degli sforzi che in esse si sviluppano, subiscono delle variazioni piccolissime di lunghezza.

In questa ipotesi infatti P passerà in una nuova posizione P' vicinissima a P , cioè tale che la distanza PP' sia piccolissima

a fronte delle distanze PA e PB ⁽¹⁾. Ciò è quanto dire che saranno piccolissimi gli angoli che le nuove direzioni $P'A$ e $P'B$ faranno colle direzioni primitive PA e PB . In conseguenza i valori degli sforzi interni nella configurazione di equilibrio (inco-

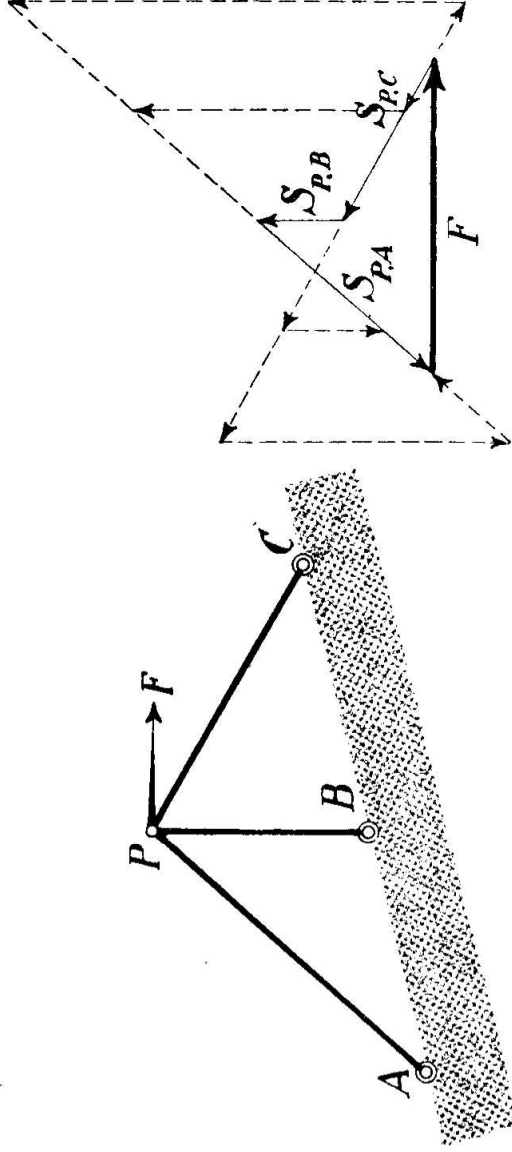


Fig. 45.

gnita). $AP'B$ del sistema, che si dovrebbero calcolare decomponendo la F nelle sue due componenti parallele a $P'A$ ed a $P'B$, differiranno di pochissimo dai valori calcolati operando la decomposizione secondo PA e PB nella ipotesi della rigidità.

Tuttociò premesso immaginiamo di aggiungere al sistema sopra considerato una nuova asta la quale colleghi il punto P ad un terzo punto C del sistema fisso di riferimento, giacente, s'intende, nel piano stesso dei punti P , A , B e del resto in posizione generica per rapporto ad essi (fig. 45).

È evidente che per l'equilibrio del punto P , supposto sempre sollecitato dalla forza esterna F ad esso applicata, occorre e basta che nelle tre aste di collegamento PA , PB , PC si sviluppino tre sforzi la cui risultante sia eguale e contraria alla F .

Ma noi sappiamo che ciò si può ottenere in infiniti modi diversi: che si possono cioè immaginare infinite terne di sforzi

⁽¹⁾ Nella figura 44 le variazioni di lunghezza delle due aste sono state volutamente esagerate per rendere visibile in disegno lo spostamento PP' . Ne segue che ad essa non va dato che un valore puramente dimostrativo, e che quel che qui si verrà dicendo s'intende riferito a quella figura cui il nostro disegno tenderebbe per PP' tendente a zero.

diretti secondo PA , PB e PC ed aventi la risultante eguale e contraria alla F ; basta a tal fine scegliere ad arbitrio lo sforzo relativo ad una qualunque delle aste, per esempio alla PC , e dedurne, nei modi noti, gli sforzi in PA ed in PB capaci di far equilibrio a quello sforzo arbitrario ed insieme alla F .

S'intende che di tutte queste infinite soluzioni che la statica ci offre una sola è in realtà possibile quando i materiali di cui le aste son costituite, anzichè esser rigidi, si deformano, sia pur di pochissimo, sotto l'azione degli sforzi che le aste stesse sopportano.

Consideriamo infatti una qualunque terna di sforzi risolvanti e, in funzione degli sforzi che competono alle due aste PA e PB , immaginiamo di saper calcolare le conseguenti variazioni piccolissime di lunghezza di queste due aste.

Poichè A e B son per ipotesi dei punti fissi, una volta note le nuove lunghezze delle aste PA e PB , sarà da considerarsi come nota, o immediatamente calcolabile, anche la nuova posizione del punto P .

E poichè anche C è per ipotesi fisso, sarà da considerarsi come determinata in conseguenza anche la nuova distanza di P da C .

Ora questa distanza — determinata in funzione degli sforzi nelle aste PA e PB nonchè, naturalmente, delle caratteristiche fisiche e meccaniche di tali due aste — se si vuole che il sistema dato si conservi integro, se si vuole cioè che gli estremi delle tre aste continuino, a deformazione avvenuta, a far capo ad un medesimo punto, dovrà essere identicamente eguale alla nuova lunghezza assunta dall'asta PC : nuova lunghezza che deve per conto suo potersi determinare in funzione dello sforzo nell'asta e delle caratteristiche meccaniche e fisiche di questa.

Di qui una equazione di condizione tra i tre sforzi in PA , PB , PC a coefficienti dipendenti dalla natura dei materiali di cui le aste son costituite, la quale equazione non sarà in generale soddisfatta da una qualunque delle terne di valori forniti dalla statica nel modo poc'anzi indicato; ma potrà servire a determinare, tra tutte quelle infinite terne, quella particolare che è realizzabile con determinate caratteristiche fisico-meccaniche delle aste di collegamento.

**
**

Il ragionamento, per quanto eseguito a proposito di un caso tanto particolare, ha evidentemente una portata assolutamente generale.

Immaginiamo infatti di prendere in considerazione una di quelle travature reticolari piane costituite da n nodi e da $a = 2n + k$ aste, travature che abbiamo a suo tempo (pag. 21) riconosciute come dotate di k aste sovrabbondanti, nelle quali cioè si possono sempre trovare k aste suscettibili di essere sopresse senza che perciò la configurazione del sistema cessi di essere geometricamente definita.

Allora le tensioni di quelle k aste possono, dal punto di vista della statica, essere scelte in modo affatto arbitrario, gli sforzi nelle aste rimanenti potendosi ancora in ogni caso determinare per modo che risultino soddisfatte tutte le condizioni necessarie per l'equilibrio dei singoli nodi, e conseguentemente dell'intero sistema.

Senonchè, quando poi dagli infiniti sistemi di sforzi interni che in tal modo possono immaginarsi e che fan tutti equilibrio al sistema dato di forze esterne applicate alla travatura, si passa a considerare i corrispondenti sistemi di variazioni di lunghezza delle aste, si trova che di tutti questi sistemi uno ed uno solo è effettivamente possibile nella travatura reticolare data, nel senso che per uno solo di essi esiste un sistema di spostamenti dei nodi atto a realizzarlo.

Date infatti le variazioni di lunghezza delle $2n$ aste che sono strettamente necessarie per definire la configurazione del sistema, e che perciò abbiamo chiamate principali, risulta determinata la variazione di configurazione dell'intero sistema, epperò risultano determinate in conseguenza anche le variazioni di distanza dei nodi collegati dalle k aste sovrabbondanti.

Un qualsiasi sistema di variazioni di lunghezza delle $a = 2n + k$ aste quale è per esempio quello che corrisponde ad uno qualunque degli infiniti sistemi di sforzi interni che soddisfano alle $2n$ equazioni fornite dalla statica, deve, per essere realizzabile, soddisfare a tante condizioni quante sono le aste sovrabbondanti. Si ottengono così le k equazioni che ancora occorre per la completa determinazione degli a sforzi incogniti.

Sull'argomento noi dovremo ritornar presto per meglio approfondirlo, e da diversi punti di vista. Qui ci basta l'avervi fatto questo brevissimo accenno per aver il diritto di stabilire fin d'ora alcuni punti fondamentali nella teoria delle travature reticolari iperstatiche.

Sta di fatto:

- 1) che l'adottare, nello studio di siffatti sistemi, l'ipotesi della rigidità, vale a dire il trascurare le deformazioni (siano pur piccolissime) delle aste, lascia il problema dell'equilibrio indeterminato;
- 2) che basta postulare l'esistenza di deformazioni, siano pur piccolissime, delle aste, perchè l'indeterminazione statica immediatamente scompaia, e, tra le infinite soluzioni offerte dalla statica dei sistemi rigidi, una sola si presenti come effettivamente possibile;
- 3) che questa particolare soluzione è diversa a seconda del modo con cui le deformazioni dipendono dagli sforzi che le producono: che essa è cioè una funzione delle proprietà fisico-meccaniche delle aste.

** *

Sia dunque che noi ci limitiamo a voler completare lo studio delle travature staticamente determinate col calcolo delle variazioni di configurazione dovute alle deformazioni elastiche delle aste, sia che ci proponiamo di affrontare il problema dell'equilibrio delle travature ad aste sovrabbondanti, è ormai indispensabile che precisiamo le nostre idee sulla deformabilità dei materiali: che fissiamo cioè una volta per tutte la legge di dipendenza delle deformazioni dalle forze che le hanno prodotte, in relazione alla natura del materiale impiegato ed al modo con cui esso è stato messo in opera.

Ora questa legge, che dovrà costituire il caposaldo di tutte le nostre ricerche ulteriori, è la più semplice tra tutte le leggi che si potessero immaginare: è una legge di semplice proporzionalità tra causa ed effetto, tra forza e deformazione.

Ma perchè la sua semplicità stessa non abbia a trarci in inganno, alcune avvertenze sono indispensabili sulle quali si richiama tutta l'attenzione del lettore.

La legge di Hooke.

Fu Roberto Hooke, fisico inglese, che in seguito ad una serie di esperienze sul comportamento delle molle di acciaio per orologi, annunciò per la prima volta nel 1676, sotto forma di anagramma, quella legge: *ut tensio sic vis*, che doveva costituire il punto di partenza di tutte le teorie delle deformazioni elastiche.

Hooke aveva riscontrato, coi mezzi strumentali per verità modestissimi di cui disponeva, che le deformazioni delle molle erano proporzionali alle intensità delle forze ad esse molle applicate.

La stessa cosa riscontrarono dopo di lui molti altri fisici: basti ricordare, per il loro valore storico, le esperienze istituite dal Coulomb sul comportamento dei fili metallici, e le ricerche di Hodgkinson e di Tresca sull'allungamento e sulla contrazione delle sbarre.

Però accadde qui quello che accade in tutti i campi della fisica. Man mano che il campo delle ricerche va estendendosi, e che i mezzi strumentali vanno affinandosi, il campo di validità della legge dapprima formulata in modo generale viene a poco a poco restringendosi.

Dapprima si trattò soltanto di corpi speciali i quali, sottoposti ad esperienza, dimostrarono di comportarsi in modo affatto diverso da quello che la legge di Hooke avrebbe richiesto. Più tardi col crescere della precisione delle misure ci si accorse che anche per i corpi più comuni si verificava qualche discordanza.

Sottoposto a studi sistematici sempre più minuziosi, il comportamento dei vari materiali si rivelò sensibilmente conforme alla legge di Hooke soltanto per sollecitazioni convenientemente limitate, la discordanza crescendo in ogni caso col crescere della sollecitazione e quindi della deformazione prodotta.

Anzi dalle esperienze di T. O. Thompson (1891) risulterebbe che anche per minime sollecitazioni la legge di Hooke è verificata soltanto approssimativamente.

Ciononpertanto questa legge restò sempre, e resta tuttora, per unanime consenso, il caposaldo sperimentale della teoria dell'elasticità.

E ciò per due ordini ben distinti di motivi che è indispensabile mettere in chiaro una volta per tutte.

Noi stiamo infatti per fare un passo innanzi nello studio del problema dell'equilibrio delle travature, abbandonando la prima interpretazione del fenomeno fondata sull'ipotesi della assoluta rigidità; e ciò perchè questa ipotesi ci si è rivelata in qualche modo insufficiente. Noi dovremo dunque necessariamente adottare una nuova interpretazione del fenomeno, la quale, se per superare le insufficienze della prima deve essere più vicina di quella alla realtà delle cose, non ha però, nè può avere, alcuna pretesa di rappresentare il fenomeno reale con assoluto rigore.

Questa seconda interpretazione del fenomeno fisico non può più far astrazione dalle deformazioni dei materiali: essa ne ammetterà dunque l'esistenza e si proporrà di apprezzarne l'entità e di metterla in relazione cogli altri elementi del problema; ma nel far tutto ciò non potrà non tener conto del fatto che quelle deformazioni si mantengono sempre molto piccole, sicchè si può, anzi in un certo senso si deve (se ciò può servire ad evitare eccessive quanto inutili complicazioni) accontentarsi di apprezzarle soltanto in modo approssimativo.

D'altronde i cambiamenti di stato che si verificano nei corpi naturali sotto l'azione delle forze esterne si rivelano, a chi li studii veramente a fondo, talmente complessi che il volerli studiare nella loro interezza sarebbe praticamente impossibile.

In ciò che abitualmente si chiama deformazione di un solido si possono infatti non di rado ravvisare le caratteristiche di un vero e proprio cambiamento dello stato e delle proprietà fisiche del corpo.

Però l'esperienza ci dice che, quando le forze esterne cessano di agire sul corpo, questo tende più o meno a restituirsi nello stato primitivo; questa proprietà è comune in diverso grado a tutti i corpi e chiamasi elasticità.

Come non esiste in natura nessun corpo perfettamente anelastico, in cui cioè questo ritorno non si verifichi affatto, così non esiste alcun corpo che sia perfettamente elastico, in cui cioè il ritorno stesso sia assoluto e completo.

Ogni deformazione può quindi sempre essere idealmente divisa in due parti: una che svanisce al cessare dell'azione delle forze esterne che l'hanno prodotta, e che chiamasi deformazione

elastica; l'altra la quale persiste anche dopo cessata l'azione suddetta, e che prende il nome di deformazione permanente.

L'esperienza ci mostra ancora che, per certi materiali, finchè la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la deformazione permanente si mantiene inapprezzabile, cioè inferiore a quegli errori, praticamente inevitabili, che sono proprii dei nostri mezzi sperimentali.

Ora questi materiali sono precisamente quelli che meglio si prestano ad essere applicati nelle costruzioni: il limite a cui abbiamo accennato, e che è noto sotto il nome di *limite di elasticità*, coincide, nella maggior parte dei casi, con quello che ragioni ovvie di sicurezza consigliano in pratica di non oltrepassare.

Si presenta adunque spontanea l'idea di prendere in considerazione, nello studio dell'equilibrio dei corpi, le sole deformazioni elastiche.

**

S'intende che così facendo noi veniamo implicitamente ad imporre certe limitazioni all'applicabilità delle nostre teorie.

Resta per esempio ben stabilito che la teoria delle deformazioni elastiche così concepite non potrà in alcun modo venire applicata in quei casi in cui ci accadesse di constatare l'esistenza di una deformazione permanente apprezzabile.

Vi sono in natura dei corpi per i quali ciò avviene anche se le forze esterne si mantengono molto piccole, per i quali cioè il limite di elasticità è inferiore a tutte le quantità osservabili; son quelli che vengon detti comunemente *non elastici*; essi non trovano che ben raramente applicazione come organi resistenti nelle costruzioni: comunque non dobbiamo dimenticare che, nei loro riguardi, non è lecito annettere alle teorie che verremo svolgendo valore alcuno.

Tutti gli altri corpi, pei quali il limite di elasticità è superiore alle più piccole grandezze osservabili, possono, al di sotto di tal limite, almeno in via di approssimazione, essere paragonati al corpo ideale che abbiamo testè definito. La teoria che noi stiamo per svolgere potrà servire a studiare le deformazioni piccolissime di questi corpi.

Si badi bene che abbiamo detto: le deformazioni piccolissime; ed insistiamo su questa nuova limitazione del campo di applicabilità della teoria.

Fra i corpi elastici naturali ve ne sono di quelli che, anche sotto l'azione di forze assai moderate, subiscono deformazioni molto appariscenti: sono quelli che volgarmente si dicono *molto elastici*. Anche questi corpi trovano ben difficilmente applicazione nelle costruzioni; tuttavia non è inutile ripetere, a scanso di equivoci, che essi vanno assolutamente esclusi da ogni possibile applicazione della teoria: va da sè infatti che una variazione di dimensioni che può raggiungere o anche superare notevolmente le dimensioni primitive (come avviene nel caoutchouc e simili) non ha nulla a vedere colle considerazioni che noi verremo svolgendo nella ipotesi dichiarata che le deformazioni si possano trattare come infinitesime.

Per verità si potrebbe a rigore obiettare che nessuna delle deformazioni che ci si presentano in natura può dirsi infinitesima: il fatto stesso che noi riusciamo a sottoporla a misura basta a provare che si tratta di una grandezza finita.

Si può però prevedere fin d'ora che l'errore che si viene a commettere trattando come infinitesime delle deformazioni che non son tali in realtà, riuscirà tanto minore quanto più le deformazioni in questione saranno piccole.

Più precisamente si può congetturare che esisterà un limite al di sotto del quale gli errori a cui la teoria conduce si manterranno inferiori a quegli errori di osservazione che noi non riusciamo ad evitare.

Al di sotto di quel limite noi ci troveremo nella impossibilità materiale di mettere in evidenza le divergenze tra la realtà dei fatti ed i risultati della teoria: diremo allora che questa è praticamente verificata.

*
*
*

Ecco dunque che noi abbiamo decisamente limitato il campo delle nostre ricerche a quelle sole deformazioni che sono ad un tempo elastiche e piccolissime.

Ma non dobbiamo già illuderci di avere con questo eliminata ogni difficoltà e soprattutto ogni ragione di complessità del fenomeno. Il quale, insieme coi mutamenti di forma e di dimensioni

del corpo, potrà implicare delle alterazioni niente affatto trascurabili delle proprietà fisiche di questo.

Si tratterà a volte di fatti di natura termica, consistenti in uno sviluppo od in un assorbimento di calore; altre volte si potrà trattare di perturbazioni di natura magnetica, caratterizzate da un'alterazione delle proprietà magnetiche del materiale: altre volte ancora potranno essere in gioco le proprietà ottiche ovvero quelle elettriche.

Ebbene, in tutto quello che stiamo per dire noi faremo sempre completa astrazione da tutti questi altri aspetti del fenomeno, e ci limiteremo a guardare al solo aspetto geometrico consistente nel mutamento di forma e di dimensioni del corpo.

E ciò, si noti bene, non tanto perchè questa particolare manifestazione esteriore di quel complicato cambiamento di stato del corpo che abbiamo denominato deformazione sia la più appariscente, nel senso che la si avverta più facilmente, o più facilmente la si sottoponga a misura; ma piuttosto perchè l'elemento geometrico è quello che si presenta in tutti i casi ed in modo più uniforme per tutti i corpi.

Così facendo noi finiamo coll'assumere come oggetto delle nostre ricerche un corpo tipo — non meno ideale del corpo tipo della statica dei sistemi rigidi — corpo tipo che denomineremo *solido elastico* senza perciò volerci pronunciare sulla maggiore o minore sua affinità con quei corpi che ricevono, nel linguaggio comune, lo stesso nome.

Solido elastico sarà per noi nè più nè meno che un corpo capace di subire, sotto l'azione delle forze esterne, dei cambiamenti piccolissimi di forma e di dimensioni che scompaiono spontaneamente al cessare delle cause che li hanno prodotti.

**

Ma ecco che, guardando le cose un po' da vicino, delle altre complicazioni si presentano.

I cambiamenti, siano pur piccolissimi ed elastici, della forma e delle dimensioni dei corpi naturali, che sono dovuti all'azione delle forze esterne ad essi applicate, dipendono non soltanto dalla entità di queste forze, ma dalla durata della loro azione e dal modo con cui le forze stesse si succedono nel tempo.

La variazione in funzione del tempo dello stato di deformazione prodotto in un corpo dall'azione di un dato sistema di forze esterne venne rilevata per la prima volta da W. Weber il quale ha osservato, fin dal 1835, il fenomeno seguente: un filo di seta sotto l'azione di un peso anche moderato si allunga immediatamente di una certa quantità; poi l'allungamento continua ad aumentare in modo lento ma sensibile per molte ore; se si toglie il peso, il filo si accorcia immediatamente, senza però mai arrivare a riprendere subito la sua lunghezza primitiva; lunghezza che esso tende a riprendere soltanto dopo un certo tempo, tanto più lungo quanto più a lungo ha agito la forza deformatrice; non è raro il caso che il fenomeno dell'accorciamento si mantenga ancora visibile dopo parecchi giorni. Questo fatto, chiamato da Weber *elastische Nachwirkung*, venne ripreso in esame nel 1863 da F. Kohlrausch il quale lo riscontrò in tutte le sue particolarità sottoponendo a torsione dei sottilissimi fili di vetro.

Tanto sperimentando sul vetro come su certi metalli speciali, egli trovò che un filo abbandonato a se stesso dopo una torsione un po' prolungata in un certo senso, non ritorna immediatamente al suo stato iniziale, l'angolo di torsione diminuendo dapprima rapidamente poi sempre più lentamente al trascorrer del tempo.

Se durante questa fase di cosiddetta elasticità ritardata, si assoggetta il filo per qualche istante ad una piccola torsione in senso contrario, e lo si abbandona poi nuovamente a se stesso, il nuovo angolo di torsione si annulla assai rapidamente ed il filo si ritorce spontaneamente di un certo angolo nel senso della deformazione primitiva, per riprendere poi a poco a poco il suo lentissimo moto di ritorno verso lo stato iniziale.

Questa ricomparsa della prima deformazione non ancora completamente annullata venne riconosciuta anche da numerosi altri sperimentatori. Essi hanno potuto constatare che il fenomeno della elasticità ritardata, particolarmente evidente nel comportamento del vetro, del piombo e di pochi altri corpi, è appena sensibile per la maggior parte dei metalli: il che non impedi ad Austen di sottoporlo ad accurato esame e di misurarlo, nel caso dell'argento, del rame e dell'ottone, tanto bene e con tale precisione da poterne apprezzare le variazioni di intensità dipendenti dalle variazioni di temperatura.

Recentemente i proff. Cantone (1893-1898) e Bouasse (1897-1904) hanno studiato un altro fenomeno, di natura ancor più complessa, che era stato già avvertito dal Wiedemann fin dal 1858, e che, poco propriamente, si usa chiamare *isteresi elastica*.

Le esperienze dimostrano concordi che se si fa variare in modo continuo la forza deformatrice, dapprima crescendo progressivamente da zero fino ad un certo valor massimo, e decrescendo poi nuovamente fino a zero, per valori eguali di essa, la deformazione si mantiene quasi sempre, nel periodo di decremento, un po' maggiore che durante l'incremento della forza.

Più generalmente si può dire che al variare della sollecitazione esterna tra un valor minimo ed un valor massimo comunque scelti, e tra questo massimo e lo stesso minimo, la curva che rappresenta la legge di variazione della deformazione in funzione della detta sollecitazione, consta di due rami ben distinti, uno dei quali corrisponde ai valori crescenti, l'altro ai valori decrescenti; se si ripete successivamente un numero sufficiente di volte questa esperienza, si trova non di rado (per esempio pel nickel, pel rame, per l'alluminio e per molti altri metalli) che la curva rappresentativa tende verso una forma limite, o ciclo chiuso ⁽¹⁾, che racchiude una certa porzione di piano la cui area rappresenta, come è facile riconoscere, quella parte del lavoro speso durante la deformazione del corpo, che non viene da questo restituita quando la deformazione stessa sparisce.

Ma se si viene accidentalmente ad oltrepassare uno qualunque dei due valori limiti sopra scelti per la sollecitazione, il punto rappresentativo del fenomeno esce dal ciclo suddetto per descrivere una curva nuova la quale tenderà, ove ne sia il caso, ad un nuovo ciclo limite, naturalmente diverso dal primo.

Se si tiene conto che non mancano poi altri materiali (piombo, ecc.) per i quali non si verifica neppure la suddescritta accomodazione dei cicli, si può concludere che lo stato di de-

(1) Di alcune proprietà caratteristiche dei cicli di isteresi elastica si trovano notizie dettagliate anche in alcune mie Note, di indole sperimentale, intitolate: *Esperienze sulla elasticità a trazione del rame* ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", serie 5^a, vol. XXIII, 1^o sem. 1914) e *Nuove esperienze sulla elasticità del rame* ("Rendiconti della R. Accademia dei Lincei", serie 5^a, vol. XXIV, 2^o sem. 1915).

formazione di un corpo dovrebbe, a rigore, considerarsi funzione non soltanto del sistema di forze a cui esso è attualmente soggetto, ma altresì di tutti quei sistemi di forze a cui il corpo stesso è stato assoggettato in precedenza.

Ora nessuno dei tentativi che furon fatti per interpretare analiticamente un così complesso stato di cose ha potuto, nè potrà forse mai, escire dai limiti della pura speculazione matematica.

Un calcolo delle deformazioni elastiche che non parta perlomeno dal presupposto della biunivocità della corrispondenza tra le deformazioni e le forze effettivamente applicate al corpo, non può condurre a nessun risultato utile agli effetti della pratica tecnica.

Ora le esperienze di cui abbiamo fatto cenno mostrano concordi che, nei limiti in cui si può ammettere la biunivocità accennata si può anche accogliere come espressione dei rapporti fra forza e deformazione la legge di Hooke.

In un certo senso si potrebbe dire che sono proprio le esperienze che sembrano infirmarne il valore, quelle che hanno definitivamente dimostrata la insostituibilità dell'antica legge di Hooke come punto di partenza della teoria delle deformazioni elastiche.

**

Soltanto, per determinare fino a qual punto questa teoria fosse poi praticamente applicabile, si è sentita la necessità di precisare, per ciascun materiale, il limite di sollecitazione al di sotto del quale la legge di proporzionalità si può ritenere verificata.

Tale limite prende il nome di *limite di proporzionalità*.

Esso non ha, nella sua ragion d'essere, nulla in comune col limite di elasticità, col quale troppo spesso viene confuso solo perchè, per certi metalli fra i più comuni, con esso coincide molto sensibilmente.

Si vede subito che entrambi questi limiti dipendono dall'ordine di grandezza degli errori sperimentali: più i mezzi di osservazione e gli strumenti di misura diverranno perfetti, più questi limiti diverranno piccoli.

Abbiamo già detto infatti a suo tempo che non esiste in natura nessun corpo perfettamente elastico: col trascurare, per