

librio della rimanente parte della travatura, gli sforzi che su questa rimanente parte esercitavano le due aste sopresse si possono considerare come noti, ed annoverarsi tra i dati del nuovo problema.

Ma se dal sistema delle $2n - 2$ equazioni rimanenti si isolano quelle due che si riferiscono al penultimo nodo, si può eviden-

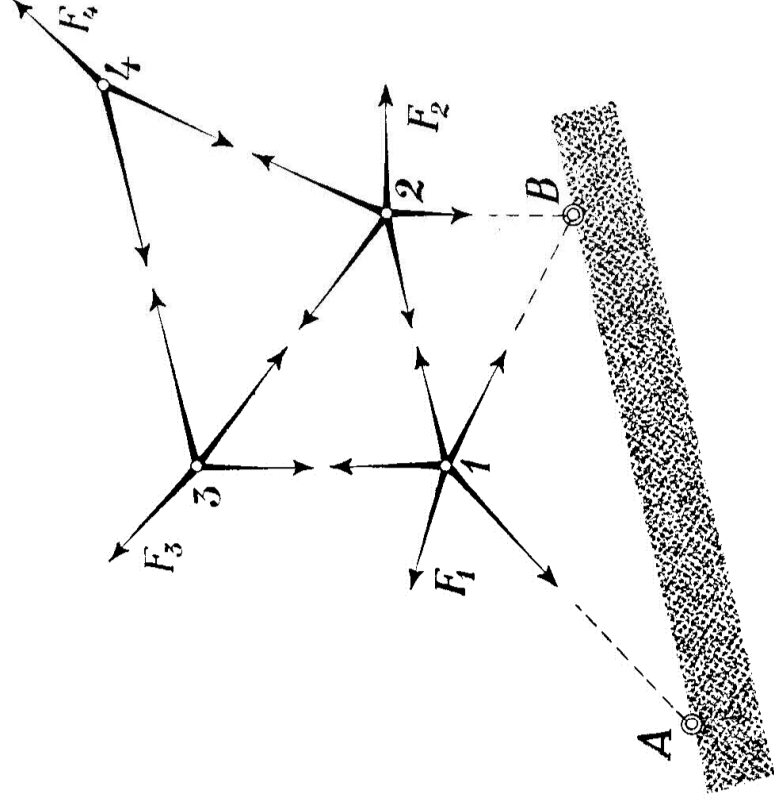


Fig. 28.

temente, nei loro confronti, ripetere quel che si è detto poc'anzi delle due equazioni relative all'ultimo nodo. Anch'esse contengono infatti due soli sforzi incogniti; anch'esse possono quindi essere direttamente risolte per rapporto a quei due sforzi. Due altri degli sforzi interni passeranno così dalla categoria delle incognite a quella dei termini noti.

E proseguendo, dal penultimo nodo al terz'ultimo, e poi di seguito nell'ordine inverso di cui abbiamo già parlato, i valori di tutti gli sforzi potranno a due a due venir calcolati.

Il sistema delle $2n$ equazioni con altrettante incognite si è in questo caso particolare spontaneamente scisso in n sistemi di due equazioni ciascuno, contenenti ciascuno due sole incognite.

Alla risoluzione analitica di questi n sistemi parziali si può poi in ciascun caso concreto sostituire con vantaggio il tracciamento in disegno di n poligoni di equilibrio.

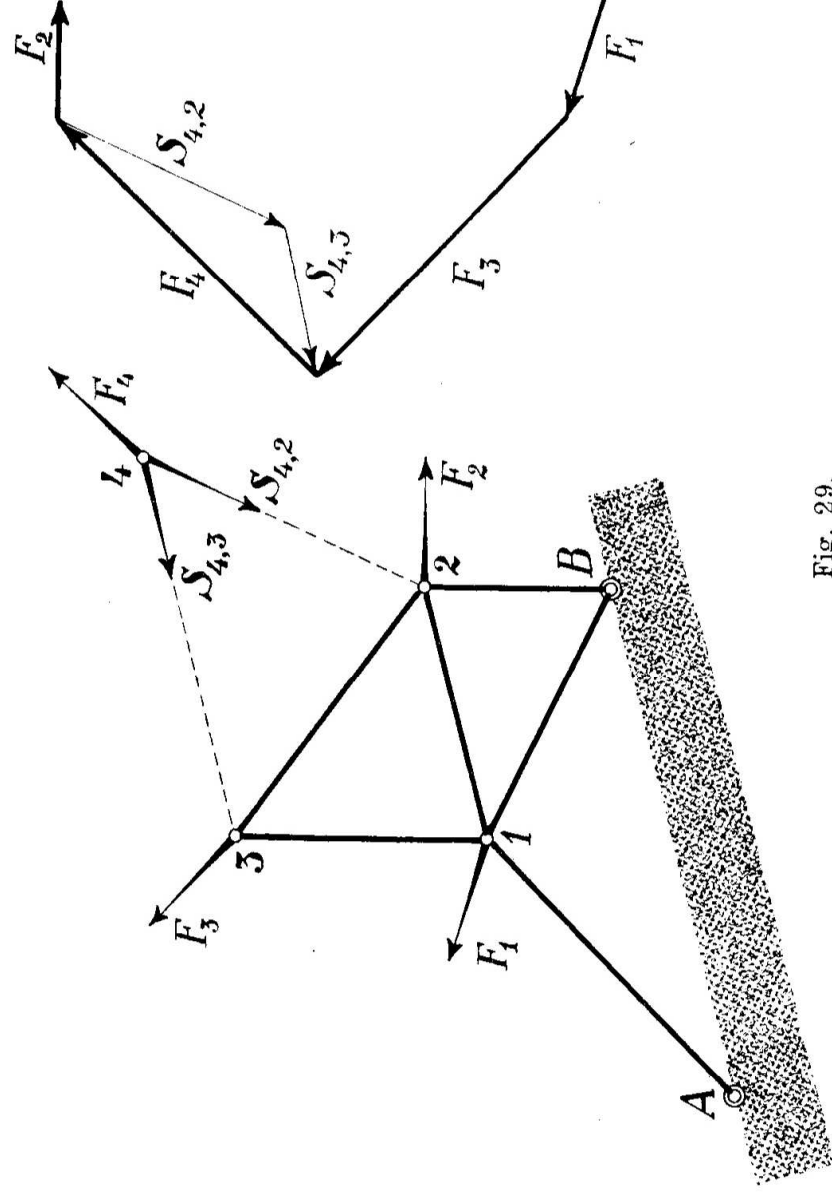


Fig. 29.

Prendere separatamente in esame, come noi abbiamo fatto poc'anzi, le due ultime tra le $2n$ equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio della travatura rappresentata nella fig. 27, equivale infatti ovviamente ad isolar col pensiero l'ultimo nodo di tale travatura (nel caso concreto il nodo 4) mediante il solito artificio della soppressione delle due aste che collegano tale nodo al resto della travatura (e precisamente ai nodi 3 e 2) e la contemporanea introduzione di due forze incognite equipolenti alle azioni che attraverso] quelle aste si esercitavano sul nodo.

Denoteremo tali forze rispettivamente con $S_{4,3}$ e con $S_{4,2}$: i due indici stanno evidentemente a caratterizzare l'asta cui lo

sforzo si riferisce; ove occorra distinguerli, il primo di essi viene per convenzione assunto a denotare il nodo su cui lo sforzo si esercita.

Ciò posto, è noto che per l'equilibrio del nodo occorre e basta che le singole forze, note ed incognite, ad esso nodo applicate siano equipollenti ai lati di una poligonale chiusa.

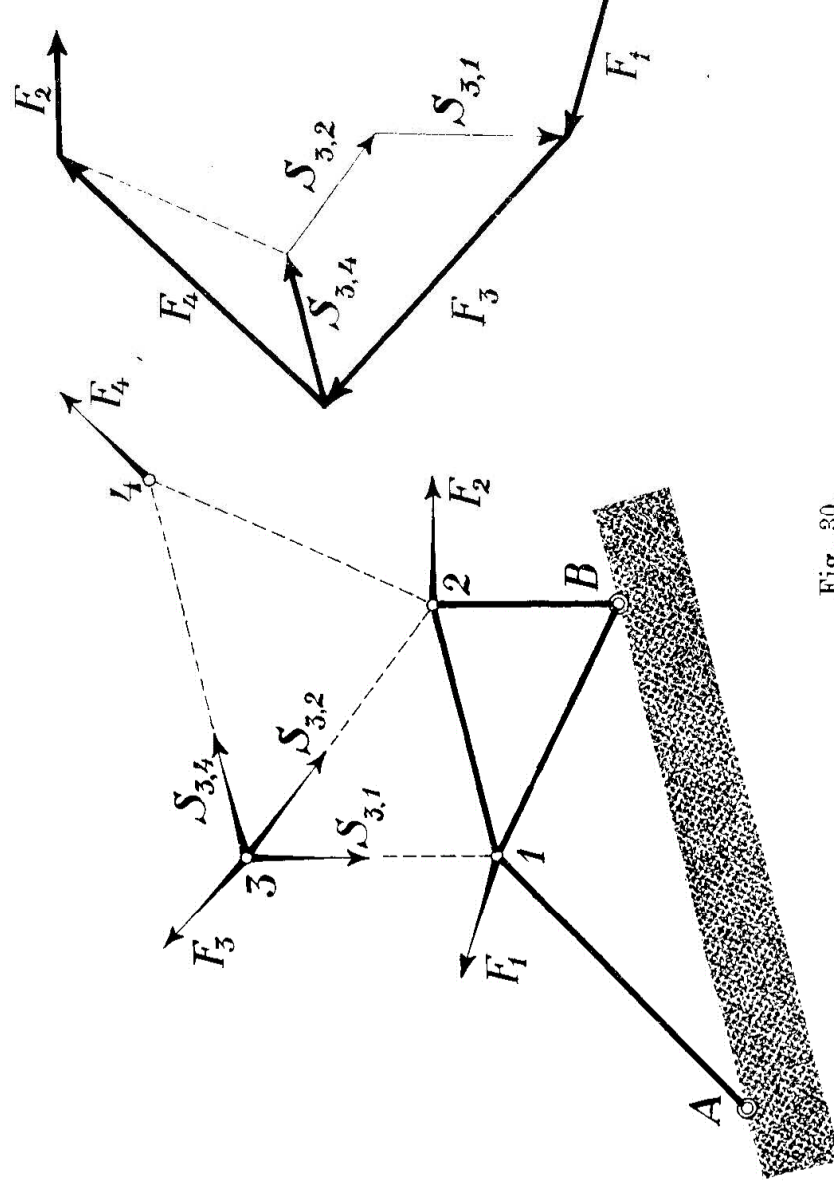


Fig. 30.

Nel caso di cui ci stiamo occupando, la poligonale si riduce ovviamente ad un triangolo; ed un lato di esso, quello che dev'essere equipollente alla F_4 , è noto in grandezza, direzione e senso, mentre degli altri due lati son note le sole direzioni. Grandezze e sensi di essi posson pertanto subito determinarsi mediante una semplice operazione di decomposizione di forze, vale a dire conducendo per gli estremi del lato noto le parallele alle direzioni degli altri due lati e prolungando queste parallele fino al loro incontro.

L'operazione si vede eseguita nella fig. 29 a destra.

Non diversamente si procederà nei confronti del nodo 3 sul quale, supposto alla sua volta isolato dal resto del sistema (fig. 30),

si intenderanno applicate oltre alla forza esterna data F_3 , gli sforzi $S_{3,4}$ $S_{3,2}$ ed $S_{3,1}$ relativi alle diverse aste che fanno capo a quel nodo. S'intende che $S_{3,4}$ è da considerarsi come noto, poichè deve evidentemente essere eguale ed opposto allo sforzo $S_{4,3}$ dianzi determinato; $S_{3,2}$ ed $S_{3,1}$ debbono invece ri-

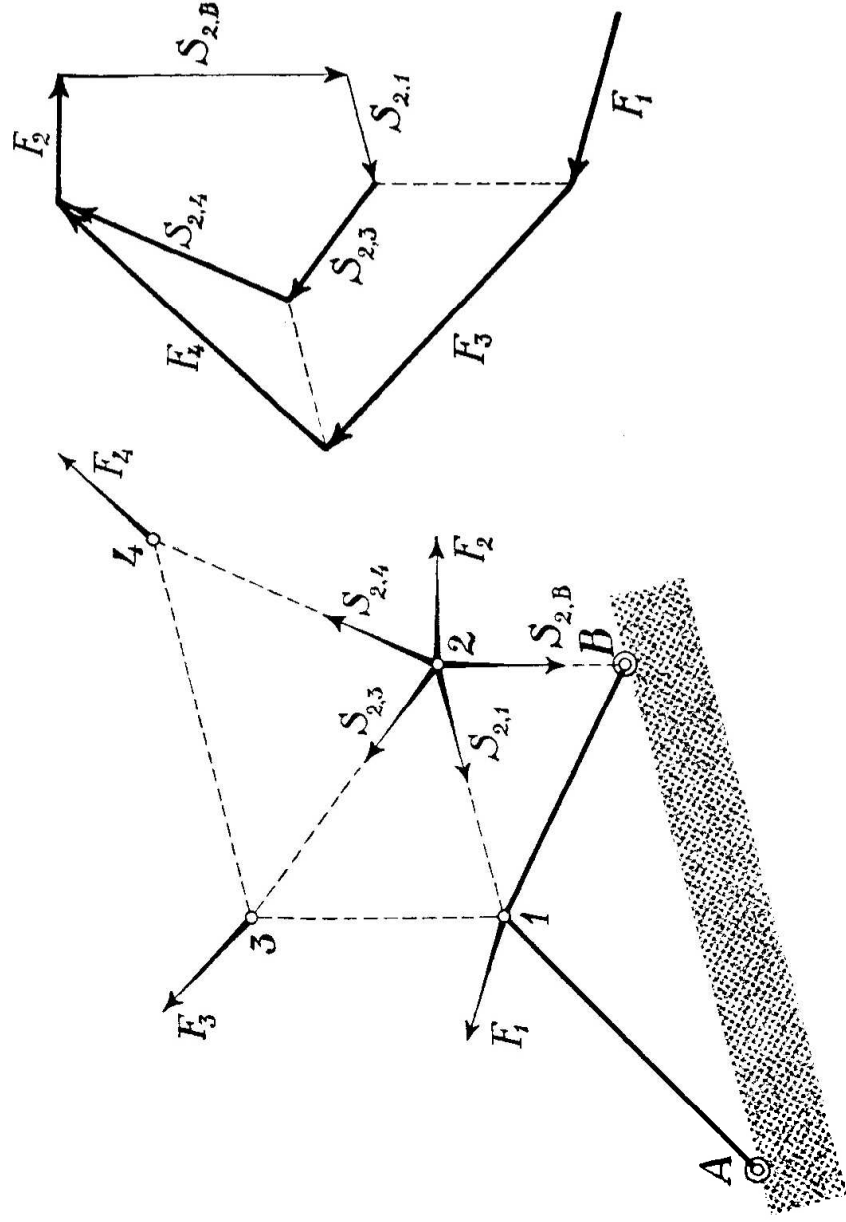


Fig. 31.

guardarsi come le nuove incognite, e si potranno determinare graficamente alla lor volta nel modo indicato a destra della figura 30.

Similmente si determineranno i due sforzi $S_{2,1}$ ed $S_{2,3}$ nel modo indicato in fig. 31; e gli sforzi $S_{1,2}$ ed $S_{1,3}$ nel modo indicato in fig. 32 (a pag. 56).

Senza per ora addentrarci nella tecnica del tracciamento di siffatti poligoni d'equilibrio — dei quali ci occuperemo di proposito, e con tutta la diffusione che essi meritano, nella seconda parte di questo stesso volume — ci vogliamo qui limitare a rilevare che, nei casi del genere di quello di cui ci siamo venuti occupando, la loro costruzione e la loro interpretazione possono

venir ulteriormente agevolati raccogliendo i diversi poligoni in un unico diagramma che assume l'aspetto rappresentato in figura 33 a pagina 57.

L'esistenza di diagrammi come questo, la loro attitudine a rappresentare il sistema degli sforzi nelle aste di una travatura reticolare piana, le loro relazioni geometriche con lo schema della travatura cui si riferiscono, vennero per la prima volta messi in luce dagli studi di L. CREMONA; in memoria del quale i diagrammi stessi hanno ormai preso il nome di *diagrammi Cremoniani*.

CASO SECONDO. — Travature a sezioni canoniche.

Qualunque sia la travatura reticolare che si vuol considerare, si può sempre isolare in essa col pensiero un gruppo determinato di nodi, immaginando sezionate od addirittura sopresse le aste che collegano quei nodi ai nodi rimanenti della travatura data ovvero a punti del sistema fisso di riferimento.

Nel far questa operazione le aste della travatura data vengono spontaneamente a dividersi in tre categorie:

a) aste che collegano fra loro due nodi appartenenti entrambi al gruppo considerato, e che perciò possono in un certo senso considerarsi come aste di collegamento interne al gruppo;

b) aste che collegano un nodo del gruppo ad un altro nodo della travatura o ad un punto del sistema fisso di riferimento, e che perciò, per rapporto al gruppo, fungono come aste di vincolo: sono evidentemente quelle che devono essere interessate dalla sezione con cui si vuole isolare il gruppo dal resto del sistema;

c) aste che collegano nodi non appartenenti al gruppo considerato, sia fra loro, sia al sistema fisso di riferimento; queste aste non sono in alcun modo interessate nella operazione proposta, e possono, a tutti gli effetti, riguardarsi come estranee al gruppo di nodi considerato.

Ciò posto, se ad un tal gruppo di nodi si applicano le nozioni che noi siamo venuti stabilendo per tutte le travature in generale, si può subito affermare:

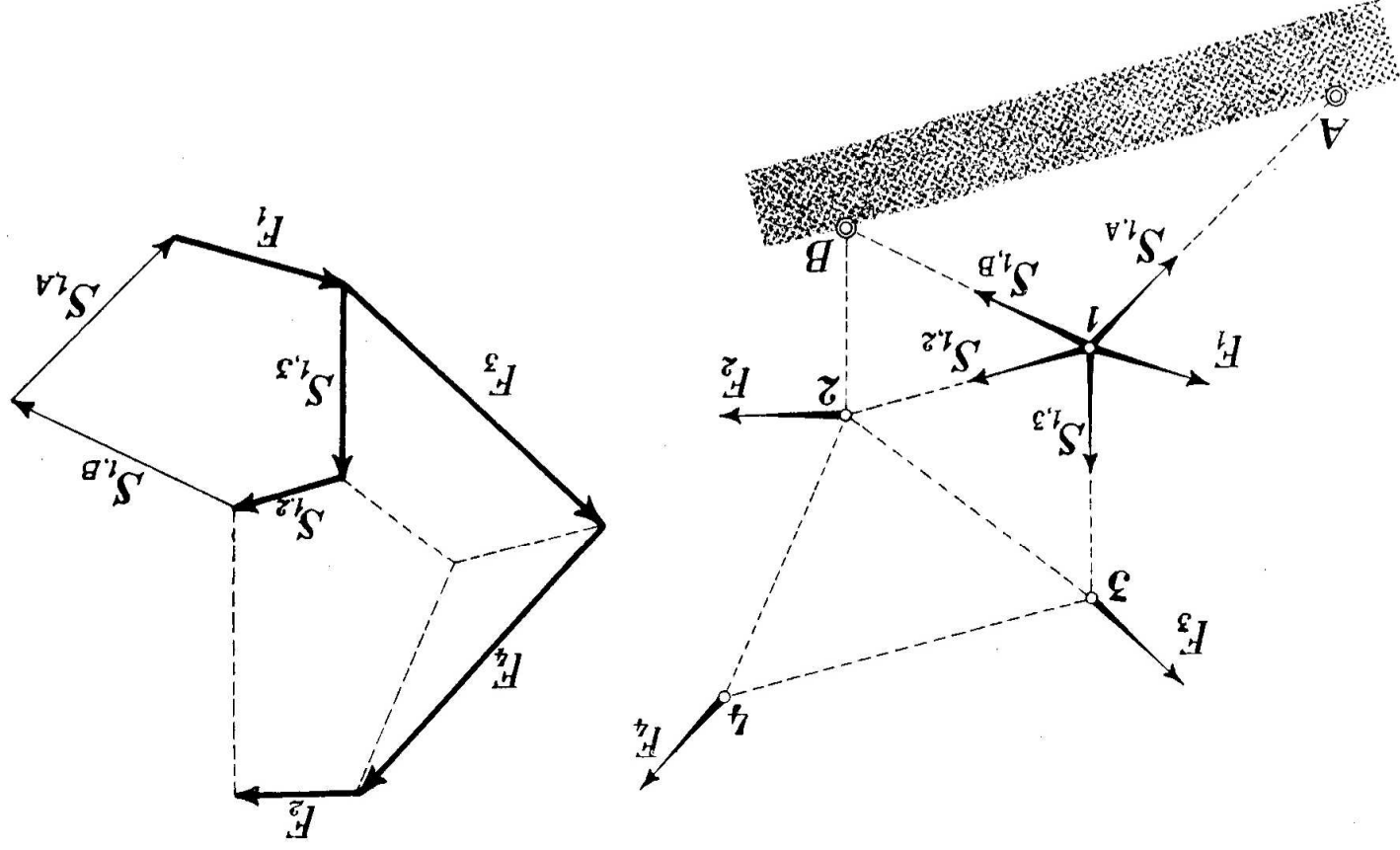


Fig. 32.

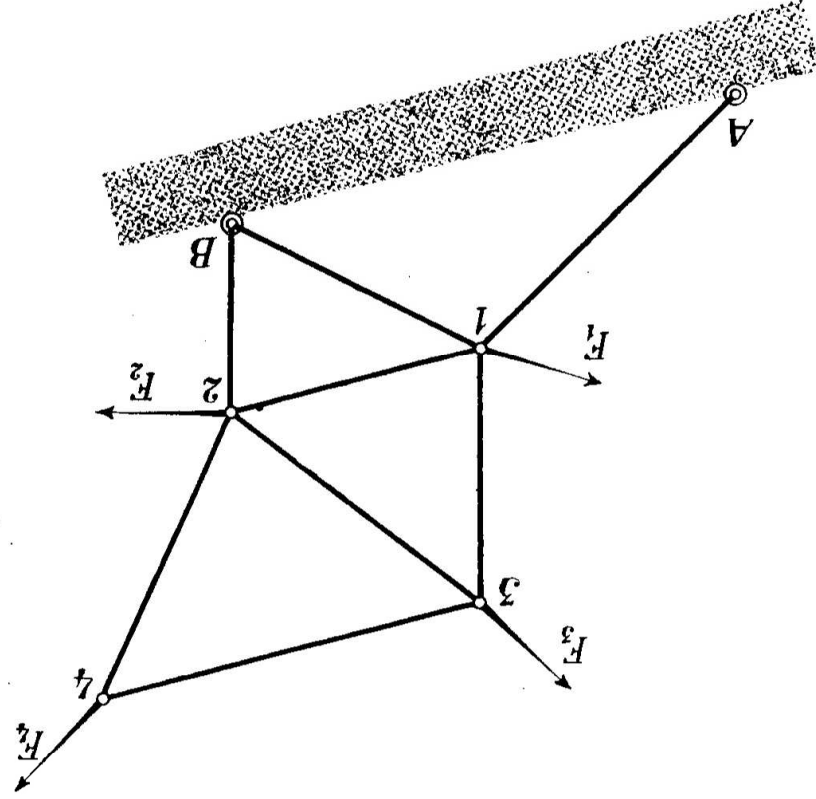
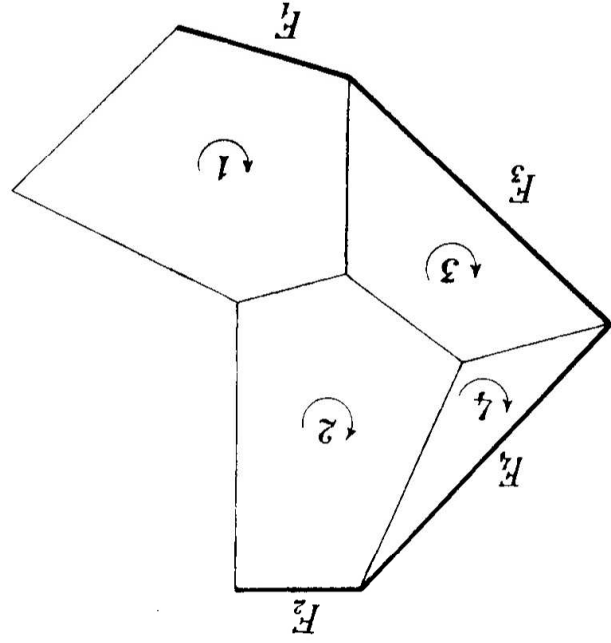


Fig. 88.

1) che, se il numero dei nodi costituenti il gruppo è n' ⁽¹⁾, il numero delle aste appartenenti alla prima ed alla seconda categoria, prese assieme, deve essere almeno eguale a $2n'$;

2) che tre almeno di quelle aste, non concorrenti in un punto, devono in ogni caso appartenere alla seconda categoria.

Supponiamo che accada proprio così: che cioè il gruppo degli n' nodi considerati sia collegato al resto del sistema da tre sole aste (non concorrenti in un punto) e che esso, una volta isolato dal resto mediante una sezione interessante quelle sole tre aste, venga a contenere ancora le $2n' - 3$ aste che sono necessarie e sufficienti per assicurare la invariabilità delle distanze mutue dei suoi n' nodi.

Una sezione siffatta — la quale cioè, tagliando tre sole aste non concorrenti in un punto, isoli nella travatura data un gruppo di nodi fra loro connessi in modo da costituire quello che si chiama comunemente una figura rigida libera da ogni vincolo — prende il nome di *sezione canonica*.

Per avere un esempio concreto di sezione canonica il lettore non ha che da guardare la nostra fig. 34 nella quale la solita travatura reticolare è stata sezionata in corrispondenza delle aste 1.3, 1.2, B.2.

Il gruppo dei nodi che si viene così ad isolare è quello che costituisce il triangolo 2.3.4.

Questo triangolo è soggetto alle forze date F_2, F_3, F_4 supposte applicate ai suoi vertici, ed inoltre ai tre sforzi incogniti $S_{3.1}, S_{2.1}$ ed $S_{2.B}$ che nella travatura data si trasmettevano attraverso le aste che noi abbiamo immaginato di sezionare.

Ma per l'equilibrio del triangolo, ormai libero per ipotesi da ogni qualsiasi vincolo, si richiede notoriamente che le forze su di esso agenti soddisfino a tre equazioni lineari, le quali potranno quindi venir immediatamente utilizzate per determinare i tre sforzi incogniti in funzione delle forze esterne date.

⁽¹⁾ Noi ammettiamo implicitamente qui e nel seguito che sia

$$1 < n' < n.$$

Il caso $n' = 1$ rappresenta infatti, nel ragionamento che qui siamo per fare, un caso singolare, poichè per esso non possono esistere aste della prima categoria. Quanto alle aste della seconda categoria devono notoriamente essere almeno due: e se son proprio due soltanto non v'è che da ripetere quel che già abbiamo detto a proposito delle travature a nodi canonici.

Generalmente parlando, si può ragionare così:

Dalle $2n'$ equazioni di equilibrio relative agli n' nodi costituenti il gruppo — nelle quali si compendiano le relazioni esistenti fra le forze esterne applicate a tali nodi ed i $2n'$ sforzi incogniti nelle aste che ai nodi stessi fan capo — si possono

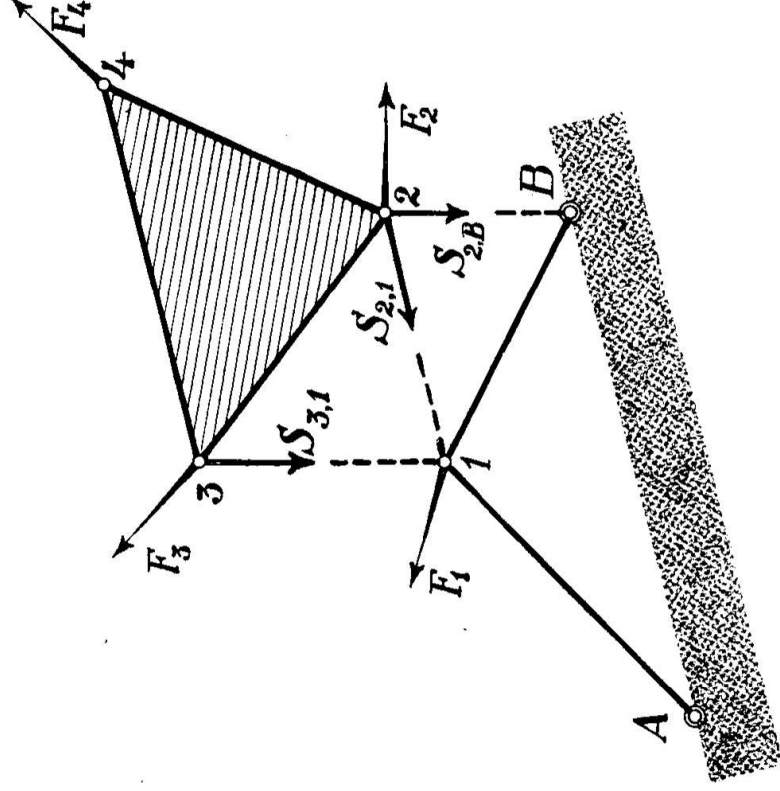


Fig. 34.

sempre eliminare le $2n' - 3$ incognite relative alle aste che collegano fra loro i nodi del gruppo a due a due; attraverso una simile eliminazione si otterrebbero tre equazioni contenenti quei tre soli degli sforzi incogniti che si riferiscono alle tre aste interessate dalla sezione, e che perciò devono alla lor volta compendiare le relazioni esistenti fra tali tre sforzi incogniti e le forze esterne applicate ai nodi del gruppo. Ora queste relazioni si possono sempre scrivere direttamente immaginando soppresse idealmente le aste interessate dalla sezione ed imponendo che il gruppo di nodi così isolato sia in equilibrio sotto l'azione delle varie forze esterne ad esso applicate e dei tre sforzi incogniti equipollenti alle azioni che prima si trasmettevano attraverso le aste soppresse.

Dal che due conclusioni si possono intanto trarre; e sono:

- 1) che gli sforzi nelle aste sezionate da una sezione canonica sono funzioni di quelle sole tra le forze esterne date che sono applicate ai nodi che la sezione isola dal resto della travatura;
- 2) che tali sforzi si possono sempre determinare risolvendo un sistema di tre sole equazioni lineari, non omogenee, fra le tre incognite.

**

Conviene avvertire subito che, anche questa volta, alla risoluzione delle predette tre equazioni fra le tre incognite summenzionate, si può sempre con vantaggio sostituire qualche

procedimento grafico di uso corrente nella teoria della composizione e decomposizione delle forze.

È noto infatti che, agli effetti dell'equilibrio del gruppo di nodi che la sezione canonica isola, e che nelle ipotesi da noi fatte può assimilarsi ad una figura rigida, si può sempre sostituire al sistema delle forze esterne date F_2, F_3, F_4 la loro risultante R' (fig. 35). Quanto ai valori degli sforzi incogniti $S_{3,1}, S_{2,1}$ ed $S_{2,B}$ che a tale risul-

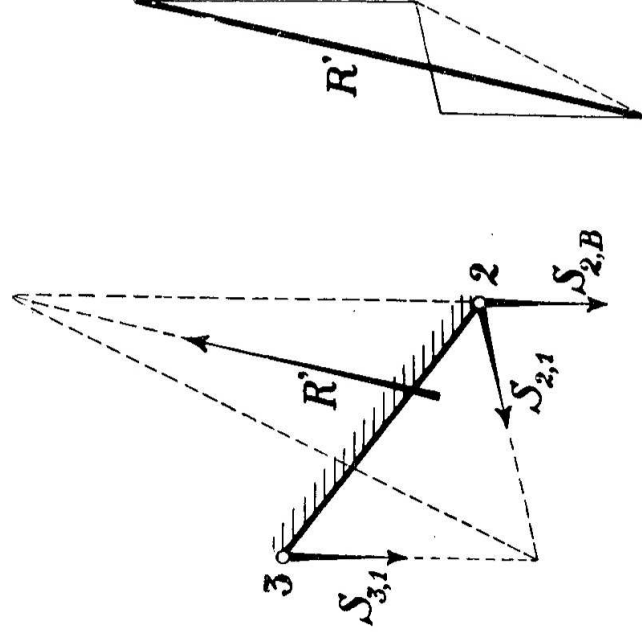


Fig. 35.

tante devono far equilibrio, essi si potranno graficamente determinare considerando il punto di incontro della linea d'azione della risultante stessa colla linea d'azione (pure nota) di uno qualunque degli sforzi incogniti, per esempio di $S_{2,B}$; decomponendo ivi la R' secondo la linea d'azione di $S_{2,B}$ e secondo la congiungente del predetto punto di incontro col punto in cui si incontrano le linee d'azione (note esse pure) degli altri due sforzi incogniti $S_{3,1}$ ed $S_{2,1}$; decomponendo poi ulteriormente

questa seconda componente in due altre aventi rispettivamente per linee d'azione quelle dei detti altri due sforzi; mutando finalmente di segno le tre componenti trovate.

Questo modo di determinare gli sforzi nelle aste attraversate da una sezione canonica è stato indicato per la prima volta da K. CULMANN.

**

Si deve invece ad A. RITTER un altro procedimento che, pur partendo dagli stessi concetti, conduce anche più direttamente al risultato quando quel che interessa conoscere è uno, ben determinato, seppure qualunque, degli sforzi che si esercitano nelle tre aste interessate dalla sezione.

Questo procedimento trae partito dal fatto, ben noto, che le equazioni dell'equilibrio fra le diverse forze applicate ad un sistema rigido si possono scrivere sotto infinite forme differenti a seconda che si adotta per riferimento uno od un altro sistema di assi coordinati.

Ora basta scegliere come origine degli assi, e quindi come centro di riduzione delle forze, il punto di incontro delle linee d'azione (note) di due degli sforzi incogniti, per veder sparire queste due incognite dall'equazione dei momenti.

Nel caso particolare a cui siamo ormai soliti riferirci, basta per esempio assumere come centro di riduzione delle forze il nodo 2 in cui concorrono le linee d'azione degli sforzi incogniti $S_{2,1}$ ed $S_{2,3}$ perchè l'equazione dei momenti non contenga più che una sola incognita, la $S_{3,1}$. Quella equazione potrà allora venire immediatamente utilizzata per calcolare questa incognita.

Nella figura 36 in cui il procedimento è illustrato, si è indicato con $d_{3,1}$ il braccio dello sforzo incognito $S_{3,1}$ per rapporto al nodo 2 assunto come centro dei momenti; similmente si sono

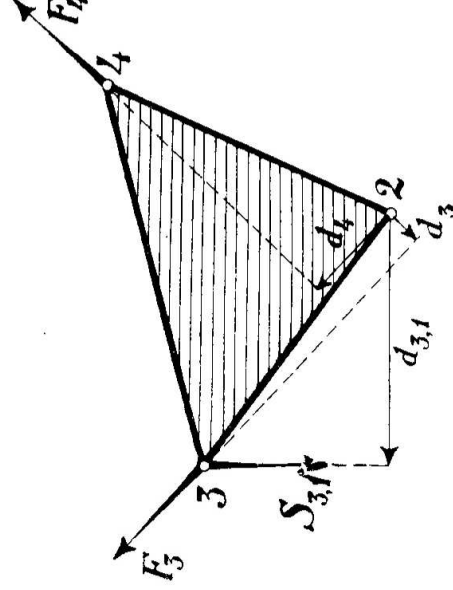


Fig. 36.

denotati con d_3 e con d_4 gli analoghi bracci delle forze date F_3 ed F_4 (il braccio della forza F_2 essendo identicamente nullo). Dall'equazione dei momenti

$$F_3 d_3 + F_4 d_4 - S_{3,1} d_{3,1} = 0$$

si ricava subito, com'è evidente e come avevamo previsto,

$$S_{3,1} = \frac{F_3 d_3 + F_4 d_4}{d_{3,1}}$$

**

Apriamo qui una breve parentesi per avvertire che questa espressione della tensione $S_{3,1}$ non differisce sostanzialmente da quella a cui ci avrebbe condotti l'applicazione, al caso particolare di un'asta appartenente ad una sezione canonica, del procedimento generale fondato sul principio dei lavori virtuali.

In realtà se la travatura che si considera ammette una sezione canonica, e se l'asta di cui si cerca la tensione è precisamente una delle tre interessate da tale sezione, la variazione virtuale di configurazione che si renderebbe possibile nella travatura quando soltanto quest'asta venisse soppressa, si ridurrebbe ad una rotazione rigida del gruppo di nodi che la sezione canonica isola dal resto del sistema, attorno al punto di incontro degli assi delle altre due aste che la sezione canonica attraversa, ma che si suppongono ora mantenute in funzione.

Ne segue che a rappresentare gli spostamenti virtuali dei vari nodi del gruppo si dovranno assumere dei vettori diretti perpendicolarmente ai raggi che dal centro di rotazione vanno ai singoli nodi, di grandezze proporzionali alle lunghezze di quei raggi.

E poichè la scala del diagramma è affatto arbitraria, e non influisce sul risultato della ricerca (pag. 42), nulla ci vieta di assumere come diagramma degli spostamenti virtuali il sistema stesso di quei raggi ruotati di un angolo retto (fig. 37).

In queste condizioni appare evidente che proiettare gli spostamenti sulla direzione delle singole forze o misurare le distanze delle linee d'azione di queste dal centro di rotazione è, a conti fatti, la medesima cosa: sicchè l'equazione dei momenti

dianzi scritta non differisce da quella dei lavori virtuali che, secondo le norme indicate a suo tempo, e colle notazioni della fig. 37, si sarebbe dovuta scrivere

$$F_3 f_3 + F_4 f_4 - S_{3,1} S_{3,1} = 0$$

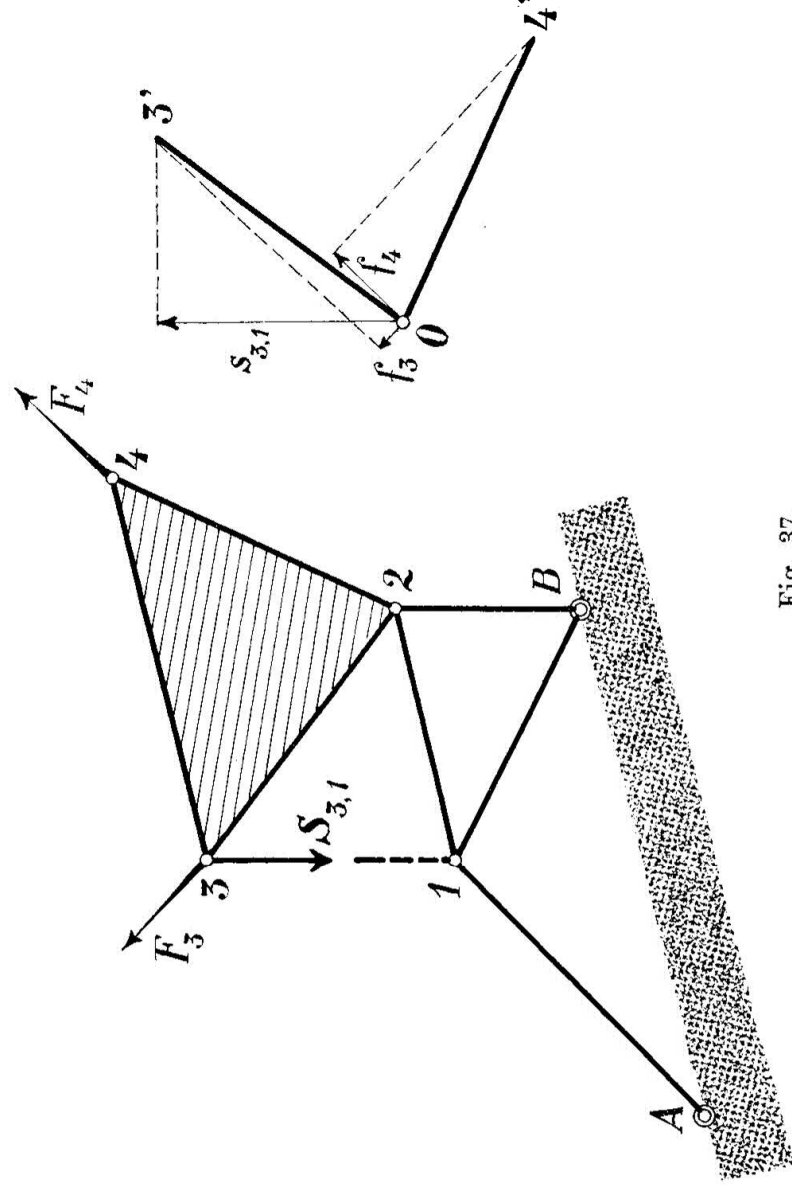


Fig. 37.

Detto ciò, chiudiamo la parentesi e ritorniamo in argomento per dir brevemente qual'è l'uso che in pratica conviene fare dei diversi procedimenti indicati.

È chiaro che, se la travatura che si considera ammette un sistema di sezioni canoniche tali che ogni asta risulti interessata in almeno una di esse, i due procedimenti di CULMANN e di RITTER, opportunamente e replicatamente applicati, si prestano entrambi all'analisi completa del sistema degli sforzi determinati nelle diverse aste della travatura da un qualsiasi sistema dato di forze esterne.

Di solito però all'applicazione di quei procedimenti si ricorre soltanto per qualche sezione canonica particolare, e quindi al

fine di determinare direttamente, ed indipendentemente dagli altri, qualche sforzo particolare.

Citiamo a questo proposito come singolarmente caratteristico il caso in cui quei procedimenti ci consentono di calcolare diret-

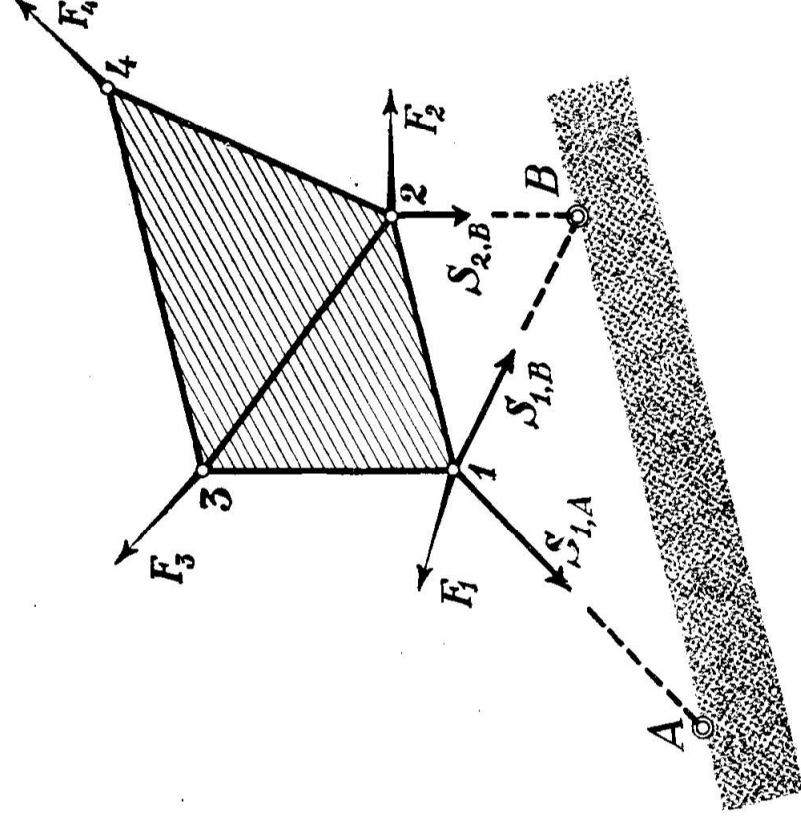


Fig. 38.

tamente ed immediatamente (cioè senza passare per la successiva ricerca di tutti gli altri sforzi incogniti) le reazioni di vincolo.

Questo caso è illustrato nelle due figure 38 e 39; nella prima delle quali, con riferimento alla solita travatura, si vede messa in evidenza la sezione canonica che interessa le tre aste di vincolo; qui n' coincide con n : è dunque l'intera travatura che la sezione canonica viene ad isolare dal sistema fisso di riferimento. Nella figura 39, indicata con R'' la risultante di tutte le forze esterne applicate alla travatura, si sono poi costruiti graficamente gli sforzi $S_{1,A}$, $S_{1,B}$, $S_{2,B}$ relativi alle tre aste di vincolo.

Che se, oltre a questi sforzi particolari che hanno nelle applicazioni un interesse ed un'importanza tutta speciale, si vogliono poi conoscere anche tutti gli altri sforzi in tutte le altre aste della travatura, nulla ci vieta di insistere nella applicazione del procedimento di CULMANN reiterandola quante volte occorra.

Ma si presenta in generale più vantaggioso un ritorno al metodo di CREMONA.

Naturalmente nell'applicazione di questo metodo gli sforzi nelle aste di vincolo $S_{1,A}$, $S_{1,B}$, $S_{2,B}$ potranno ormai considerarsi

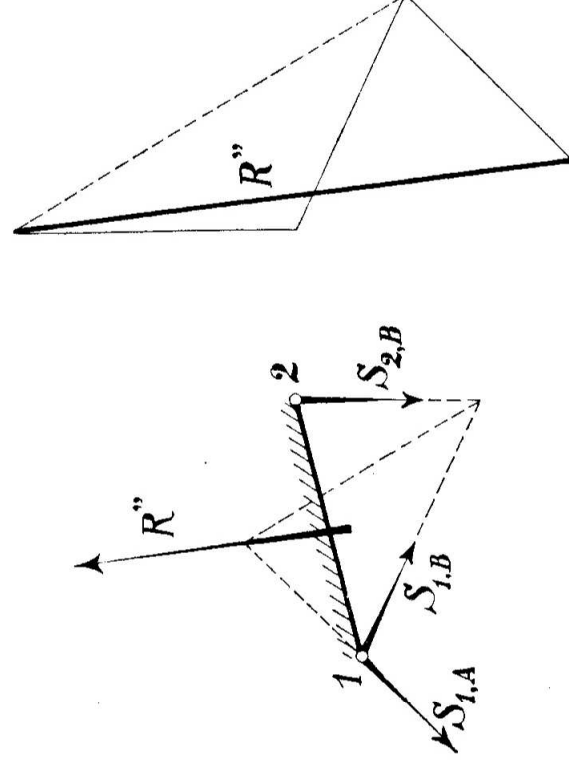


Fig. 39.

come noti: converrà anzi addirittura trattarli alla stessa stregua delle forze esterne F_1 ed F_2 applicate agli stessi nodi, e com-
porli quindi addirittura con esse.

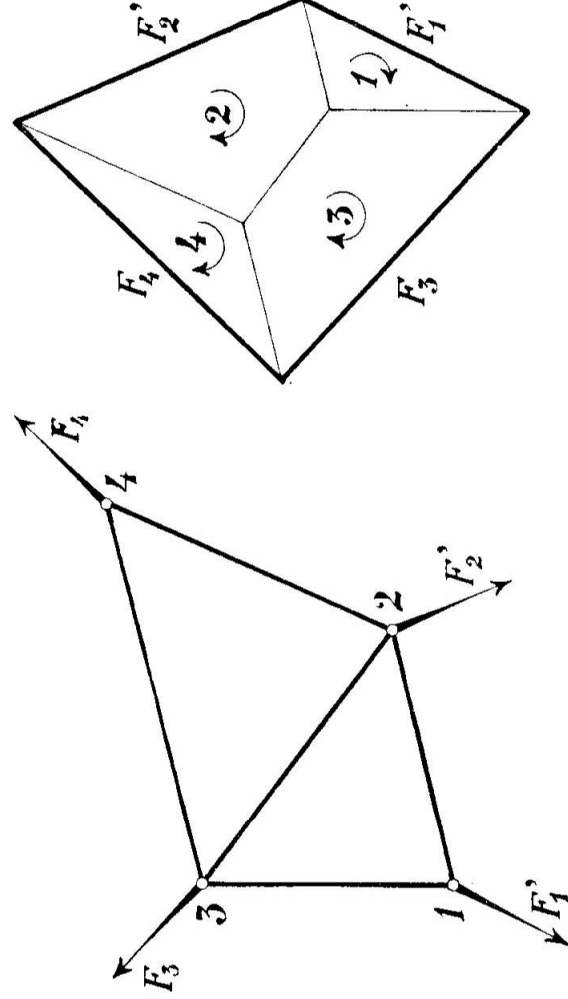


Fig. 40.

Perciò nella figura 40, in cui il diagramma di CREMONA è stato costruito per la solita travatura, ormai liberata però dalle

aste di vincolo, si sono denotate addrittura con F'_1 e con F''_2 rispettivamente la risultante di F_1 , di $S_{1,A}$ e di $S_{1,B}$, e la risultante di F_2 e di $S_{2,B}$.

È appena il caso di avvertire che, essendo ormai la travatura libera da ogni vincolo, il sistema delle forze ad essa appli-

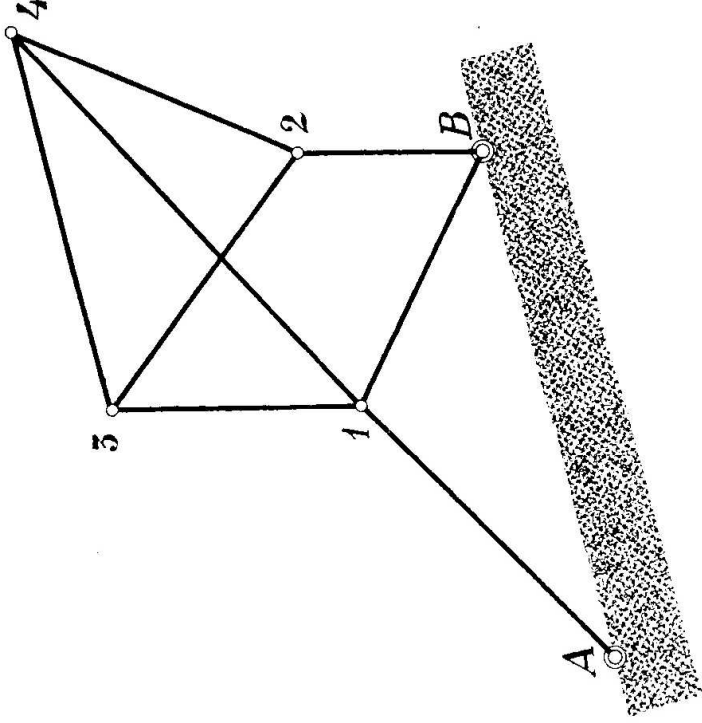


Fig. 41.

cate (comprendente tanto le forze esterne date, quanto gli sforzi nelle aste di vincolo sopprese) deve in ogni caso essere in equilibrio.

A riprova che le precedenti operazioni sono state condotte correttamente, si riscontrerà pertanto che la poligonale delle forze F'_1 F''_2 F_3 F_4 risulta chiusa.

**

Una simile applicazione combinata dei procedimenti di CULMANN e di CREMONA acquista un particolare interesse quando si ha a che fare con travature che non sono a nodi canonici, ed a cui perciò il metodo di CREMONA non sarebbe direttamente applicabile.

Accade infatti non di rado che la travatura ammetta tuttavia almeno una sezione canonica, e che le parti in cui la travatura vien divisa da tale sezione siano delle travature a nodi canonici, sicchè una prima applicazione del procedimento di CULMANN o di quello di RITTER renda poi possibile l'ulteriore applicazione del metodo di CREMONA.

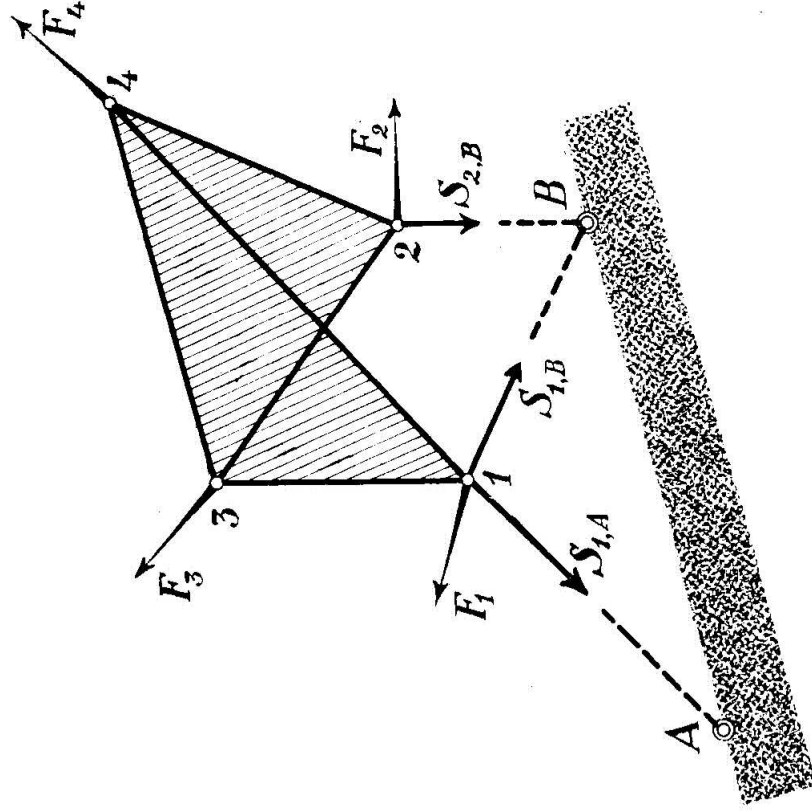


Fig. 42.

Per farsi un'idea chiara di queste eventualità il lettore non ha che da riferirsi alla travatura rappresentata nella figura 41 (e di cui abbiamo già avuto occasione d'altronde di occuparci incidentalmente a pag. 8).

Questa travatura non possiede nessun nodo in cui concorrono due sole aste: non è dunque una travatura a nodi canonici. Essa ammette però una sezione canonica, quella che taglia le tre aste di vincolo (fig. 42); e se si applica ad essa il procedimento di CULMANN — per il che basta ripetere tali e quali (e cogli stessi identici risultati) le operazioni indicate nella figura 39 — il metodo di CREMONA diviene poi alla sua volta

applicabile, perchè la travatura che quella sezione canonica isola dal sistema fisso di riferimento (fig. 43) è una travatura a nodi canonici.

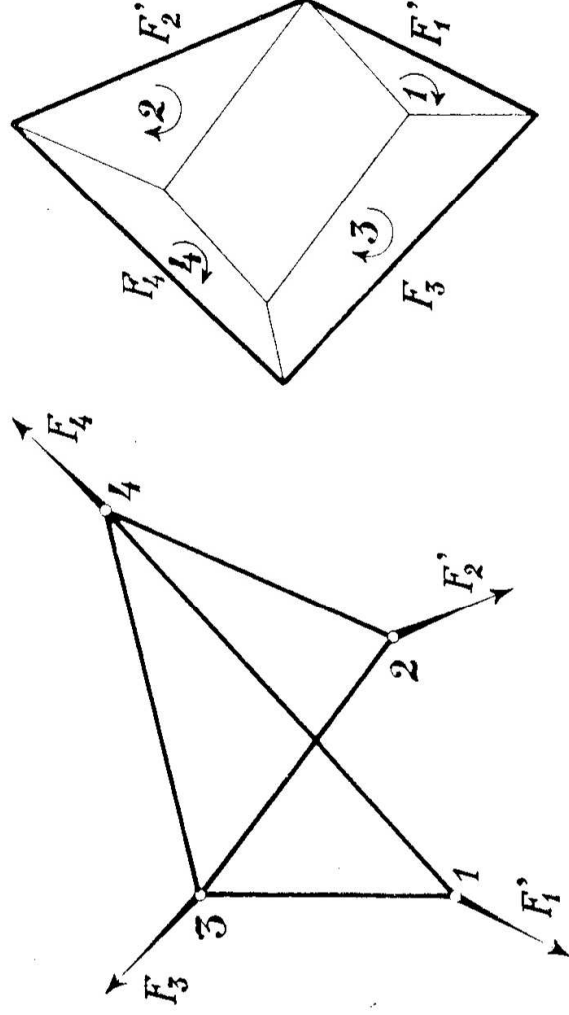


Fig. 43.

Che se poi la travatura con cui si ha a che fare non solo non fosse una travatura a nodi canonici, ma non ammettesse neppure una sezione canonica — come accade nell'esempio illustrato nella nostra fig. 22 — allora, e allora soltanto, si ricorrerà per la determinazione di qualcuna delle tensioni, al procedimento generale fondato sull'applicazione del principio dei lavori virtuali, ed illustrato già a pag. 40, salvo a far ricorso poi agli altri metodi qui descritti non appena la loro applicazione si presenti possibile.