

II.

Il problema statico.

Immaginiamo applicate ai singoli nodi $1, 2, 3, 4, \dots$ di una travatura reticolare piana (fig. 17) certe forze $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$ affatto arbitrarie, purchè tutte contenute nel piano stesso della figura.

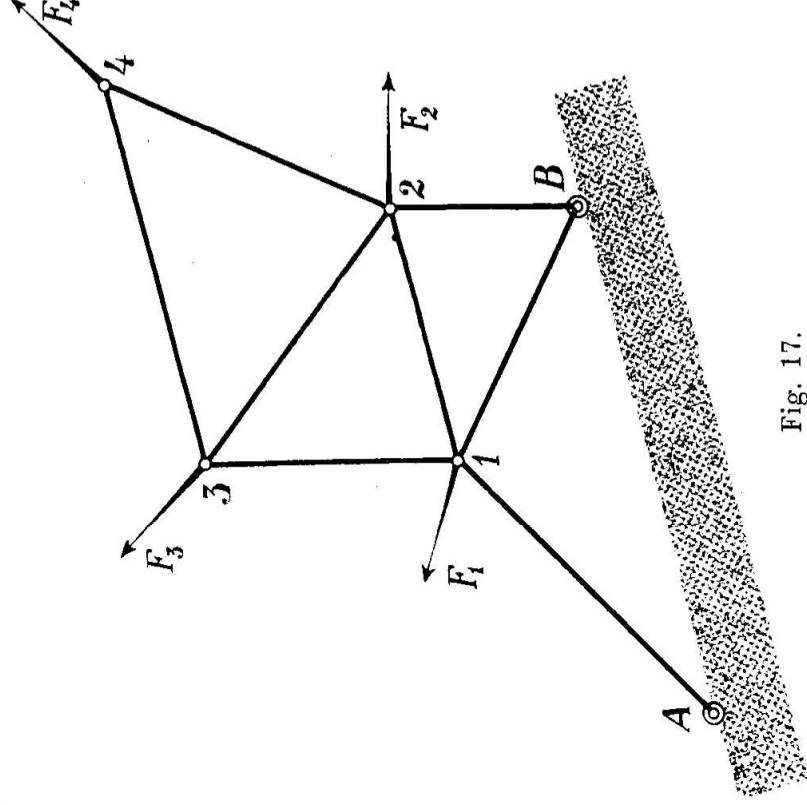


Fig. 17.

Se le aste sono — per numero e per disposizione — atte a definire completamente la configurazione del sistema, e quindi ad impedire qualsiasi spostamento di nodi, ciascuno di questi dovrà necessariamente risultare in equilibrio sotto l'azione della forza o delle forze esterne ad esso nodo applicate, tenuto conto

dei vincoli ad esso imposti dalla presenza delle varie aste che vi fanno capo.

In queste condizioni risolvere il problema statico vuol dire determinare le reazioni di questi vincoli, vale a dire gli sforzi (interni) che le varie aste esercitano sui nodi: più precisamente le grandezze di questi sforzi, poichè le loro linee d'azione debbono in ogni caso coincidere colle congiungenti stesse dei nodi.



Fig. 18.

Infatti un'asta è, generalmente parlando, un corpo solido — che, fino ad avviso contrario, noi rigarderemo come perfettamente rigido — articolato mediante due cerniere in due suoi punti A e B (fig. 18).

Se la si immagina per un momento isolata dal resto del sistema essa deve (in assenza di forze esterne ad essa direttamente applicate) risultare in equilibrio sotto l'azione delle due sole forze interne che le sono trasmesse dalle due cerniere.

Queste due forze interne dovranno dunque sempre avere per comune linea d'azione la congiungente AB , che prende perciò il nome di asse dell'asta: esse dovranno poi inoltre essere eguali in grandezza, e dirette in sensi contrarii.



Fig. 19.

Quando tali forze sono rivolte verso l'esterno del segmento finito AB (fig. 18), quando cioè esse son tali da tendere l'asta su cui agiscono, questa si dice più propriamente un *tirante*.

Quando invece le forze sono rivolte verso l'interno di quel segmento (fig. 19) sicchè l'asta risulta compressa, questa prende più particolarmente il nome di *puntone*.

Alla grandezza comune di queste forze si usa però dar sempre il nome di *tensione* dell'asta, con evidente riferimento al primo dei due casi indicati.

E si conviene di attribuire a quella grandezza il segno positivo se l'asta è effettivamente tesa: il segno negativo se invece nella realtà essa è compressa.

*
*
*

Per arrivare a risolvere, nel modo più generale, il problema della determinazione delle tensioni nelle varie aste di una travatura reticolare piana in equilibrio, noi incominceremo col chiederci in quali casi la Statica può da sola fornirci la soluzione.

A tal fine basterà ricordare ⁽¹⁾ che la Statica si riassume e compendia tutta, in ultima analisi, nel solo principio dei lavori virtuali.

Se dunque essa non è impotente a determinare la soluzione del nostro problema, le equazioni risolventi dovranno *tutte* potersi scrivere imponendo l'annullarsi del lavoro delle diverse forze in gioco per *tutti* gli spostamenti di cui il sistema è suscettibile compatibilmente coi vari vincoli che gli sono imposti.

Ma è ben evidente che, fino a che si conservano in funzione tutte le aste, nessun sistema di spostamenti normali riesce possibile: possono verificarsi soltanto degli spostamenti anormali, semprechè la travatura, per qualche sua singolarità di conformazione, ne comporti.

Di più, le equazioni che corrispondono a questi eventuali spostamenti anormali — e che chiameremo *equazioni anormali di equilibrio* — non contengono nessuna delle tensioni nelle aste, perchè derivano da sistemi di spostamenti virtuali che sono per ipotesi compatibili coi vincoli creati dalle aste stesse, e nei quali quindi le reazioni di questi vincoli non compiono lavoro.

In quelle equazioni compaiono solo le forze esterne applicate ai diversi nodi: esse costituiscono quindi delle relazioni a cui tali forze devono soddisfare.

Di qui l'importante teorema:

Se una travatura è suscettibile di un certo numero di spostamenti anormali, le forze che si possono applicare ai suoi nodi debbono, se si vuole che essa sia in equilibrio, soddisfare ad altrettante equazioni anormali.

⁽¹⁾ Cfr. G. COLONNETTI, *I fondamenti della Statica*, Torino, U.T.E.T., 1927, Parte prima, Cap. III.

**

Perchè nelle equazioni dell'equilibrio compaiano le tensioni delle aste — sicchè esse siano utilizzabili per la determinazione di queste tensioni — occorre evidentemente che, nel sistema di spostamenti virtuali cui esse si riferiscono, le tensioni compiano un lavoro non nullo: occorre cioè che si considerino sistemi di spostamenti virtuali non compatibili coi vincoli creati dalle aste cui quelle tensioni si riferiscono; ciò che si può sempre fare se si applica il teorema dei lavori virtuali allo studio dell'equilibrio della travatura opportunamente liberata in precedenza da quei vincoli.

Immaginiamo infatti idealmente soppressa una determinata asta: se si vuole che l'equilibrio della travatura non ne resti in alcun modo turbato, bisogna, naturalmente, nell'atto stesso in cui si immagina soppressa l'asta, immaginar applicate ai due nodi che l'asta collegava due forze eguali e contrarie, aventi per comune linea d'azione l'asse dell'asta, ed equipollenti alle due reazioni che l'asta sviluppava sui nodi stessi.

Ciò fatto, se in seguito alla soppressione dell'asta, la travatura è divenuta suscettibile di un sistema di spostamenti normali implicante una variazione della distanza dei due nodi che l'asta collegava, un'*equazione normale d'equilibrio* si potrà subito scrivere, la quale conterrà non solo il lavoro delle forze esterne, ma anche quello della tensione nell'asta considerata, e perciò potrà servire a determinare questa tensione.

Perchè dunque si possa trovare, coll'aiuto delle sole leggi della Statica, la tensione prodotta in un'asta di una travatura reticolare da un determinato, e del resto arbitrario, sistema di forze esterne, occorre e basta che la travatura sia tale che si possa attribuire all'asta considerata una dilatazione arbitraria (sia pur piccolissima) senza variare per nulla le lunghezze delle aste rimanenti.

E perchè, per la stessa via, si possano trovare tutte le tensioni in tutte le aste, occorre e basta che la travatura sia tale che ciascun'asta possa subire una dilatazione arbitraria (piccolissima) mentre le lunghezze delle altre aste restano invariate.

Donde il teorema:

Perchè la Statica possa fornire la soluzione del problema dell'equilibrio di una travatura reticolare piana, occorre e basta che questa sia liberamente dilatabile.

Per questa ragione le travature liberamente dilatabili — vale a dire prive di aste sovrabbondanti e non comportanti nessun sistema di spostamenti anormali — si dicono **staticamente determinate**.

Se invece una travatura contenente a aste non è suscettibile che di $a - k$ dilatazioni distinte, il teorema dei lavori virtuali non può fornire più di $a - k$ equazioni distinte: k di meno adunque di quelle che occorrerebbero per determinare le tensioni nelle a aste, sicchè si possono assumere ad arbitrio k di queste tensioni ed esprimere poi le tensioni rimanenti in funzione di quelle e delle forze esterne applicate.

Così accade sempre quando la travatura contiene k aste sovrabbondanti.

La travatura si dice allora *staticamente indeterminata od iperstatica*; e si chiamano *incognite iperstatiche* le k tensioni nelle k aste sovrabbondanti.

Ma può anche darsi, sia pure in via d'eccezione, che la limitazione del numero delle dilatazioni distinte trovi la sua ragion d'essere nell'esistenza di qualche sistema di spostamenti anormali, e quindi di qualche relazione anormale tra le dilatazioni stesse.

Più generalmente può accadere che tra le dilatazioni delle aste della travatura sussistano:

k equazioni normali dovute all'esistenza di k aste sovrabbondanti;

h equazioni anormali corrispondenti ad h sistemi possibili di spostamenti anormali.

La Statica fornisce allora $k + h$ equazioni di meno di quelle che sarebbero necessarie per determinare le tensioni in tutte le aste.

*
*
*

Fermiamoci al caso delle travature staticamente determinate e vediamo di precisare le idee riferendoci ad un caso particolare.

Riprendiamo perciò in considerazione una qualunque delle travature staticamente determinate di cui abbiamo già avuto occasione di occuparci: quella, per esempio, che si vede rappresentata nella fig. 20 e di cui si parlò già a pag. 5.

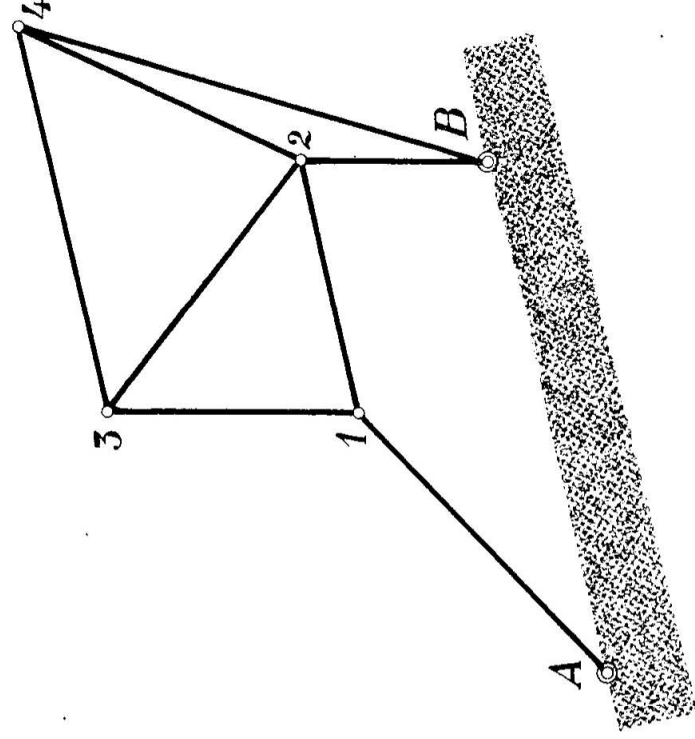


Fig. 20.

Vogliamo senz'altro provarci a determinare lo sforzo che, in un'asta qualunque di questa travatura, per esempio nell'asta 2.3, nasce per effetto di una data sollecitazione esterna.

Per semplicità ammetteremo che la sollecitazione esterna si riduca nel caso concreto ad una forza sola, per esempio alla sola F_4 applicata al nodo 4; ma resta ben inteso fin d'ora che quel che verremo dicendo di quest'unica forza potrebbe e dovrebbe ripetersi tale e quale per quante altre forze fosser presenti, sicchè la semplicità voluta del nostro esempio nulla toglie alla assoluta generalità della nostra trattazione.

Immaginiamo dunque soppressa l'asta 2.3.

Noi sappiamo che l'equilibrio del sistema si può, anche in assenza di quest'asta, conservare immutato, se si provvede ad applicare ai due nodi che l'asta collegava due forze precisamente equipollenti a quelle che sugli stessi nodi esercitava l'asta soppressa (fig. 21).

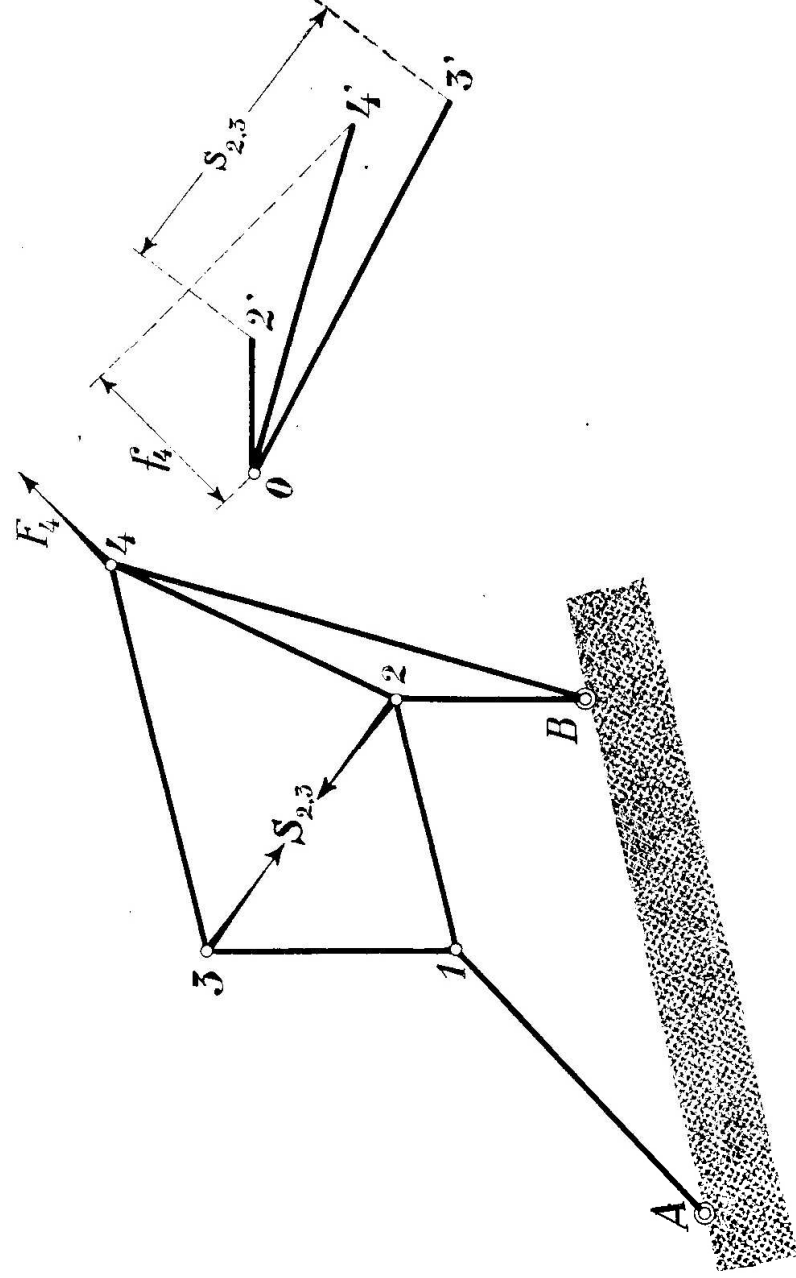


Fig. 21.

Sappiamo ancora che la travatura, così mantenuta in equilibrio, non possiede però più una configurazione geometricamente definita: che cioè esiste certamente un sistema di spostamenti, compatibile con tutti i vincoli cui i diversi nodi della travatura sono tuttora soggetti, ma implicante un mutamento di distanza dei nodi 2 e 3, epperò reso possibile solo dopo la soppressione dell'asta che collegava questi due nodi.

Tale sistema di spostamenti ci è anzi già noto: noi abbiamo avuto occasione di analizzarlo ed abbiamo imparato a rappresentarlo in disegno nel modo già indicato nella figura 14 e riprodotto a destra della fig. 21.

Orbene, adottiamo un simile sistema di spostamenti $0.2'$, $0.3'$, $0.4'$ per l'applicazione del principio dei lavori virtuali, e scri-

viamo che, per l'equilibrio, deve essere nulla la somma dei lavori fatti dalla forza esterna F_4 e dalle due forze che stanno a rappresentare, nella travatura privata dell'asta $2 \cdot 3$, la primitiva tensione $S_{2,3}$ di quest'asta.

È chiaro che il lavoro virtuale della forza F_4 in una qualsiasi variazione di configurazione del sistema, si otterrà moltiplicando la grandezza della forza per la proiezione, sulla sua direzione, dello spostamento $0 \cdot 4'$ del nodo 4 cui la forza è applicata: proiezione che si assumerà positiva o negativa a seconda che risulterà rivolta nello stesso senso della forza od in senso contrario.

Quanto al lavoro virtuale contemporaneamente compiuto dalle due forze che stanno a rappresentare la tensione $S_{2,3}$ è facile constatare che lo si potrà sempre ottenere nel modo più semplice moltiplicando la grandezza di questa tensione per la proiezione, sulla sua direzione, dello spostamento relativo $2' \cdot 3'$ dei due modi già collegati dall'asta: proiezione che, date le convenzioni da noi fatte poc'anzi in merito alla positività della tensione, si dovrà considerare positiva o negativa a seconda che i due nodi che l'asta collegava si avvicinano ovvero si allontanano.

Nel caso della nostra figura, e colle notazioni ivi indicate, l'equazione dei lavori virtuali assumerà pertanto la forma

$$F_4 \cdot f_4 + S_{2,3} \cdot s_{2,3} = 0$$

dalla quale si ricava subito il valore incognito della tensione

$$S_{2,3} = - \frac{F_4 \cdot f_4}{s_{2,3}}$$

*
*
*

Ecco un altro esempio dal quale appare come il calcolo si presenti, se possibile, ancor più semplice quando lo sforzo che si tratta di determinare si riferisce ad un'asta di vincolo.

La travatura sia quella rappresentata in fig. 22 a pag. seg. e l'asta di cui si vuol conoscere la tensione sia quella che collega il nodo 3 al punto C del sistema fisso di riferimento.

Supposta soppressa quest'asta si costruirà il diagramma degli spostamenti virtuali, il quale nel caso specifico non differirà da quello utilizzato nell'esempio precedente, poichè la travatura, una volta liberata dall'asta $3 \cdot C$, si riduce a quella stessa già trattata nella figura 14.

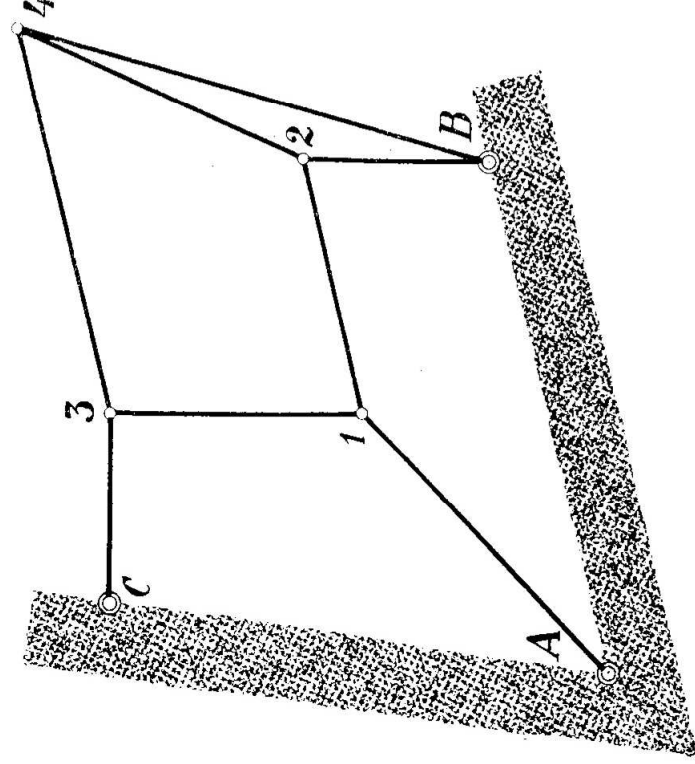


Fig. 22.

La semplificazione nasce nella utilizzazione di questo diagramma per il fatto che uno degli estremi dell'asta soppressa è questa volta assolutamente fisso: lo spostamento relativo dei due punti già collegati dall'asta viene perciò a coincidere collo spostamento assoluto del nodo 3 a cui l'asta faceva capo.

Tenuto conto che questo spostamento del nodo 3 va, nel caso concreto, assunto col segno negativo, ed adottate le notazioni della fig. 23, si ha pertanto

$$S_{3,c} = + \frac{F_4 \cdot f_4}{S_{3,c}}$$

In termini generali, se si indica

con F una qualunque forza esterna applicata ad un nodo di una travatura reticolare staticamente determinata,

con S la tensione che il sistema delle forze F fa nascere in una ben determinata (e del resto arbitraria) asta della truttura,

con f la proiezione, sulla direzione di F (è nello stesso suo senso), dello spostamento che il nodo su cui F agisce subi-

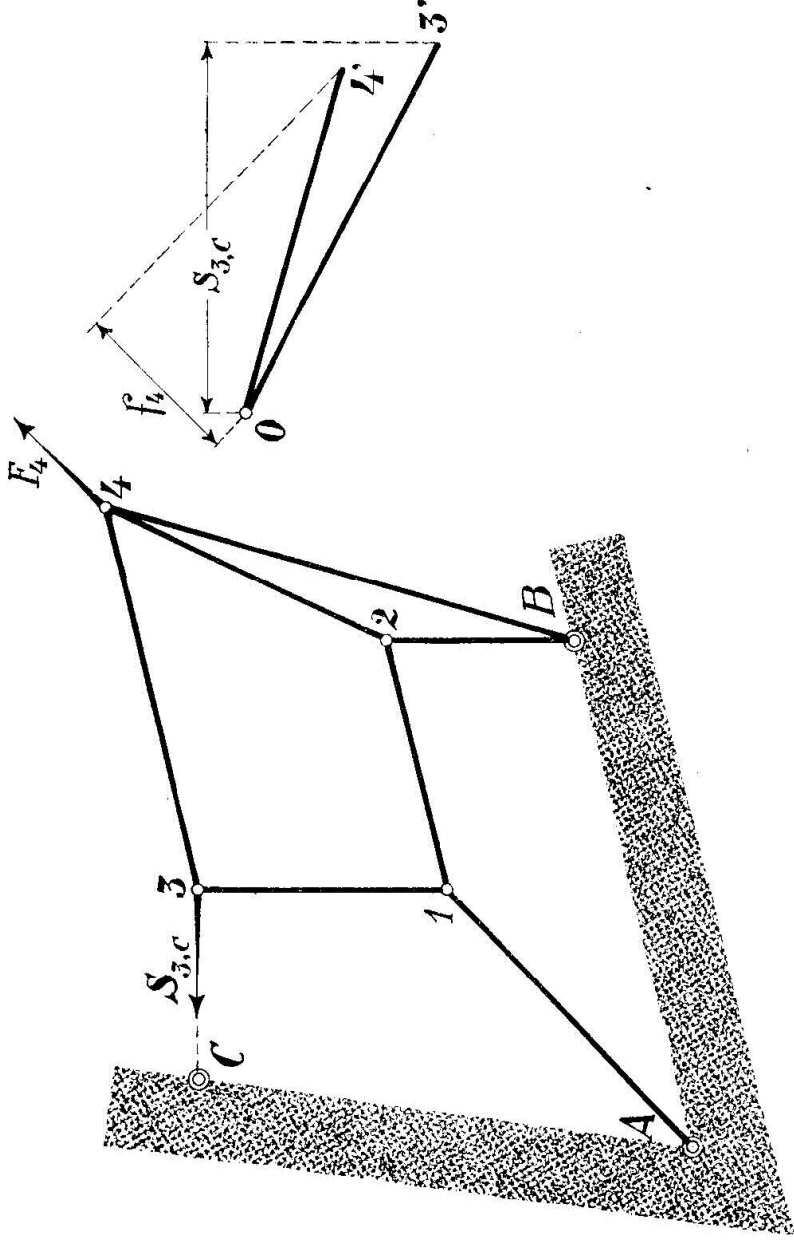


Fig. 23.

rebbe nella variazione virtuale di configurazione che si rende possibile sopprimendo la particolare asta testè considerata,

con s il decremento che la stessa variazione virtuale di configurazione farebbe subire alla distanza dei due nodi già collegati da quella medesima asta,

l'equazione dei lavori virtuali conduce ad una relazione del tipo

$$S = - \frac{\sum F \cdot f}{s} \quad (13)$$

dalla quale si può sempre ricavare un valore finito e ben determinato della tensione S .

La formula non cade in difetto se non in quel caso

$$s = 0$$

che noi abbiamo già ampiamente discusso, e che abbiamo qui esplicitamente escluso ammettendo che la travatura reticolare considerata fosse staticamente determinata.

Vale la pena di avvertire che il risultato è poi completamente indipendente dalla scala adottata nella costruzione del diagramma degli spostamenti, sicchè tale scala può senza inconvenienti restare indeterminata.

*
**

A questo punto il problema dell'equilibrio delle travature reticolari staticamente determinate si potrebbe considerare come completamente ed esaurientemente risolto.

Tuttavia non spiacerà al lettore che noi riprendiamo il problema da un punto di vista un po' diverso, ed in un certo senso più piano ed elementare, che ci permetta di renderci conto della portata e del significato dei vari teoremi enunciati. Ciò ci permetterà d'altronde di stabilire alcuni procedimenti di calcolo che, sebbene meno generali di quello già indicato, trovano più frequente e ben giustificata applicazione nei problemi della pratica.

Ci riferiremo perciò alla solita travatura della fig. 17, ed immagineremo in essa momentaneamente sopprese, non una sola, ma tutte le aste, sostituendole naturalmente cogli sforzi (incogniti) che, in condizioni di equilibrio, esse sviluppino sui diversi nodi cui fanno capo (fig. 24).

Se per ciascuno di quei nodi — ormai liberi da ogni vincolo — si scrivono le due equazioni esprimenti l'annullarsi della somma delle proiezioni, su due direzioni arbitrarie, di tutte le forze (esterne ed interne) al nodo stesso applicate — equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio del nodo nel piano della figura — si ottengono in totale $2n$ equazioni nelle quali, insieme colle date forze esterne, compariranno linearmente le $a = 2n$ grandezze incognite delle tensioni nelle aste.

Tali equazioni saranno dunque, in generale, sufficienti a determinare queste tensioni.

Più precisamente le $2n$ equazioni determineranno uno ed un solo sistema di valori (finiti) delle $2n$ incognite, eccezion fatta soltanto per il caso in cui il determinante dei coefficienti sia eguale a zero.

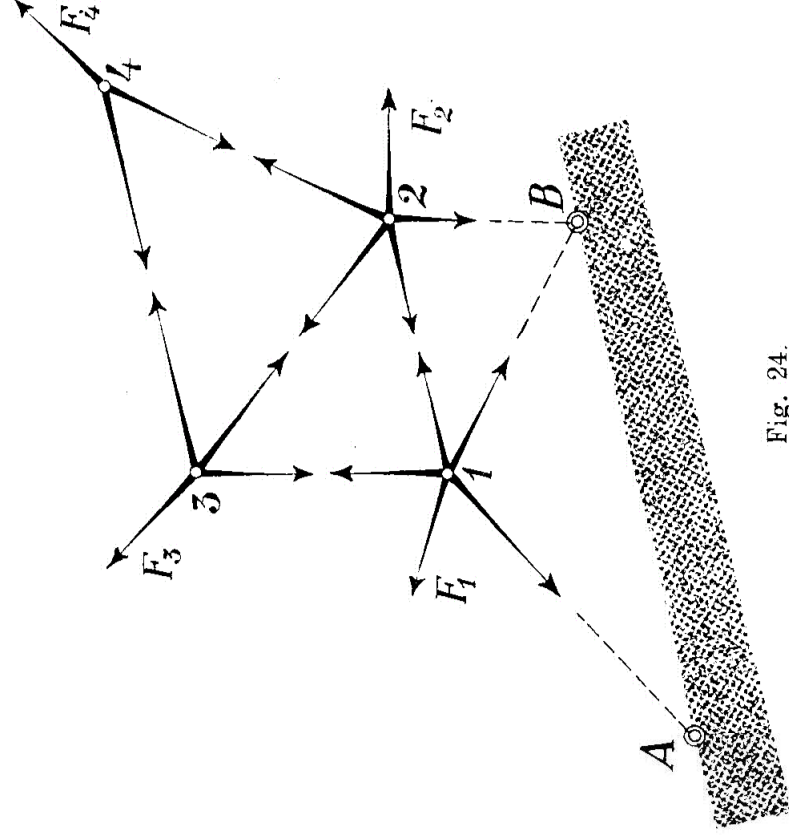


Fig. 24.

Vediamo che cos'è questo determinante.

A tal fine prendiamo in considerazione un nodo generico r di coordinate x_r ed y_r (fig. 25), ed indichiamo con F_r (di componenti X_r ed Y_r) la forza esterna ad esso nodo applicata, e con S_{ru} , S_{rv} , ... le grandezze incognite delle tensioni che si sviluppano nelle aste (di lunghezze l_{ru} , l_{rv} , ...) che congiungono il nodo r con gli altri nodi u , v , ... della travatura.

Le due equazioni di equilibrio di un tal nodo nel piano della figura, si possono, com'è noto, scrivere sotto la forma

$$S_{ru} \frac{x_r - x_u}{l_{ru}} + S_{rv} \frac{x_r - x_v}{l_{rv}} + \dots = X_r$$

$$S_{ru} \frac{y_r - y_u}{l_{ru}} + S_{rv} \frac{y_r - y_v}{l_{rv}} + \dots = Y_r$$

Incominciamo col riferirci a quel primo caso particolarissimo di cui ci siamo già diffusamente occupati nel precedente ca-

pitolo: al caso cioè in cui al nodo r fan capo due sole aste (nodo semplice).

Allora nelle due equazioni scritte sopra non vi saranno altri termini oltre a quelli esplicitamente espressi: in altre parole i

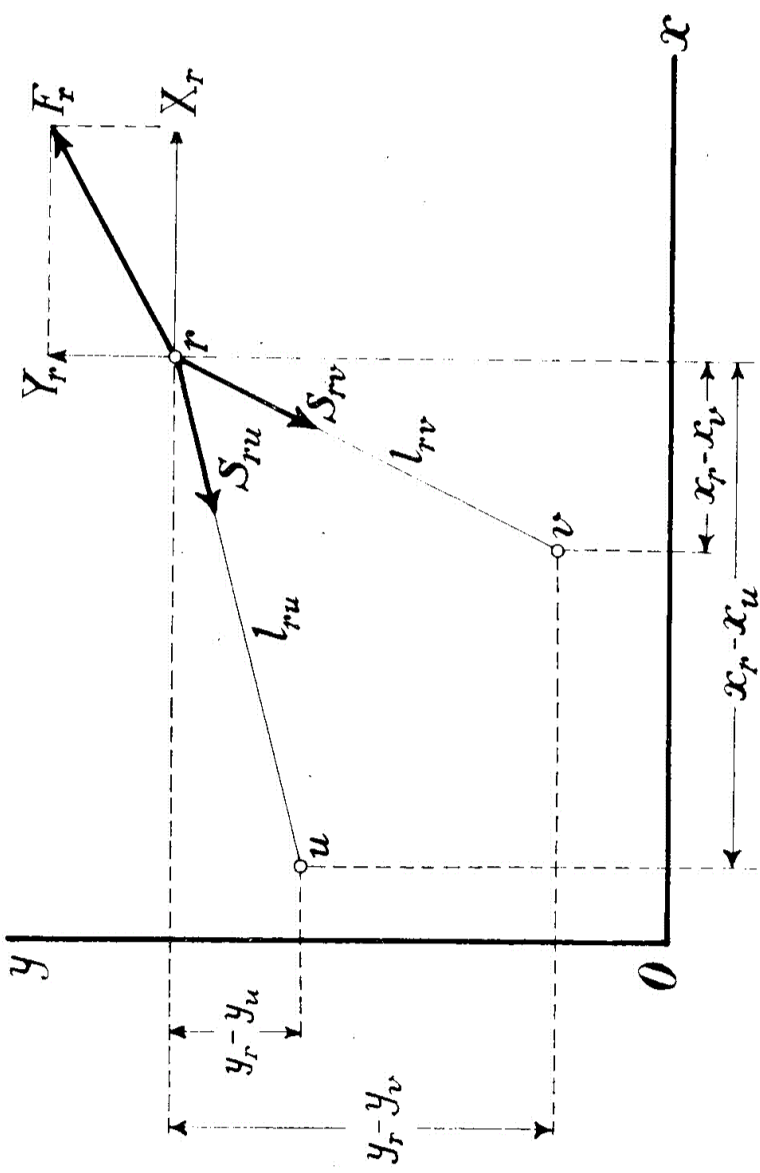


Fig. 25.

coefficienti delle incognite che non sono nè S_{ru} nè S_{rv} saranno tutti identicamente nulli.

Le due linee (orizzontali) del determinante dei coefficienti, relative a tali due equazioni, saranno pertanto del tipo

$$0, \dots, 0, \frac{x_r - x_u}{l_{ru}}, \frac{x_r - x_v}{l_{rv}}, 0, \dots, 0$$

$$0, \dots, 0, \frac{y_r - y_u}{l_{ru}}, \frac{y_r - y_v}{l_{rv}}, 0, \dots, 0$$

Il determinante sarà adunque sicuramente nullo ogni qual volta riuscirà verificata la condizione

$$\frac{x_r - x_u}{y_r - y_u} = \frac{x_r - x_v}{y_r - y_v}$$

condizione che è quella stessa che noi abbiamo già incontrata una volta (pag. 13) e che abbiamo allora riconosciuta come caratterizzante l'allineamento dei tre punti u, r, v .

Quando dunque una siffatta singolarità di posizione dei nodi si verifica, non solo il sistema cessa (come abbiamo riconosciuto allora) di essere definito geometricamente, ma cessa anche di essere definito staticamente.

Basta infatti ricordare che, secondo la notissima regola di Kramer, i valori che risolvono un sistema di equazioni lineari ed omogenee tra altrettante incognite si possono sempre esprimere sotto forma di rapporti aventi tutti per denominatore il determinante dei coefficienti (quello stesso di cui stavamo poc'anzi discorrendo) e per numeratori i varii determinanti che da esso si ottengono sostituendo alle singole sue colonne la colonna dei termini noti.

Ora se il denominatore è nullo i valori delle incognite risultano tutti infinitamente grandi (ciò è quanto dire che non esistono valori finiti delle incognite che risolvano il problema); fa eccezione soltanto il caso in cui sia nullo anche un numeratore: allora l'incognita corrispondente resta rappresentata dal rapporto $0:0$ che, come è noto, ha un valore indeterminato.

La cosa si verifica se è nullo il determinante che ha per linee

$$0, \dots, 0, X_r, \frac{x_r - x_v}{l_{rv}}, 0, \dots, 0$$

$$0, \dots, 0, Y_r, \frac{y_r - y_v}{l_{rv}}, 0, \dots, 0$$

ovvero quello che ha per linee

$$0, \dots, 0, \frac{x_r - x_u}{l_{ru}}, X_r, 0, \dots, 0$$

$$0, \dots, 0, \frac{y_r - y_u}{l_{ru}}, Y_r, 0, \dots, 0$$

e l'una cosa come l'altra si verificano se

$$\frac{X_r}{Y_r} = \frac{x_r - x_u}{y_r - y_u} = \frac{x_r - x_v}{y_r - y_v}$$

vale a dire se la forza esterna F_r ha la medesima direzione delle tensioni interne S_{ru} , S_{rv} , cioè ha la sua linea d'azione coincidente colla retta stessa su cui giacciono allineati i tre nodi u , r , v .

Tutto ciò era d'altronde assai facilmente prevedibile. Per rendersene conto basta pensare alle condizioni in cui viene a trovarsi il nodo r sotto l'azione della forza esterna F_r e delle due tensioni S_{ru} ed S_{rv} nelle due aste ru ed rv quando queste sono allineate (fig. 26).

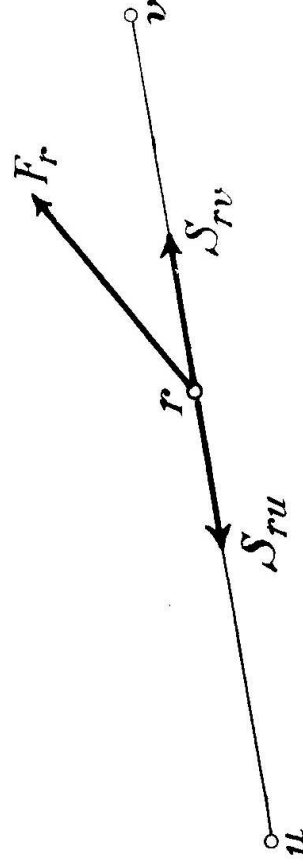


Fig. 26.

È infatti evidente che queste due tensioni, avendo entrambe la medesima linea d'azione, avranno una risultante avente necessariamente la stessa linea d'azione.

Ora, i casi sono due: o la linea d'azione della forza F_r è diversa da quella delle S_{ru} , S_{rv} , e allora la F_r non potrà mai essere equilibrata dalla risultante delle due tensioni, e l'equilibrio riesce impossibile: o la linea d'azione della F_r coincide con quella delle S_{ru} , S_{rv} , ed allora l'equilibrio diviene possibile, ma in infiniti modi diversi, nel senso che non restano determinate separatamente le grandezze delle due tensioni, ma solo la grandezza della loro risultante (il che è quanto dire la loro somma o la loro differenza, a seconda dei casi).

S'intende che quello testè considerato non è che un caso estremamente particolare: escluso il quale, l'eventualità che si annulli il determinante formato coi coefficienti delle S nelle varie equazioni dell'equilibrio può tuttavia presentarsi sotto altre forme.

Dal punto di vista analitico tale eventualità sta semplicemente a provare che i primi membri di quelle equazioni non sono linearmente indipendenti, che cioè il primo membro di una almeno di esse altro non è che una combinazione lineare dei primi membri delle rimanenti.

Supponiamo al solito, tanto per fissare le idee, che detto determinante, di ordine $2n$, abbia per caratteristica $2n - 1$; ed immaginiamo di mettere da parte una delle equazioni, e che la matrice relativa alle $2n - 1$ equazioni rimanenti continui ad avere $2n - 1$ per caratteristica.

Queste $2n - 1$ equazioni potranno allora risolversi per rapporto a $2n - 1$ delle incognite e determineranno un sistema di valori non tutti nulli dei rapporti di queste $2n - 1$ incognite alla rimanente.

Ora è chiaro che il mettere da parte una delle $2n$ equazioni equivale semplicemente a prescindere momentaneamente dalla condizione d'equilibrio che essa esprime.

Il fatto che le rimanenti $2n - 1$ equazioni possano venir soddisfatte da un sistema di valori non tutti nulli dei rapporti delle tensioni, sta ad esprimere che, soppressa quell'equazione, il problema dell'equilibrio è divenuto suscettibile di infinite soluzioni, nel senso che si può sempre assumere ad arbitrio la grandezza della tensione in un'asta e determinare in conseguenza tutte le altre tensioni per modo che le predette $2n - 1$ equazioni risultino soddisfatte.

Ciò posto si riprenda in considerazione l'equazione messa momentaneamente da parte.

Il primo membro di essa, essendo una combinazione lineare dei primi membri delle precedenti $2n - 1$ equazioni, non potrà che assumere un valore ben determinato, eguale alla analoga combinazione lineare dei termini noti di quelle $2n - 1$ equazioni, e ciò qualunque sia il sistema di tensioni considerato tra gli infiniti risolvibili di cui si è parlato sopra.

Questo valore sarà, in generale, diverso dal termine noto dell'equazione che avevamo messa da parte: la quale equazione quindi non riuscirà soddisfatta: in generale dunque il problema statico non ammetterà soluzione.

Ma se, come caso particolare, il termine noto dell'equazione già messa in disparte fosse proprio identicamente eguale alla detta combinazione lineare dei termini noti delle precedenti

$2n - 1$ equazioni, l'equazione stessa resterebbe ovviamente soddisfatta qualunque fosse il sistema di tensioni considerato tra gli infiniti risolvibili: in questo caso il problema statico proposto sarebbe da considerarsi come indeterminato.

*
**

Resta così confermato, nel caso generale come già in quello particolare del nodo semplice, che quelle singolarità di posizione che mettono il sistema reticolare in condizioni di indeterminazione geometrica ne infirmano anche la risoluzione statica.

V'è dunque una duplice ragione per non adottare mai, nella pratica costruttiva, sistemi presentanti siffatte singolarità.

La stessa duplice ragione ci induce ad escluderli esplicitamente dalla nostra trattazione, nel seguito della quale riterremo pertanto sempre che la presenza di

$$a = 2n$$

aste sia sufficiente a determinare completamente così la configurazione geometrica del sistema come la distribuzione delle tensioni interne in esso prodotte da una qualsiasi condizione di carico.

*
**

S'intende bene che, dopo quel che noi abbiamo già detto sulla possibilità di trarre da una razionale applicazione del principio dei lavori virtuali la risoluzione pratica del problema dell'equilibrio delle travature reticolari staticamente determinate, nessuno penserà più certamente di servirsi allo stesso fine dell'incomodo ed ingombrante sistema di $2n$ equazioni fra le altrettante incognite di cui siamo venuti or discorrendo.

Vi sono però dei casi in cui il sistema si scinde spontaneamente in sistemi più semplici e di facile ed immediata risoluzione.

Già in tesi generale non bisogna credere che quelle $2n$ equazioni debbano proprio essere complete, contenere cioè in modo esplicito tutte le incognite.

Basta pensare un momento al significato di quelle equazioni ed al modo con cui sono state stabilite, per poterne subito

dedurre che in esse non potranno anzi mai figurare contemporaneamente tutte le incognite del problema statico. In ciascuna equazione compariranno infatti soltanto gli sforzi relativi alle aste che fan capo al nodo cui l'equazione stessa si riferisce. Qualche semplificazione nel sistema è dunque, anche in linea generale, prevedibile.

Convien quindi che ci chiediamo, prima di procedere oltre, se vi sono dei casi nei quali, grazie a siffatte semplificazioni, i procedimenti di calcolo a cui questa via conduce presentino qualche vantaggio sul procedimento generale che discende dalla applicazione del principio dei lavori virtuali.

È bensì vero che le semplificazioni di cui si tratta non possono che essere in relazione con la particolare forma e costituzione della travatura: si tratterà dunque di travature particolari; ma siccome le particolarità di struttura che caratterizzeranno queste travature son di quelle che più frequentemente si incontrano nella pratica tecnica, così non sarà inutile che noi ci soffermiamo brevemente qui a definirle, e che dichiariamo ad esse una parte ragguardevole del nostro studio.

Ora a questo proposito si può dire che due sono, in ultima analisi, i casi da prendersi in considerazione.

CASO PRIMO. — Travature a nodi canonici.

Ferma restando la denominazione, già adottata, di nodo semplice per ogni nodo in cui non concorrano che due sole aste, noi chiameremo travatura a *nodi canonici* ogni travatura la quale possieda almeno un nodo semplice e che resti tale quando si immagini soppresso tale nodo insieme con le due aste che ad esso fan capo.

Per trovare un esempio di travatura a nodi canonici basta evidentemente riportarsi al caso tipico rappresentato nella fig. 27 che abbiamo, a suo tempo, immaginato di generare rendendo dapprima fisso il nodo 1 per rapporto ai punti fissi *A* e *B*, poi il nodo 2 per rapporto ad 1 ed a *B*, quindi il nodo 3 per rapporto ad 1 ed a 2, e così via, e ciò mediante successive introduzioni di due aste per ciascun nodo.

È infatti fuor di dubbio che, in una travatura così generata, vi sarà sempre almeno un nodo, l'ultimo aggiunto, nel quale non concorreranno che le sole due aste impiegate per renderlo fisso per rapporto ai precedenti; e che, soppresso tale nodo, insieme colle due aste che ad esso fan capo, lo stesso si potrà ripetere per il nodo penultimo; e così di seguito purchè si abbia l'av-

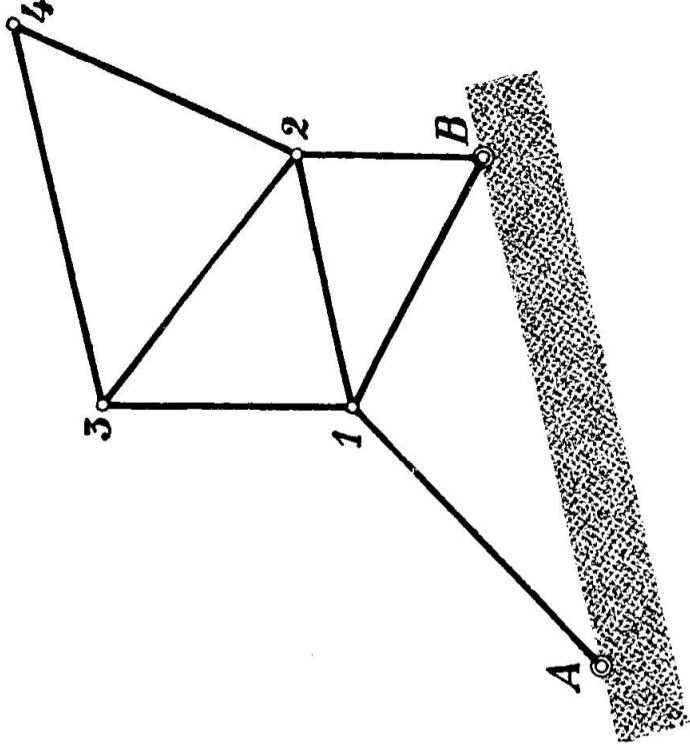


Fig. 27.

vertenza di considerare, agli effetti di questa disamina, i nodi della travatura nell'ordine inverso a quello adottato per generarla.

Così stando le cose, tra le $2n$ equazioni che esprimono le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio degli n nodi, si considerino quelle due che si riferiscono all'ultimo nodo: tali due equazioni non possono contenere che due soli sforzi incogniti, e son quelli relativi alle due aste che, sole, fan capo a quel nodo (fig. 28). Dette due equazioni potranno pertanto venir immediatamente risolte per rapporto a quei due sforzi, i quali risulteranno così completamente determinati in funzione della forza esterna ad esso nodo eventualmente applicata.

Ne segue che, nell'atto di sopprimere il nodo ultimo e le due aste che ad esso fan capo per passare allo studio dell'equi-