

Ciò premesso, sia $0.1'$ il vettore che, in una conveniente scala, rappresenta lo spostamento piccolissimo che noi abbiamo pensato di imprimere al nodo 1 ; è allora evidente che il contemporaneo spostamento del nodo 2 deve potersi ottenere sommando geometricamente al vettore $0.1'$ lo spostamento relativo di 2 rispetto ad 1 , cioè un vettore di cui non conosciamo la grandezza, ma che dovrà necessariamente essere normale alla direzione dell'asta di collegamento 1.2 .

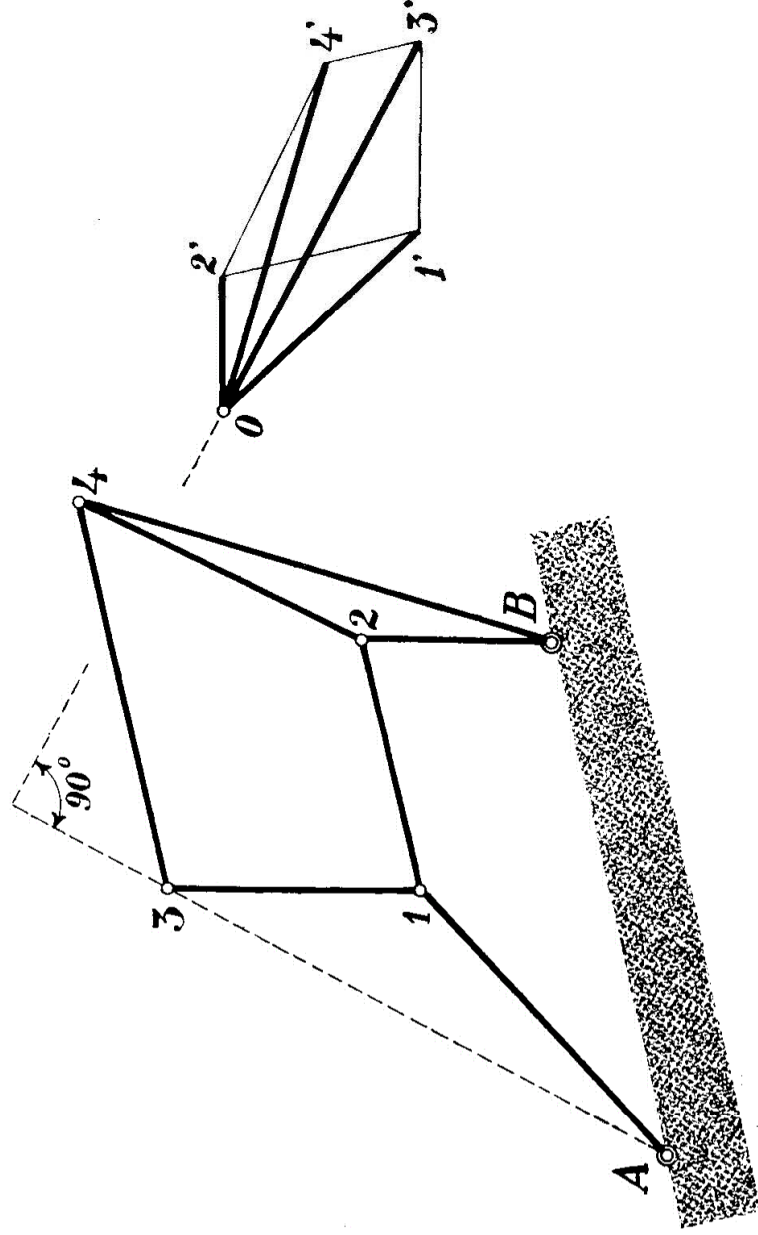


Fig. 14.

D'altra parte, lo spostamento del nodo 2 non può avvenire che normalmente alla direzione dell'asta di vincolo $B.2$ che ad esso nodo fa capo.

Condotta pertanto da 0 la perpendicolare a $B.2$, si potrà su di essa individuare il vettore cercato $0.2'$ intersecandola mediante la $1'.2'$ condotta da $1'$ perpendicolarmente ad 1.2 .

In modo perfettamente analogo si potrà dallo spostamento $0.2'$ del nodo 2 dedurre lo spostamento $0.4'$ del nodo 4 intersecando la perpendicolare a $B.4$ condotta per 0 con la perpendicolare per $2'$ alla direzione di 2.4 .

Che se poi si vuol passare a considerare punti come 3 che non sono direttamente collegati ad alcun punto del sistema

fisso di riferimento, basta tener presente che gli spostamenti loro debbono sempre potersi ottenere da quelli relativi ai nodi a cui essi sono direttamente connessi, sommandovi geometricamente dei nuovi vettori rappresentanti gli spostamenti relativi rispetto a questi, vettori le cui direzioni debbono sempre esser normali a quelle delle rispettive aste di collegamento.

Lo spostamento del nodo β sarà quindi rappresentato da un vettore che da O va al punto β' in cui si intersecano la perpendicolare ad $1.\beta$ condotta da $1'$ e la perpendicolare a $4.\beta$ condotta da $4'$.

Supponiamo che, mediante un'applicazione opportunamente ripetuta di questo semplicissimo procedimento, si sia giunti alla determinazione degli spostamenti di tutti i rimanenti nodi della travatura, in funzione dello spostamento da noi arbitrariamente attribuito al primo nodo: poichè l'unico elemento di arbitrarietà allora introdotto era, come il lettore ricorderà, la grandezza di quel primo spostamento, si potrà senz'altro concludere che, scala a parte, il sistema di spostamenti trovato è l'unico sistema di spostamenti degli n nodi dati che sia compatibile colle $2n-1$ aste conservate.

Orbene, *in generale*, un tale sistema di spostamenti implicherà una variazione non nulla della distanza dei due nodi che erano collegati dall'asta soppressa: non sarà cioè compatibile colla presenza di tale asta, il cui ripristino sarà sufficiente ad impedirne la realizzazione, e quindi a definire completamente la configurazione della travatura.

Ma, come caso eccezionale, può ben avvenire che, nel sistema di spostamenti trovato, lo spostamento relativo di uno di quei due nodi per rapporto all'altro risulti diretto normalmente alla loro congiungente, e sia perciò compatibile colla presenza di un'asta che li colleghi: allora il ripristino dell'asta soppressa, pur riportando il numero delle aste al valore necessario per la determinazione della configurazione della travatura, non basterà a rendere questa configurazione determinata.

La singolarità della travatura data verrà così rivelata dal fatto che un sistema di spostamenti, siano pur soltanto piccolissimi, dei suoi n nodi è possibile malgrado la presenza delle $2n$ aste che li collegano.

Ritorniamo al caso concreto rappresentato nella figura 14.

Poichè lo spostamento relativo del nodo β rispetto al nodo 2 ,

rappresentato in disegno dal vettore $2' \cdot 3'$, possiede una componente non nulla nella direzione dell'asta $2 \cdot 3$, ed implica quindi una variazione della distanza dei due nodi non compatibile colla presenza dell'asta stessa, quest'asta è da considerarsi come perfettamente idonea ad impedire la variazione di configurazione considerata.

Allo stesso compito può naturalmente provvedere qualunque altra asta, sia di collegamento interno, sia di vincolo, purché incompatibile col sistema trovato di spostamenti.

Si può per esempio rendere definita la configurazione della travatura rappresentata in figura 13 aggiungendo un'asta di vincolo la quale colleghi il nodo 3 ad un punto fisso generico C nel modo indicato in figura 15.

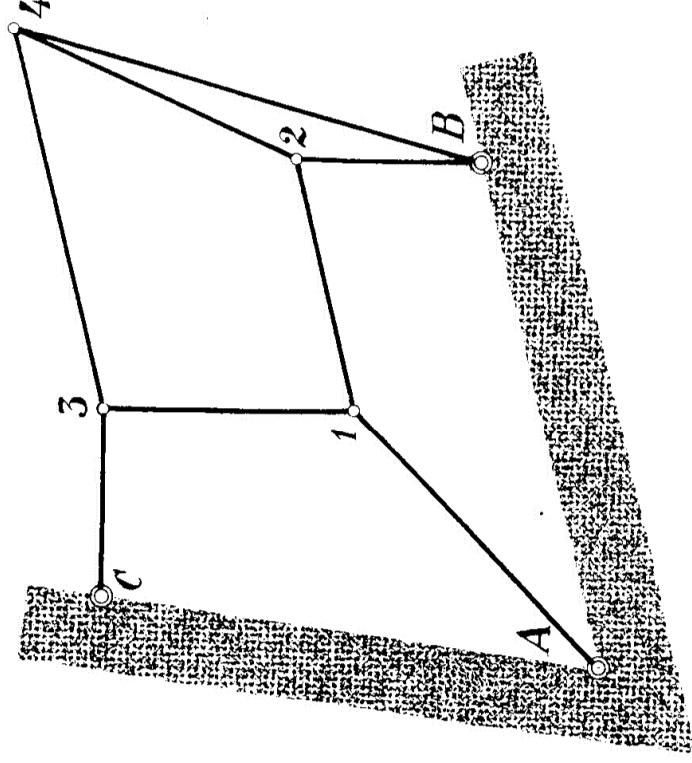


Fig. 15.

Ma non si raggiungerebbe lo scopo se la direzione di quest'asta venisse assunta normale alla direzione del vettore $0 \cdot 3'$. Ora risulta dal nostro disegno che tale vettore $0 \cdot 3'$ è precisamente perpendicolare alla congiungente del nodo 3 col punto fisso A . Ciò ci conferma nella conclusione, già da noi prevista, che un'asta disposta secondo $A \cdot 3$ (fig. 11) non potrebbe impedire lo spostamento elementare di 3 , e che pertanto essa riuscirebbe affatto incapace a rendere determinata la configurazione del sistema.

**

Noi converremo, una volta per tutte, di chiamare *normali* i sistemi di spostamenti (finiti od infinitesimi, poco importa) che ai varii nodi di una travatura reticolare si vengono a poter imprimere allorquando, sopprese una o più delle sue aste, la travatura cessa di avere una configurazione definita.

Diremo invece *anormali* quei sistemi di spostamenti (sempre necessariamente infinitesimi) che agli stessi nodi della travatura si possono eccezionalmente imprimere in dipendenza di qualche loro singolarità di posizione, malgrado la simultanea presenza di tutte le aste nel numero necessario a definire la configurazione.

**

Immaginiamo ora che ad una travatura a configurazione perfettamente definita venga aggiunta qualche nuova asta, sia di collegamento interno, sia di vincolo.

Per precisare le idee, prendiamo le mosse dalla travatura rappresentata in fig. 3 ed immaginiamovi aggiunte due aste, l'una collegante il nodo 4 al nodo 1, l'altra il nodo 3 ad un nuovo punto *C* del sistema fisso di riferimento.

Poichè la configurazione della travatura era, per ipotesi, già perfettamente definita inizialmente, non v'è dubbio che tale sarà anche la configurazione della travatura quale risulta (fig. 16) dopo l'aggiunta dei due nuovi vincoli.

Si sarebbe quasi tentati di dire che la configurazione deve a *maggior ragione* essere definita dopo l'aggiunta di tali nuovi vincoli; ma l'affermazione sarebbe inesatta: in realtà la presenza delle nuove aste nulla aggiunge alla determinazione geometrica del sistema. Le nuove aste collegano infatti dei punti le cui distanze erano già perfettamente definite, e quindi immutabili, grazie alla presenza delle aste preesistenti.

Per questo giova distinguere, tra le aste di una travatura come quella rappresentata in figura 16, quelle che appartengono già alla travatura rappresentata in figura 3, da quelle che si immaginano ad essa aggiunte posteriormente: queste ultime prendono il nome di **aste sovrabbondanti**, mentre alle prime si dà da molti Autori il nome di **aste principali**.

*
*
*

A proposito di questa distinzione però un chiarimento si impone.

Non son già le particolari aste $1 \cdot 4$ e $3 \cdot C$ della travatura rappresentata in fig. 16 che sono sovrabbondanti, ma *due* delle aste di quella travatura.

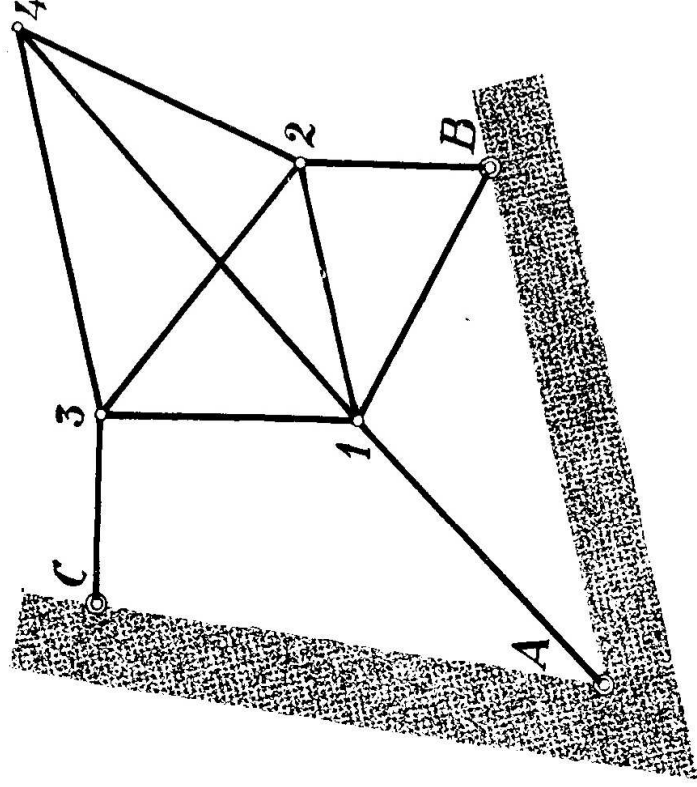


Fig. 16.

La stessa travatura si sarebbe infatti potuta ottenere anche da quella rappresentata in fig. 10 mediante aggiunta delle aste $1 \cdot 2$ e $3 \cdot C$.

La si sarebbe potuta ottenere anche da quella rappresentata in figura 15 previa sostituzione dell'asta $B \cdot 4$ colla $B \cdot 1$, nel qual caso le aste da aggiungere, e quindi da riguardarsi come sovrabbondanti, sarebbero le due aste di collegamento interno $1 \cdot 4$ e $2 \cdot 3$.

Con ciò non vogliamo già dire che, data una travatura reticolare piana in cui il numero a delle aste sia per esempio eguale a $2n + 2$, si possano riguardare come sovrabbondanti due *qualunque* delle sue aste.

La travatura di cui ci stiamo occupando si può, per esempio, anche ottenere aggiungendo le aste $B \cdot 1$ e $3 \cdot C$ a quella rappre-

sentata nella fig. 6: il lettore non avrà però dimenticato che la travatura della fig. 6, pur soddisfacendo alla condizione $a = 2n$, non possiede una configurazione definita: sarebbe pertanto in errore chi pensasse di assumere le due aste $B \cdot 1$ e $3 \cdot C$ come sovrabbondanti.

In un analogo errore cadrebbe chi riguardasse come sovrabbondanti le aste $B \cdot 1$ ed $1 \cdot 4$: la travatura, privata di esse, si riduce infatti a quella rappresentata in fig. 7 i cui nodi, per la singolarità segnalata a suo tempo, sono suscettibili di un movimento elementare di rotazione attorno ad O come centro.

A scanso di ogni equivoco noi ci limiteremo pertanto a ritenere come assodati i punti seguenti:

che, data una travatura reticolare piana costituita da n nodi e da $a = 2n + k$ aste, k di queste sono sempre sovrabbondanti;

che cioè si possono sempre trovare k aste suscettibili di essere sopprese senza che perciò la configurazione della travatura cessi di essere geometricamente definita;

che anzi ciò si può fare, generalmente, in più modi diversi.

**

V'è poi un altro punto che merita di essere tenuto ben presente per la più chiara comprensione di quel che verremo dicendo nel seguito.

Abbiamo infatti detto che le k aste sovrabbondanti collegano dei punti le cui posizioni relative sono già definite quando son date le lunghezze delle $a - k$ aste principali.

Ora da ciò segue subito che, mentre le lunghezze delle aste principali potevano, almeno entro certi limiti, assumersi ad arbitrio, quelle invece delle aste sovrabbondanti restano determinate in precedenza: esse devono infatti essere identicamente eguali alle distanze (perfettamente definite) dei punti che sono destinate a collegare; senza di che le aste stesse riuscirebbero incompatibili colle prime e la travatura non si potrebbe più costruire.

**

Tutto ciò premesso, noi diremo che una travatura reticolare piana è **liberamente dilatabile** quando alle sue varie aste si possono attribuire variazioni di lunghezza (dilatazioni) infinite.

sime affatto arbitrarie, valè a dire *indipendenti le une dalle altre*: in particolare, quando si può imprimere una dilatazione arbitraria, semprechè piccolissima, ad una qualunque delle sue aste, senza alterare per nulla le lunghezze delle rimanenti.

Ogniquale volta invece tra le dilatazioni infinitamente piccole che si possono attribuire alle a aste di una travatura, sussistono k relazioni le quali permettano di dedurre le dilatazioni di k aste da quelle delle rimanenti $a - k$, noi diremo che la travatura non è suscettibile che di $a - k$ dilatazioni distinte.

Ora questo accade di regola ogniquale volta

$$a > 2n$$

più precisamente se

$$a = 2n + k$$

In tal caso infatti, date ad arbitrio le lunghezze di $a - k$ aste, le posizioni degli n nodi nel piano restano completamente determinate, e con esse restano necessariamente determinate anche le lunghezze delle k aste rimanenti.

Dette

$$l_1, l_2, l_3, \dots, l_a$$

le lunghezze delle a aste, bisogna pertanto ammettere che, tra esse, sussistono k relazioni

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_1(l_1, l_2, l_3, \dots, l_a) &= 0 \\ \mathfrak{F}_2(l_1, l_2, l_3, \dots, l_a) &= 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathfrak{F}_k(l_1, l_2, l_3, \dots, l_a) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Supponiamo ora che alle diverse aste della travatura si attribuiscono delle variazioni di lunghezza (dilatazioni) infinitamente piccole

$$\delta l_1, \delta l_2, \delta l_3, \dots, \delta l_a$$

Tra le nuove lunghezze

$$l_1 + \delta l_1, l_2 + \delta l_2, l_3 + \delta l_3, \dots, l_a + \delta l_a$$

delle a aste della travatura, dovranno, a variazione di configurazione avvenuta, evidentemente sussistere k relazioni del tipo (5).

$l_1, l_2, \dots, l_{a-k}$

Ciò posto, è evidente che perchè questa travatura ammetta dei sistemi di spostamenti anormali dei nodi — vale a dire dei sistemi di spostamenti tali che ne risultino modificate le caratteristiche geometriche senza che siano variate le lunghezze delle aste — occorre e basta che si possano soddisfare le equazioni (10) con dei valori tutti nulli delle variazioni δl_i . In altre parole occorre e basta che si possano risolvere (con valori non tutti nulli delle incognite) quelle equazioni, private, per l'occasione, dei loro secondi membri

$$\left. \begin{aligned} B_{11}\delta z_1 + B_{12}\delta z_2 + \dots + B_{1,2n}\delta z_{2n} &= 0 \\ B_{21}\delta z_1 + B_{22}\delta z_2 + \dots + B_{2,2n}\delta z_{2n} &= 0 \\ . &. \\ B_{2n,1}\delta z_1 + B_{2n,2}\delta z_2 + \dots + B_{2n,2n}\delta z_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

In generale, il sistema così ottenuto non ammette che la soluzione, evidente,

$$\delta z_1 = 0, \delta z_2 = 0, \dots, \delta z_n = 0$$

la quale ci conferma quel che noi già sapevamo, che cioè una travatura come quella considerata non ammette, generalmente parlando, nessun sistema di spostamenti, neppure infinitamente piccoli, dei suoi nodi.

Ma ciò non è più vero se è nullo il determinante dei coefficienti. Allora infatti le $2n$ equazioni (11) si riducono, al più, a $2n - 1$.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che esse si riducano effettivamente a $2n - 1$ distinte, come avviene quando tra i minori del determinante ve n'è qualcuno diverso da zero.

È noto che in queste ipotesi risultano determinati i rapporti tra le variazioni δz_i per modo che, assunto ad arbitrio il valore di una qualunque di queste, si possono calcolare in conseguenza i valori di tutte le altre: ciò che sta evidentemente ad esprimere che esiste uno (ed un solo) sistema di spostamenti anormali dei nodi.

Se ora noi ritorniamo col pensiero alle equazioni complete (10) riguardandovi sempre le δz_i come incognite, e le pensiamo risolte rispetto a queste incognite, ci avvediamo subito che, quando il determinante dei coefficienti è nullo, alle incognite spettano valori infiniti (e quindi inaccettabili), eccezion fatta

soltanto per il caso in cui nella espressione di una delle incognite si annulli, oltre il denominatore, anche il numeratore, vale a dire il determinante ottenuto sostituendo alla colonna dei rispettivi coefficienti la colonna dei termini noti.

È facile convincersi che, perchè ciò avvenga, bisogna che sia verificata una certa relazione tra i coefficienti di quella colonna ed i termini noti, relazione che, a conti fatti, risulta lineare ed omogenea per rapporto alle δl_i , cioè del tipo

$$A_1 \delta l_1 + A_2 \delta l_2 + \dots + A_{a-k} \delta l_{a-k} = 0 \quad (12)$$

Se dunque esiste un sistema di spostamenti anormali dei nodi, le equazioni (10) non riescono tra loro compatibili se non nel caso che le varie dilatazioni attribuite alle diverse aste della travatura soddisfino alla (12); la quale viene così a costituire una relazione obbligata tra le dilatazioni: e poichè essa non può per certo rientrare nel numero delle k equazioni normali dipendenti dalla esistenza di aste sovrabbondanti, visto che non contiene neppure le dilatazioni di queste, resta dimostrata l'esistenza di una equazione anormale.

Resta a considerarsi il caso in cui il determinante dei coefficienti B_{ij} abbia una caratteristica inferiore a $2n - 1$; in cui cioè le equazioni (11), in luogo di ridursi a $2n - 1$ distinte, si riducono a sole $2n - h$; sappiamo già che è questo il caso in cui la travatura comporta h sistemi di spostamenti anormali distinti.

In questo caso si può dimostrare che le (10) si decompongono in due gruppi: l'uno costituito da h equazioni non contenenti alcuna delle incognite δz_i ed esprimenti per conseguenza delle condizioni a cui debbono soddisfare le dilatazioni δl_i ; il secondo gruppo, costituito dalle rimanenti $2n - h$ equazioni, contiene invece esplicitamente le incognite e permette perciò — semprechè le equazioni del primo gruppo siano soddisfatte — di esprimere $2n - h$ tra le $2n$ incognite in funzione delle h rimanenti e dei secondi membri delle equazioni.

Ora, le h equazioni costituenti il primo gruppo, lineari ed omogenee nelle δl_i , rappresentano precisamente le h equazioni anormali tra le dilatazioni la cui esistenza noi ci eravamo proposti di dimostrare.

*
*
*

Passiamo ora a dimostrare che, reciprocamente, tutte le volte che tra le dilatazioni delle aste di una travatura esistono h equazioni anormali, la travatura è suscettibile di h sistemi di spostamenti anormali distinti.

A tal fine il lettore vorrà tener presente che le equazioni (10) rappresentano indubbiamente le relazioni più generali che si possano scrivere tra le variazioni dei diversi elementi geometrici caratterizzanti la configurazione della travatura.

Le h equazioni anormali che si suppongono esistenti tra le dilatazioni delle aste non possono pertanto essere che dei casi particolari, o, per dirla più precisamente, delle conseguenze delle equazioni (10). Le quali si potranno allora scrivere sotto una forma tale che in h tra esse compaiano le sole dilatazioni, non le variazioni delle caratteristiche z_i .

Le (10) si potranno così distinguere in due gruppi; l'uno costituito dalle predette h equazioni lineari ed omogenee nelle δl_i , l'altro formato dalle rimanenti $2n - h$ relazioni tra le δz_i e le δl_i .

Ne segue che le equazioni (11), che si deducono dalle precedenti annullandovi le δl_i , si ridurranno, nel caso di cui ci stiamo occupando, a sole $2n - h$ equazioni lineari ed omogenee tra le $2n$ incognite δz_i ; ad esse si potrà soddisfare in ∞^h modi diversi, il che è quanto dire che la travatura ammette h sistemi di spostamenti anormali.

*
*
*

Vi è un modo molto sbrigativo ed al tempo stesso singolarmente intuitivo di riassumere quanto vi è di essenziale nella lunga e minuziosa disquisizione che, per amore di precisione, abbiamo quasi integralmente riportata dalla classica memoria del Lévy.

Ecco di che si tratta.

Consideriamo per un momento gli n nodi della travatura come altrettanti punti liberi di muoversi a volontà.

La posizione di ciascuno di essi nel piano dipende ovviamente da due parametri indipendenti (per es.: dalle sue due coordinate per rapporto ad una coppia di assi scelti ad arbitrio).

Ciò è quanto dire che agli n nodi si possono complessivamente imprimere $2n$ sistemi di spostamenti infinitesimi distinti: non uno di più, e non uno di meno.

Ora, tra questi sistemi di spostamenti devono naturalmente esser compresi tanto quelli che non alterano le lunghezze delle aste della travatura, come quelli che implicano delle variazioni (naturalmente infinitesime) di queste lunghezze.

Nella prima categoria noi abbiamo imparato a distinguere:

1° i sistemi di spostamenti normali che si verificano soltanto quando il numero delle aste è insufficiente a definire la configurazione della travatura;

2° i sistemi di spostamenti anormali che si possono verificare, sia pure eccezionalmente, cioè dipendentemente da posizioni singolari dei nodi, qualunque sia il numero delle aste.

La seconda categoria è invece completamente ed esclusivamente costituita da quelle che noi abbiamo dianzi chiamate col nome di dilatazioni.

È dunque lecito concludere che *la somma del numero dei sistemi di spostamenti distinti (così normali che anormali) e del numero delle dilatazioni distinte di cui una travatura reticolare piana contenente n nodi è suscettibile (tenuto conto di tutte le relazioni tanto normali come anormali fra loro esistenti) è sempre, SENZA ECCEZIONI, eguale a $2n$.*

*
*
*

Mettiamo al solito da parte, come estraneo ai fini del nostro studio, il caso delle travature che non hanno una configurazione definita: non vi saranno quindi più spostamenti normali possibili.

Allora, se la travatura non comporta spostamenti anormali, il numero delle dilatazioni distinte di cui essa è suscettibile resta senz'altro eguale a $2n$.

Se pertanto essa è dotata del solo numero di aste strettamente necessario

$$a = 2n$$

il numero delle dilatazioni distinte di cui essa è suscettibile risulta eguale al numero delle aste: essa è liberamente dilatabile.

Se invece essa possiede k aste sovrabbondanti

$$a = 2n + k$$

il numero delle dilatazioni distinte di cui è suscettibile resta eguale ad $a - k$, cioè al numero delle sue aste principali.

Nel caso poi in cui la travatura ammetta un certo numero h di spostamenti anormali, il numero delle sue dilatazioni distinte resta in conseguenza ridotto a $2n - h$.

Se pertanto essa non possiede aste sovrabbondanti, il numero delle dette dilatazioni distinte sarà $a - h$.

Se invece essa possiede k aste sovrabbondanti, quel numero si ridurrà ad $a - (k + h)$.
