TEORIA GENERALE
DELLE TRAVATURE RETICOLARI PIANE

I.

Premesse.

Per *travatura reticolare* si intenderà qui un complesso di n punti materiali, o *nodi*, collegati fra loro ed a dati punti fissi da un certo numero a di *aste*, in modo tale che, date le lunghezze delle singole aste, la configurazione dell'intiero sistema risulti completamente definita, sì che si possano, in funzione di quelle lunghezze, calcolare le coordinate di tutti i nodi.

Affinchè ciò avvenga occorre che tali aste soddisfino per numero e per disposizione ad alcune condizioni fondamentali, che si possono facilmente trovare con alcuni ragionamenti elementari che passiamo senz'altro ad esporre, limitando per ora il nostro studio al solo caso in cui il sistema è tutto contenuto in un piano.

***

Incominciamo coll'immaginare dato nel piano un sistema fisso di riferimento.

Un punto qualunque *1* del piano stesso può essere reso fisso alla sua volta mediante due aste rigide le quali lo colleghino a due punti generici A e B del sistema di riferimento (fig. 1).

Ciascuna di quelle due aste costituisce infatti per il punto *1* un vincolo che ne limita la mobilità, costringendolo a mantenersi sulla circonferenza che ha per centro il punto fisso a cui essa fa capo, e per raggio la lunghezza dell'asta.

Il punto *1* dovrà dunque necessariamente coincidere con una delle intersezioni delle due circonferenze a cui è vincolato ad appartenere, nè da una tale posizione potrà poi in modo alcuno scostarsi; ciò equivale a dire che nessun movimento è compatibile coll'esistenza simultanea dei due vincoli sopra accennati.

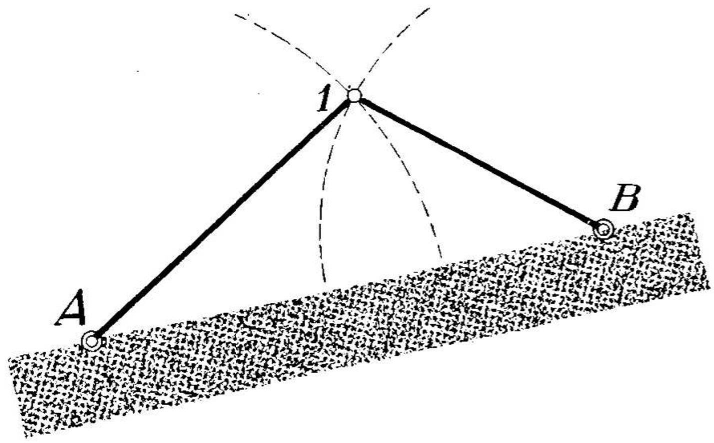

Fig. 1.

Abbiamo detto che i due punti A e B debbono essere scelti in posizione generica; con ciò intendiamo escludere l'eventualità che essi siano allineati col punto *1* (fig. 2): in tal caso,

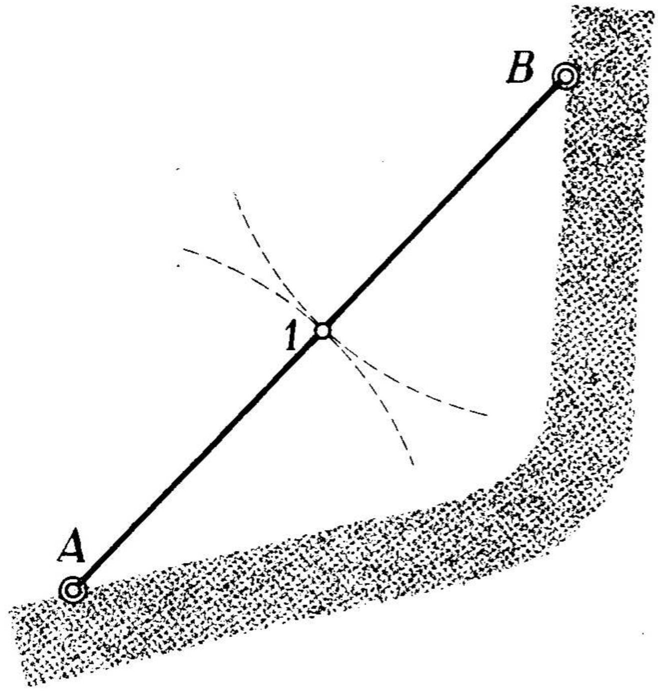

Fig. 2.

infatti, le due circonferenze riuscirebbero fra loro tangenti, e la posizione del punto *1* cesserebbe a rigore di essere definita, in quanto si potrebbe sempre immaginare di imprimergli un ulteriore moto *elementare* in direzione normale alla congiungente AB.

Prendiamo ora in considerazione un secondo punto *2* del piano, poi un terzo, e così via.

Per definire la posizione di ciascuno di essi occorrerà collegarlo, mediante due nuove aste rigide, a due punti fissi che — salva la riserva sopra espressa — potranno scegliersi ad arbitrio sia nel sistema fisso di riferimento, sia tra i nodi già considerati e resi fissi in precedenza (fig. 3).

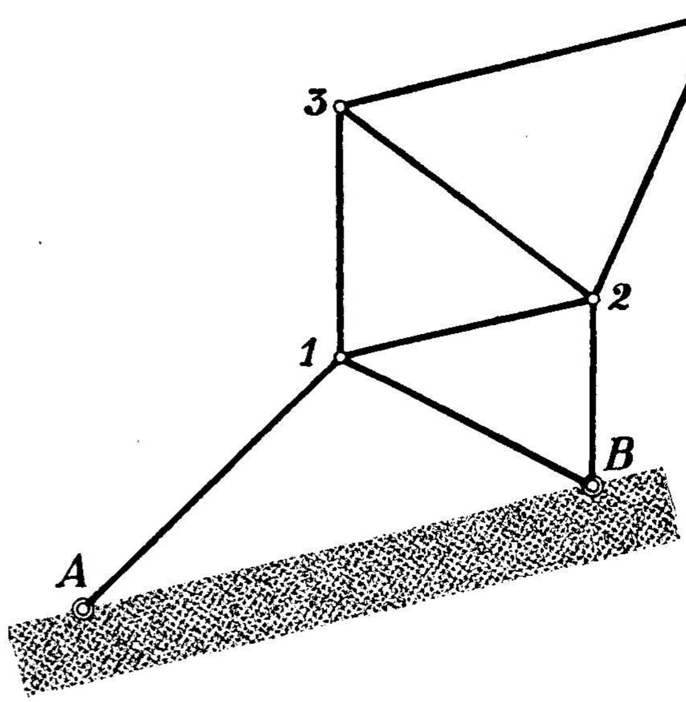

Fig. 3.

Così procedendo, si è condotti a concludere che, qualunque sia il numero n dei nodi che in definitiva costituiranno la travatura reticolare, il numero complessivo a delle sue aste dovrà essere *almeno* eguale a $2n$.

***

Avvertiamo subito che non tutte le travature reticolari che noi avremo occasione di prendere in esame nel seguito del nostro studio sono suscettibili di essere generate nel semplicissimo modo testè descritto; tutte possono però venir ricondotte a questo tipo fondamentale, oppure venir da esso ricavate, mediante opportune sostituzioni di aste.

Consideriamo, per fissar le idee, la travatura reticolare già rappresentata nella figura 3: è da presumersi, dopo ciò che abbiamo detto, che la sua configurazione cesserebbe immediatamente di essere definita se la si privasse di una qualunque delle sue aste; ciò può del resto riconoscersi direttamente ed assai facilmente se si esaminano uno per uno i singoli casi particolari a cui una tale ipotesi può dar luogo.

Si immagini, per esempio, tolta di posto l'asta $1 \cdot B$: è evidente che si viene con ciò a rendere possibile un moto rigido del quadrilatero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ con centro istantaneo di rotazione nel punto 0 in cui concorrono gli assi delle aste $A \cdot 1$ e $B \cdot 2$ (fig. 4).

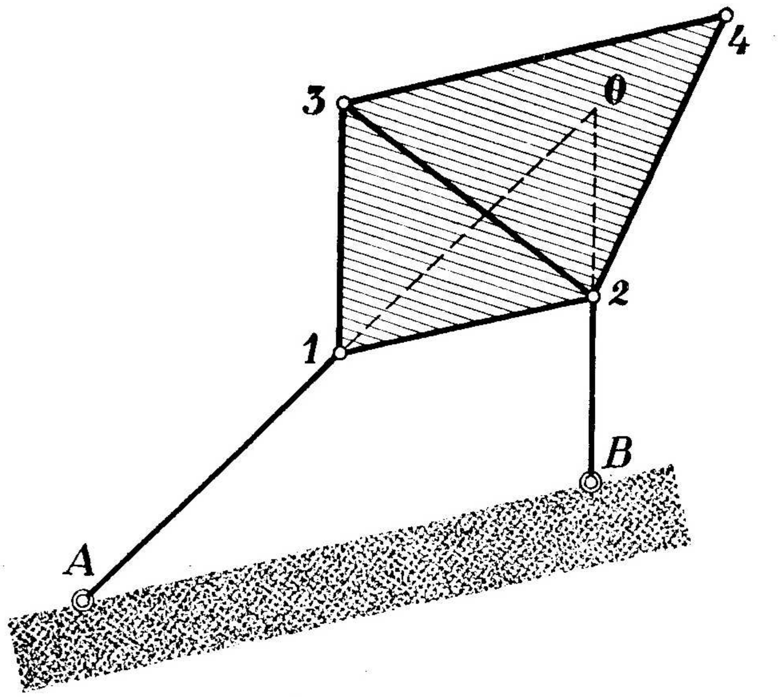

Fig. 4.

Ciò posto, è naturale chiedersi se per impedire un tale moto è proprio necessario ripristinare al suo posto quell'asta $1 \cdot B$ che abbiamo idealmente soppressa.

La risposta è ovviamente negativa.

Il moto rigido del quadrilatero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ attorno al punto 0 cessa infatti immediatamente di esser possibile non appena con una nuova asta rigida si provveda a collegare uno qualunque dei suoi nodi con un punto fisso generico, per esempio il nodo 4 col punto fisso B (fig. 5).

L'asta soppressa può così essere in infiniti modi sostituita; la nuova travatura cessa in generale di essere generabile nel

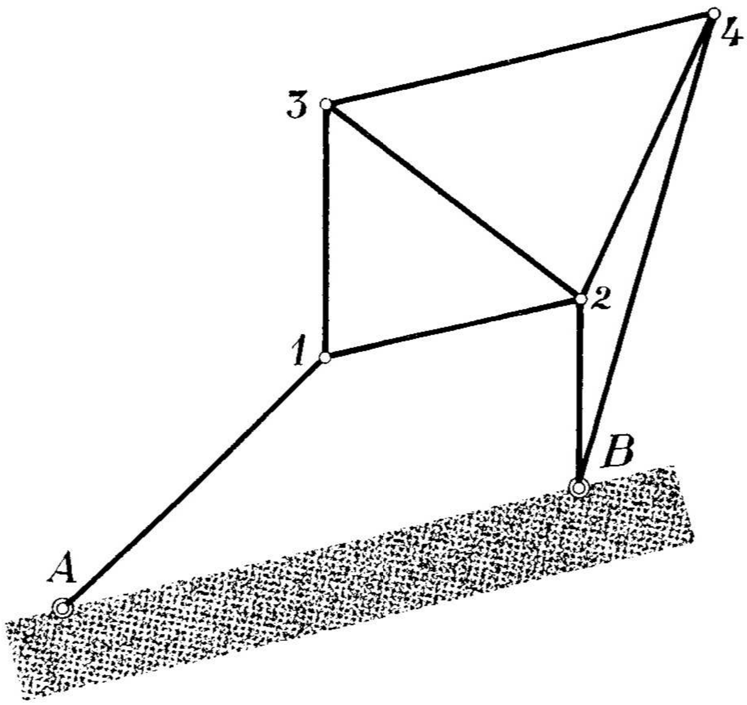

Fig. 5.

modo sopra descritto, ma la conclusione da noi tratta relativamente al numero *minimo* delle aste che debbono comporla continua in ogni caso ad essere verificata.

***

Qualche nuova riserva in merito alla disposizione delle aste è però da considerarsi come implicita in quel che siamo venuti dicendo.

Abbiamo infatti affermato che l'asta chiamata a sostituire la $1 \cdot B$ deve, come questa, collegare un nodo del quadrilatero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ ad un punto fisso; essa non potrebbe dunque limitarsi a collegare fra loro due nodi appartenenti entrambi al quadrilatero. Un'asta come la $1 \cdot 4$ (fig. 6) riescirebbe infatti superflua nella funzione di definire la distanza dei nodi 1 e 4 già rigidamente connessi dalle altre aste $1 \cdot 2$, $1 \cdot 3$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$, $3 \cdot 4$ del quadrilatero, e non potrebbe, d'altra parte, che partecipare senza opporvisi agli eventuali moti rigidi del quadrilatero stesso.

Abbiamo poi accennato che il punto fisso a cui la nuova asta fa capo deve essere scelto in posizione generica: ciò va

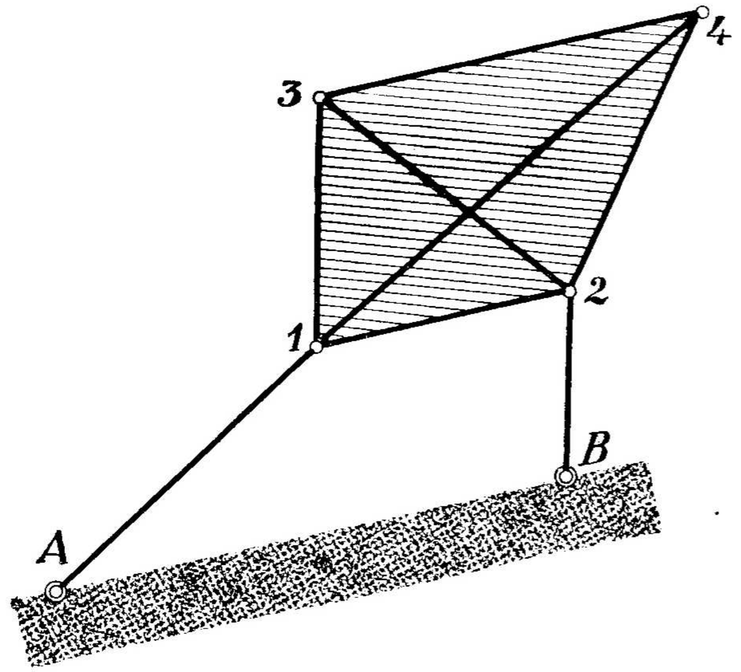

Fig. 6.

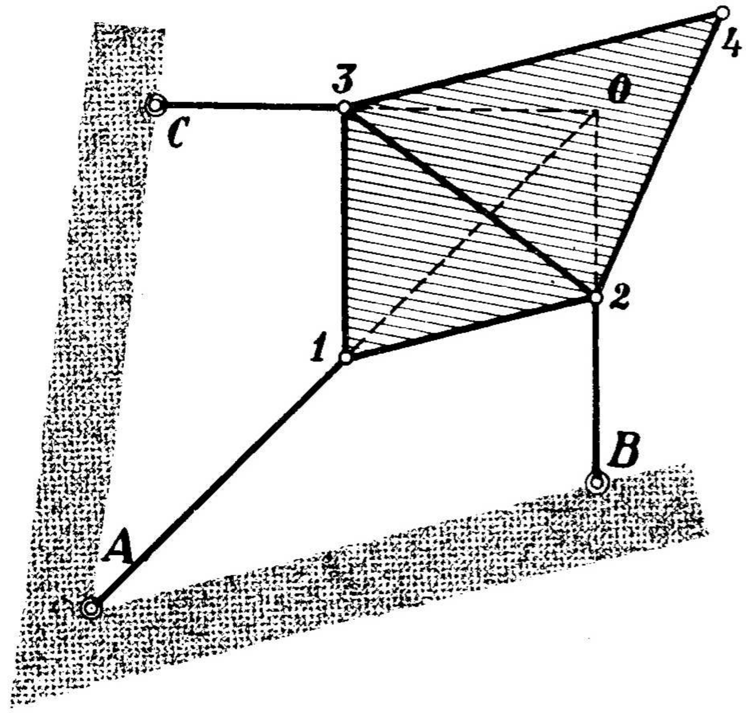

Fig. 7.

inteso nel senso che l'asse della nuova asta non deve passare per il punto *0*; ed invero se ciò avvenisse (fig. 7), un moto, sia pur soltanto elementare, del quadrilatero $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ attorno a 0 come centro non cesserebbe, a rigore, di essere effettuabile.

È del resto ben evidente che la posizione del nodo 1 nella travatura della fig. 7 non differisce sostanzialmente da quella caratterizzata in fig. 2, l'asta $1 \cdot B$ di quella figura essendo qui sostituita dall'insieme del quadrilatero rigido $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ e delle due aste di vincolo $2 \cdot B$ e $3 \cdot C$.

Si può da queste considerazioni trarre una conclusione di carattere generale, ed è questa: che, delle n aste che costituiscono la travatura reticolare, tre almeno — non concorrenti in un punto — devono far capo a punti del sistema fisso di riferimento.

***

Aste siffatte vengono abitualmente distinte col nome speciale di *aste di vincolo.*

La funzione loro non ha però nulla di sostanzialmente distinto da quella delle altre aste della travatura. Per convincersene basta nella solita travatura rappresentata nella figura 3

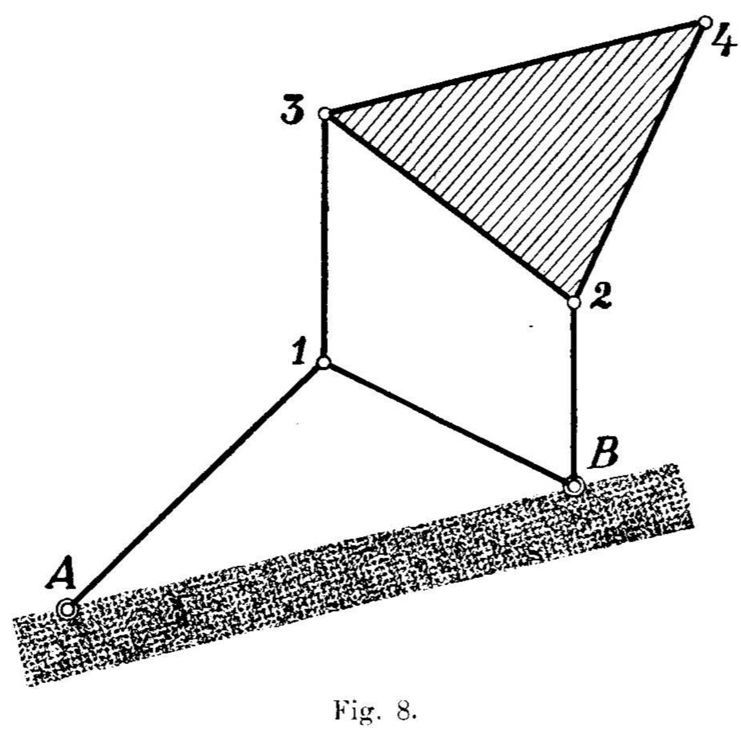

Fig. 8.

pensar soppressa una qualunque delle aste che collegano fra loro due nodi, per esempio la $1 \cdot 2$ (fig. 8); si vede subito che il nodo 1 resta rigidamente connesso al sistema fisso di riferimento, mentre il triangolo rigido $2 \cdot 3 \cdot 4$ diviene libero di muoversi: rispetto ad esso l'asta soppressa $1 \cdot 2$, insieme colle aste $1 \cdot 3$ e $B \cdot 2$,

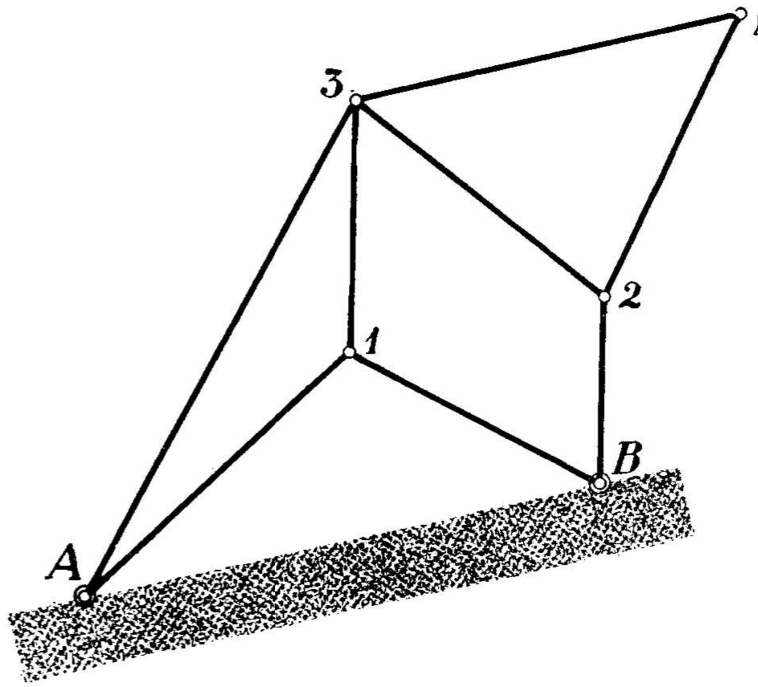

Fig. 9.

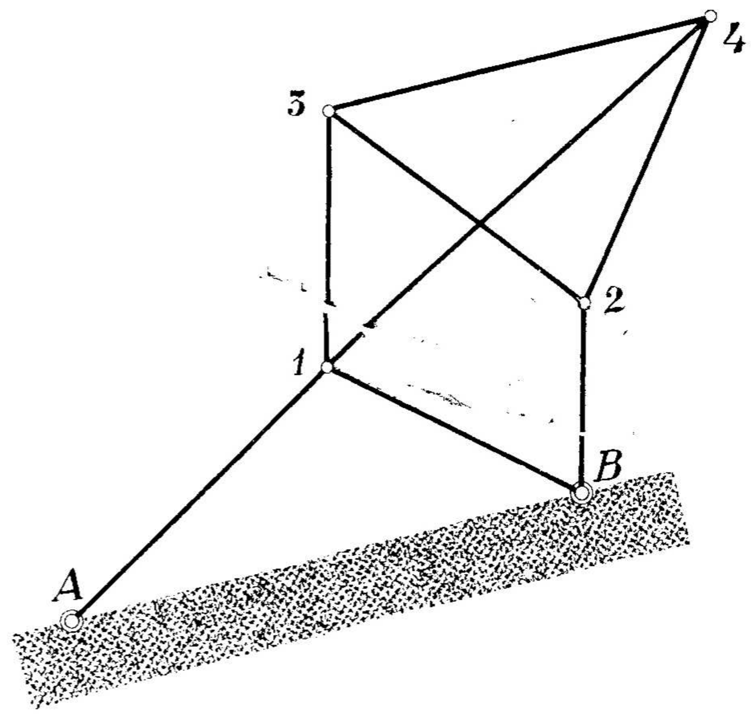

Fig. 10.

compiva adunque le funzioni di asta di vincolo; essa può quindi, subordinatamente a quelle stesse norme che per le aste di vincolo si sono enunciate nel precedente paragrafo, venire sostituita da una qualunque asta la quale colleghi uno dei nodi del triangolo con un punto fisso generico.

Ma, rispetto alla travatura data, presa nel suo complesso, una tale asta può essere una vera e propria asta di vincolo, come la $A \cdot 3$ (fig. 9), ovvero un'asta di semplice collegamento, come la $1 \cdot 4$ (fig. 10).

In questo senso — e ferma restando la riserva espressa nel precedente paragrafo — le aste di semplice collegamento e le aste di vincolo si possono, indifferentemente ed arbitrariamente, sostituire a vicenda.

***

Col moltiplicarsi delle sostituzioni i casi singolari che occorre evitare si rendono intanto sempre più numerosi e meno evidenti.

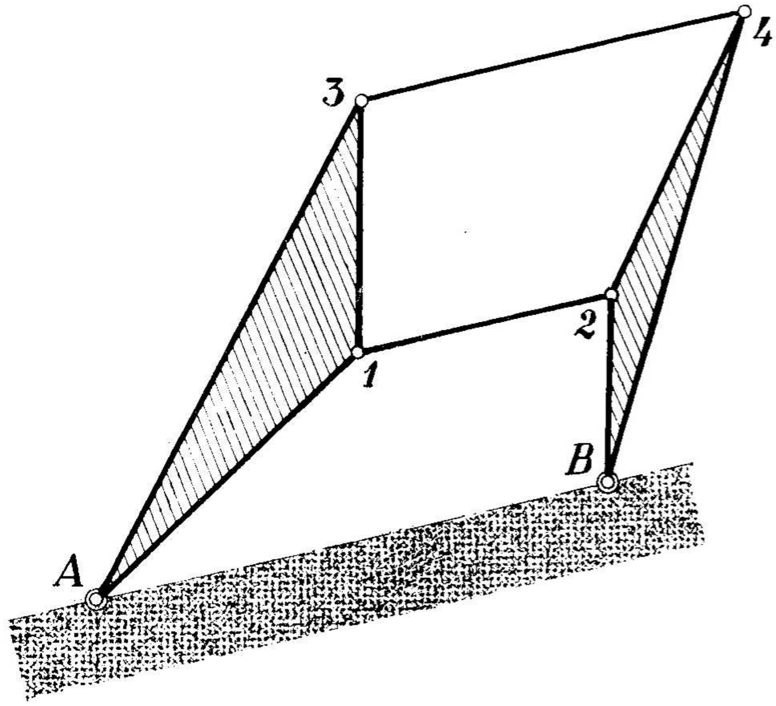

Fig 11.

Tanto per citare un esempio che è assai caratteristico, prendiamo in considerazione la travatura rappresentata nella fig. 5, e sostituiamo in essa l'asta $2 \cdot 3$ coll'asta $A \cdot 3$.

Una tale sostituzione, che sarebbe stata perfettamente lecita se operata sulla travatura rappresentata nella figura 3, conduce, nel caso attuale, ad una singolarità da evitarsi.

Ci si viene infatti a trovare in presenza di due triangoli rigidi $A \cdot 1 \cdot 3$ e $B \cdot 2 \cdot 4$ (fig. 11) girevoli rispettivamente attorno ai punti fissi A e B, e fra loro collegati dalle aste $1 \cdot 2$ e $3 \cdot 4$, parallele entrambe alla congiungente $A\,B$. Ora è intuitivo che tali aste non possono opporsi ad un moto relativo dei due triangoli, consistente in una traslazione elementare in direzione normale alla loro direzione comune, quale può ottenersi imprimendo ai triangoli stessi due rotazioni elementari di egual senso ed ampiezza attorno ai vertici fissi.

Il riconoscere a prima vista singolarità siffatte riesce sovente difficile, a volte addirittura impossibile: di qui la necessità di porsi da un punto di vista meno particolare, che consenta di accertare con assoluta generalità e sicurezza l'esistenza dei casi singolari anche più complessi e meno intuitivi.

***

Consideriamo a tal fine due nodi qualunque, r e t, fra loro collegati da un'asta la cui lunghezza, per ipotesi invariabile, denoteremo con l_{rt}.

Le coordinate x_r, y_r ed x_t, y_t di quei due nodi per rapporto ad una coppia di assi ortogonali connessa col sistema fisso di riferimento, devono verificare l'eguaglianza

$$(x_r - x_t)^2 + (y_r - y_t)^2 = l^2{}_{rt} \tag{1}$$

Immaginiamo impresso al nodo r uno spostamento elementare che lo faccia passare nella posizione vicinissima r' ed al nodo t uno spostamento pure elementare che lo faccia passare nella posizione vicinissima t' (fig. 12).

Dette dx_r, dy_r e dx_t, dy_t le componenti (secondo gli assi) dei due spostamenti rr' e tt' si deve avere

$$(x_r - x_t)(dx_r - dx_t) + (y_r - y_t)(dy_r - dy_t) = 0 \tag{2}$$

Come caso particolare si può considerare quello di un'asta di vincolo collegante un nodo s di coordinate x_s, y_s ad un punto del sistema fisso di riferimento le cui coordinate invariabili denoteremo con x_0, y_0 (fig. 13).

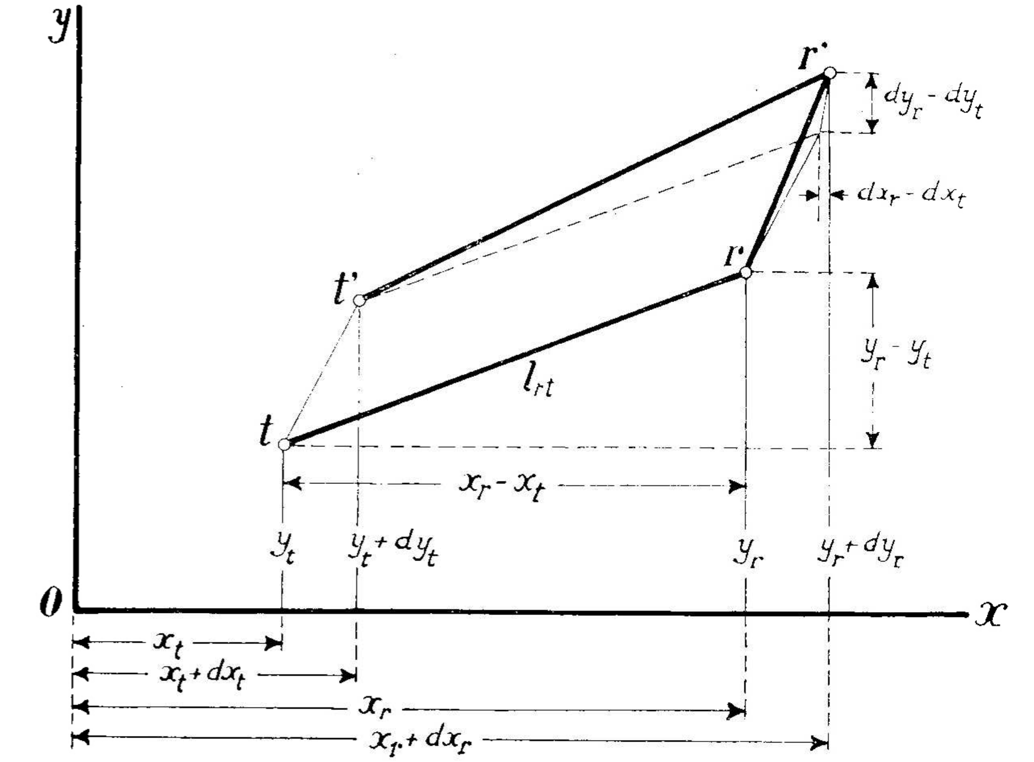
y
r'
dy_r - dy_t
dx_r - dx_t
t'
r
y_r - y_t
l_rt
t
x_r - x_t
y_t
y_t + dy_t
y_r
y_r + dy_r
0
x
x_t
x_t + dx_t
x_r
x_r + dx_r

Fig. 12.

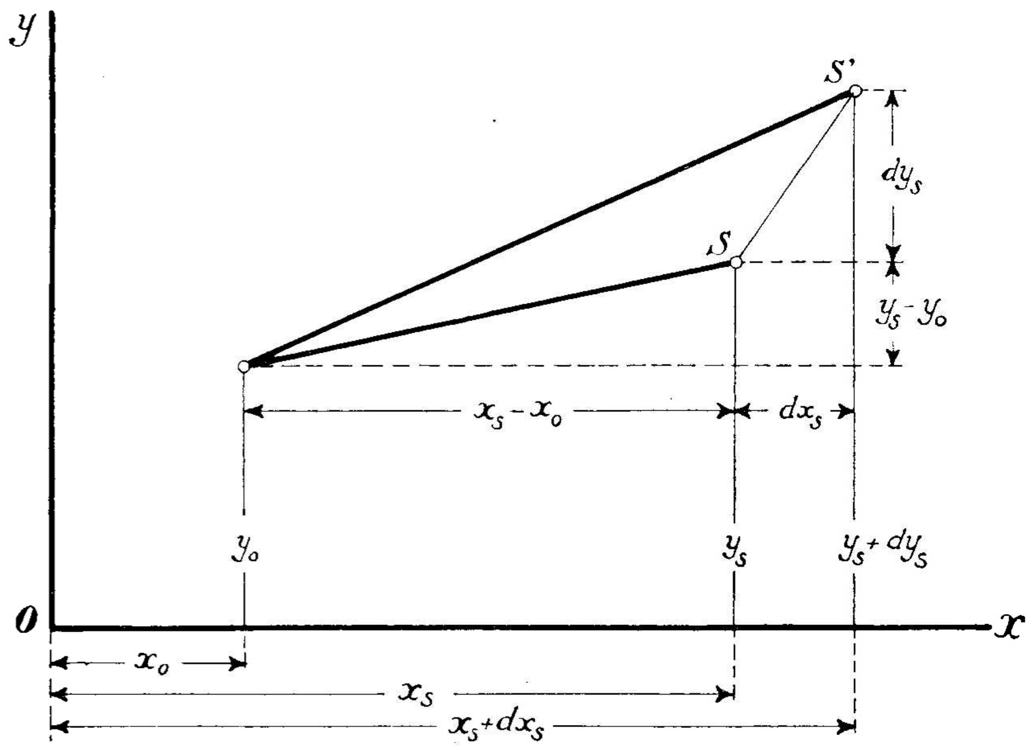
y
s'
dy_s
s
y_s - y_o
x_s - x_o
dx_s
y_o
y_s
y_s + dy_s
0
x
x_o
x_s
x_s + dx_s

Fig. 13.

Si avrà allora ovviamente

$$(x_s - x_0)\, dx_s + (y_s - y_0)\, dy_s = 0. \tag{2'}$$

Ciò posto, per una travatura reticolare costituita da n nodi e da a aste, colleganti quei nodi fra loro od a dati punti fissi, di equazioni come la (2) e come la (2') se ne possono evidentemente scrivere a; queste equazioni sono lineari ed omogenee nelle dx, dy, le quali sono in numero di $2n$.

Ora, dire che la configurazione del sistema deve essere completamente definita date che siano le lunghezze l_{rt}, equivale a dire che le dx, dy devono risultare tutte identicamente nulle. Il sistema delle (2) e (2') non dovrà cioè ammettere altra soluzione che quella, evidente:

$$dx_r = dy_r = dx_t = dy_t = \ldots = dx_s = dy_s = \ldots = 0$$

Ma perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che sia

$$a = 2n \tag{3}$$

e che il determinante formato coi coefficienti delle dx e delle dy sia diverso da zero.

***

Facciamo subito vedere che, nel caso in cui in un particolare nodo della travatura concorrano due sole aste (nodo semplice), quest'ultima condizione implica necessariamente la riserva che noi abbiamo espressa fin dal principio della nostra trattazione.

Sia infatti r il nodo in discorso, e siano u e v i soli nodi a cui esso sia direttamente collegato.

Nel sistema delle (2) vi saranno, fra le altre, le due equazioni relative alle due aste ru ed rv:

$$(x_r - x_u)(dx_r - dx_u) + (y_r - y_u)(dy_r - dy_u) = 0$$
$$(x_r - x_v)(dx_r - dx_v) + (y_r - y_v)(dy_r - dy_v) = 0$$

e saranno anzi queste le sole equazioni contenenti le dx_r, dy_r con coefficienti diversi da zero.

Nel determinante del sistema le due colonne composte con questi coefficienti di dx_r e di dy_r risulteranno quindi costituite nel modo seguente:

$$\begin{array}{cc}
0 & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 & 0 \\
x_r - x_u & y_r - y_u \\
x_r - x_v & y_r - y_v \\
0 & 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
0 & 0
\end{array}$$

Perchè un tale determinante risulti diverso da zero è intanto necessario escludere l'eventualità che si abbia:

$$\frac{x_r - x_u}{y_r - y_u} = \frac{x_r - x_v}{y_r - y_v}$$

cioè che i tre punti $u\,r\,v$ siano allineati.

***

Occorre appena avvertire che questo non è che un caso particolarissimo; escluso che esso sia, l'eventualità che si annulli il determinante di ordine a formato coi coefficienti delle dx, dy nelle equazioni (2) (2') può tuttavia presentarsi sotto svariatissime altre forme.

Dal punto di vista analitico il significato di una tale eventualità è ben noto: essa sta a provare che le (2) (2') non sono linearmente indipendenti, che cioè una almeno di esse può dedursi come conseguenza delle altre.

Supponiamo, per fissar le idee, che detto determinante abbia per caratteristica $a - 1$; ed immaginiamo di metter da parte una delle equazioni, scelta per modo che la matrice relativa alle $a - 1$ equazioni rimanenti continui ad aver $a - 1$ per caratteristica; queste $a - 1$ equazioni determinano notoriamente un sistema di valori non tutti nulli dei rapporti di $a - 1$ delle variabili alla rimanente; e nella eventualità prospettata questo sistema di valori soddisfa anche l'equazione messa in disparte.

Ora è naturale chiedersi quale singolarità geometrica si venga con ciò a caratterizzare.

È intanto chiaro che il mettere da parte una delle a equazioni di condizione equivale a prescindere dal vincolo che essa esprime, equivale cioè a pensare idealmente soppressa una delle aste del sistema: sia essa quella che collega il nodo r al nodo t.

Il fatto che le rimanenti $a - 1$ equazioni di condizione siano soddisfatte da un sistema di valori non tutti nulli dei rapporti di $a - 1$ delle variabili dx, dy alla rimanente, sta ad esprimere che, per l'avvenuta soppressione di un'asta, la travatura ha cessato di avere una configurazione definita.

Si può pertanto immaginare impressa al sistema una variazione elementare di configurazione, la quale riuscirà completamente determinata data che sia una delle componenti dello spostamento di uno dei nodi, o più generalmente un qualunque parametro linearmente connesso ad essa. In funzione di questo parametro arbitrario si potranno sempre determinare le componenti dx_r, dy_r, dx_t, dy_t degli spostamenti contemporaneamente subiti dai nodi r e t che nella data travatura erano collegati da quella particolare asta che noi abbiamo idealmente soppressa.

Dire che queste componenti soddisfano all'equazione messa in disparte:

$$\frac{dx_r - dx_t}{dy_r - dy_t} = \frac{y_r - y_t}{x_r - x_t}$$

equivale a dire che il vettore di componenti $dx_r - dx_t$ e $dy_r - dy_t$, che rappresenta lo spostamento relativo di r rispetto a t (fig. 12), è normale alla direzione della congiungente rt.

Ed è ben naturale che in questo caso la travatura data presenti un comportamento singolare, poichè la variazione elementare di configurazione che noi abbiamo resa possibile sopprimendo idealmente un'asta non muta la distanza dei due nodi che l'asta collegava, e continua quindi a restar possibile anche quando l'asta venga ripristinata nelle sue funzioni.

Per contro, tutte le volte che soppressa una data asta, ed impressa alla travatura — ridotta così a possedere un'asta di meno di ciò che la (3) richiede — una variazione di configurazione compatibile colla presenza di tutte le altre aste, o più generalmente di tutti i vincoli a cui i varî suoi nodi sono ancora soggetti, la distanza dei due nodi a cui l'asta soppressa faceva capo viene a mutare, si dovrà concludere che la considerata variazione di configurazione è incompatibile colla presenza di quell'asta, epperò è, nella travatura reticolare data, impossibile.

***

Ecco così tracciata una via sicura e generale ad un tempo, per decidere in ogni caso se la configurazione di una data travatura sia o non sia rigorosamente definita.

Riferiamoci, per fissar le idee, ad un caso concreto, per esempio alla travatura rappresentata nella figura 5, e riprendiamo l'ipotesi già fatta dianzi, che si venga in essa a sopprimere l'asta $2 \cdot 3$.

Poichè è fuor di dubbio che, in questa ipotesi, tutti o parte dei suoi nodi debbono diventar mobili, scegliamone uno il quale abbia presumibilmente a partecipare all'eventuale mutamento di configurazione, e sia tuttora soggetto a qualche vincolo facilmente interpretabile.

Scegliamo per esempio il nodo 1, a cui la presenza dell'asta di vincolo $A \cdot 1$ impone ovviamente di non scostarsi dal cerchio avente il centro in A.

Imprimiamo idealmente ad un tal nodo uno spostamento piccolissimo compatibile col detto vincolo: nel caso concreto uno spostamento piccolissimo in direzione normale alla direzione del raggio $A \cdot 1$.

E chiediamoci se un tale spostamento è compatibile cogli altri vincoli conservati, ed, in caso affermativo, quali spostamenti si debbono in conseguenza determinare negli altri nodi della travatura.

L'indagine si può effettuare molto speditamente per via grafica, se si conviene di rappresentare in disegno gli spostamenti mediante vettori uscenti tutti da una medesima origine O (fig. 14).

S'intende che, per essere utilmente rappresentabili in disegno, le grandezze degli spostamenti dovranno essere di tanto ingrandite da diventar finite. S'intende anche che un siffatto artificio non ci impedirà di trattar gli spostamenti stessi come infinitesimi, confondendo sistematicamente ogni rotazione di un nodo attorno ad un altro nodo con una traslazione del primo in direzione normale alla retta che lo congiunge col secondo.