PARTE TERZA

Il teorema di Menabrea. — Il teorema di Castigliano. — Il teorema di Betti. — Sistemi piani. — Il secondo principio di reciprocità. — Analisi dello stato naturale. — Teoria generale delle coazioni elastiche.

I.

Il teorema di Menabrea.

Riprendiamo ora la generalità di trattazione costantemente mantenuta in tutta la Parte Prima di questo volume, generalità a cui avevamo rinunciato solo transitoriamente per potere, nella Parte Seconda, svolgere a fondo l'analisi di alcuni problemi particolari.

E ritorniamo all'ipotesi che il solido sia dotato di proprietà elastiche arbitrariamente definite punto per punto: nè meno arbitrarie siano la sua forma, i suoi vincoli e le forze esterne che tendono a deformarlo.

Incominceremo col ritenere perfettamente definito il suo stato naturale, nè ci preoccuperemo quindi, per ora, della ricerca delle tensioni interne proprie di questo stato, tensioni che considereremo momentaneamente come date.

E ci occuperemo subito della ricerca delle nuove tensioni che nel solido si generano sotto l'azione di date forze esterne ad esso applicate.

Alla soluzione di questo problema noi siamo, per verità, già giunti mediante l'applicazione del principio dei lavori virtuali: abbiamo infatti preso in considerazione il sistema nel suo stato incognito di equilibrio ed abbiamo imposta l'eguaglianza tra il lavoro delle forze esterne e la variazione prima dell'energia potenziale per qualsiasi deformazione virtuale, cioè congruente e compatibile, oltrechè piccolissima.

E siamo così pervenuti alle equazioni indefinite (35) ed ai limiti (36), equazioni che in ultima analisi abbiamo riconosciuto esprimere nè più nè meno che le condizioni necessarie e sufficienti perchè sussista l'equilibrio tra le forze esterne e le tensioni interne applicate ad ogni particella elementare del solido.

Queste equazioni, prese isolatamente, potrebbero nella maggior parte dei casi essere soddisfatte da infiniti sistemi di tensioni interne, sistemi che diremo perciò *equilibrati*: la soluzione del problema dell'equilibrio riesce determinata in quanto ad ogni sistema di componenti speciali di tensione corrisponde, per le (34), un sistema perfettamente definito di componenti della deformazione, le quali debbono rappresentare uno stato *possibile* del solido, vale a dire debbono potersi ottenere dalle componenti di deformazione relative allo stato naturale mediante una variazione di configurazione congruente e compatibile coi vincoli.

Se si intendono le cose a questo modo il teorema dell'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico si può esprimere dicendo che *esiste sempre uno ed un solo stato di deformazione di un corpo elastico dato, soggetto a forze esterne ed a vincoli pure dati, che sia ad un tempo possibile ed equilibrato.*

E le equazioni indefinite ed ai limiti trovate e discusse nella Parte Prima di questo volume determinano la soluzione di tale problema in quanto sono atte a *caratterizzare l'unico stato di deformazione equilibrato fra gli infiniti possibili.*

Ora è intuitivo che si deve poter giungere alla stessa soluzione anche *ricercando l'unico stato di deformazione possibile fra tutti gli equilibrati.*

Questo procedimento, la cui discussione formerà oggetto delle pagine che seguono, è forse meno spontaneo del primo, in quanto manca di rispondenza nella realtà fisica del problema: esso può però in certi casi presentare sul primo una indiscutibile superiorità dal punto di vista analitico.

* * *

Dal momento che noi vogliamo ora prendere in considerazione tutti quegli stati del solido, pei quali il sistema delle componenti speciali di tensione risulta equilibrato, è chiaro che ci converrà per caratterizzarli assumere senz'altro come variabili le sei funzioni

$$\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}, \ \tau_{xy}$$

Similmente, ed in conformità a quanto si è detto a pag. 74, ci converrà scrivere l'energia potenziale elastica sotto la forma

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x, \ \sigma_y, \ \sigma_z, \ \tau_{yz}, \ \tau_{zx}, \ \tau_{xy})\, dV$$

Naturalmente quest'energia sarà sempre la somma di due parti ben distinte, l'energia vincolata

$$\Phi_0 = \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_0,\ (\sigma_y)_0,\ (\sigma_z)_0,\ (\tau_{yz})_0,\ (\tau_{zx})_0,\ (\tau_{xy})_0\Big)\, dV$$

ed il lavoro di deformazione

$$\Phi_1 = \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_1,\ (\sigma_y)_1,\ (\sigma_z)_1,\ (\tau_{yz})_1,\ (\tau_{zx})_1,\ (\tau_{xy})_1\Big)\, dV$$

funzioni rispettivamente soltanto delle sei componenti speciali di tensione

$$(\sigma_x)_0,\ (\sigma_y)_0,\ \ldots\ (\tau_{xy})_0$$

preesistenti nello stato naturale del solido, e di quelle

$$(\sigma_x)_1,\ (\sigma_y)_1,\ \ldots\ (\tau_{xy})_1$$

che alle prime si sovrappongono nell'atto in cui il solido si deforma sotto l'azione del dato sistema di forze esterne.

Ciò posto, consideriamo il dato solido elastico nel suo stato, generalmente incognito, di equilibrio sotto l'azione delle date forze esterne: e proponiamoci di determinare quale variazione subirebbe la funzione Φ_1 qualora si attribuissero idealmente alle tensioni interne ed alle reazioni di vincolo certe variazioni in virtù delel quali, dallo stato attuale, per ipotesi possibile ed equilibrato, del corpo, si passasse ad un nuovo stato ideale ancora equilibrato per quanto non più possibile.

Immaginiamo perciò che le componenti generiche delle reazioni di vincolo

$$R_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$R_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} + \nu \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$R_z = \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} + \nu \frac{\partial h}{\partial z}$$

divengano rispettivamente

$$R_x + \delta R_x = (\lambda + \delta\lambda)\frac{\partial f}{\partial x} + (\mu + \delta\mu)\frac{\partial g}{\partial x} + (\nu + \delta\nu)\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$R_y + \delta R_y = (\lambda + \delta\lambda)\frac{\partial f}{\partial y} + (\mu + \delta\mu)\frac{\partial g}{\partial y} + (\nu + \delta\nu)\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$R_z + \delta R_z = (\lambda + \delta\lambda)\frac{\partial f}{\partial z} + (\mu + \delta\mu)\frac{\partial g}{\partial z} + (\nu + \delta\nu)\frac{\partial h}{\partial z}$$

mediante l'aggiunta ideale di certi incrementi piccolissimi

$$\left.\begin{aligned}\delta R_x &= \delta\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\mu\frac{\partial g}{\partial x} + \delta\nu\frac{\partial h}{\partial x}\\ \delta R_y &= \delta\lambda\frac{\partial f}{\partial y} + \delta\mu\frac{\partial g}{\partial y} + \delta\nu\frac{\partial h}{\partial y}\\ \delta R_z &= \delta\lambda\frac{\partial f}{\partial z} + \delta\mu\frac{\partial g}{\partial z} + \delta\nu\frac{\partial h}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (101)$$

e che, contemporaneamente, le componenti speciali di tensione

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy}$$

subiscano certe variazioni, pure piccolissime,

$$\delta\sigma_x,\ \delta\sigma_y,\ \delta\sigma_z,\ \delta\tau_{yz},\ \delta\tau_{zx},\ \delta\tau_{xy}$$

e tali che le

$$\sigma_x + \delta\sigma_x,\quad \sigma_y + \delta\sigma_y,\quad \sigma_z + \delta\sigma_z$$

$$\tau_{yz} + \delta\tau_{yz},\quad \tau_{zx} + \delta\tau_{zx},\quad \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}$$

unitamente alle nuove reazioni di vincolo, continuino a soddisfare a quelle medesime equazioni indefinite ed ai limiti che erano soddisfatte nello stato di equilibrio da cui siamo partiti.

Per il che occorre e basta che si abbia identicamente

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} &= 0\\ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (102)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\sigma_z \cos(n,x) + \delta\tau_{xy}\cos(n,y) + \delta\tau_{zx}\cos(n,z) + \delta R_x = 0\\
&\delta\tau_{xy}\cos(n,x) + \delta\sigma_y \cos(n,y) + \delta\tau_{yz}\cos(n,z) + \delta R_y = 0\\
&\delta\tau_{zx}\cos(n,x) + \delta\tau_{yz}\cos(n,y) + \delta\sigma_z \cos(n,z) + \delta R_z = 0
\end{aligned}\right\}\quad(103)$$

rispettivamente in tutto lo spazio V e su tutta la superficie S.

Per effetto di una tale variazione dello stato di tensione del corpo, il lavoro di deformazione, inizialmente misurato da

$$\Phi_1 = \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_1,\ (\sigma_y)_1,\ (\sigma_z)_1,\ (\tau_{yz})_1,\ (\tau_{zx})_1,\ (\tau_{xy})_1\Big)\, dV$$

dovrebbe assumere il nuovo valore

$$\int_V \varphi\Big((\sigma_x)_1 + \delta\sigma_x,\ (\sigma_y)_1 + \delta\sigma_y,\ \dots (\tau_{xy})_1 + \delta\tau_{xy}\Big)\, dV =$$

$$= \int_V \varphi\Big((\sigma_x)_1,\ (\sigma_y)_1,\ \dots (\tau_{xy})_1\Big) dV +$$

$$+ \int_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x}\right)_1 \delta\sigma_x + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y}\right)_1 \delta\sigma_y + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}}\right)_1 \delta\tau_{xy}\right] dV +$$

$$+ \int_V \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2}\right)_1 \delta\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x\,\partial\sigma_y}\right)_1 \delta\sigma_x\delta\sigma_y + \dots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2}\right)_1 \delta\tau_{xy}^2\right] dV$$

onde la variazione da esso subita ci si presenta come la somma di un gruppo di termini del primo ordine

$$\int_V \Big[(\varepsilon_x)_1 \delta\sigma_x + (\varepsilon_y)_1 \delta\sigma_y + \dots + (\gamma_{xy})_1 \delta\tau_{xy}\Big]\, dV$$

che indicheremo brevemente, come d'uso, con $\delta\Phi_1$, e di un gruppo di termini del secondo ordine, trascurabile di fronte al primo, e del resto sempre positivo perchè eguale a

$$\int_V \varphi(\delta\sigma_x,\ \delta\sigma_y,\ \dots \delta\tau_{xy})\, dV$$

Ricorrendo a formole di trasformazione ormai note, si ha

$$\int_V (\varepsilon_x)_1 \delta\sigma_x \, dV = \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x \, dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x} (u\,\delta\sigma_x)\, dV - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV =$$

$$= - \int_S u\,\delta\sigma_x \cos(n, x)\, dS - \int_V u \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} dV$$

Similmente

$$\int_V (\gamma_{yz})_1 \delta\tau_{yz}\, dV = \int_V \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \delta\tau_{yz}\, dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial y}(w\,\delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(v\,\delta\tau_{yz})\right] dV -$$

$$- \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] dV =$$

$$= - \int_S \left[w\,\delta\tau_{yz} \cos(n, y) + v\,\delta\tau_{yz} \cos(n, z)\right] dS -$$

$$- \int_V \left[w \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] dV$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe ed ordinando, si ottiene

$$\delta\Phi_1 = - \int_V \left\{ \left[\frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z}\right] u + \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z}\right] v +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z}\right] w \right\} dV -$$

$$- \int_S \left\{ \left[\delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{zx} \cos(n, z)\right] u + \right.$$

$$+ \left[\delta\tau_{xy} \cos(n, x) + \partial\sigma_y \cos(n, y) + \delta\tau_{yz} \cos(n, z)\right] v +$$

$$\left. + \left[\delta\tau_{zx} \cos(n, x) + \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + \delta\sigma_z \cos(n, z)\right] w \right\} dS$$

o più semplicemente, tenendo presenti le (102), (103) e le (101)

$$\begin{aligned}\delta \Phi_1 &= \int_S \left\{ \delta R_x u + \delta R_y v + \delta R_z w \right\} dS = \\ &= \int_S \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w \right) \delta \lambda + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w \right) \delta \mu + \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w \right) \delta \nu \right\} dS\end{aligned}$$

in cui le espressioni entro parentesi tonde son tutte nulle perchè le u, v, w, componenti di spostamento nella deformazione realmente subìta dal corpo, debbono soddisfare alle equazioni di compatibilità (9).

L'equazione a cui si è così condotti

$$\delta \Phi_1 = 0 \tag{104}$$

è quella stessa a cui soddisfano i massimi ed i minimi della funzione Φ_1: se pertanto si tiene presente ciò che si è detto poc'anzi a proposito del segno della variazione seconda di questa funzione, si può senz'altro concludere che: *tra tutte le configurazioni equilibrate, l'unica possibile è quella per cui la funzione* Φ_1, *che abbiamo chiamata lavoro di deformazione, è minima.*

***

In questa proposizione, annunciata per la prima volta dal Menabrea alla R. Accademia delle Scienze di Torino nel 1857 sotto il nome di *principio di elasticità* o *del minimo lavoro*, noi abbiamo conservato il nome di lavoro di deformazione alla funzione Φ_1 sebbene, quando non si tratta di una deformazione possibile del corpo ma soltanto di una variazione ideale del suo stato interno di tensione, essa Φ_1 non ha più tale significato fisico nè può riguardarsi come atta a misurare, colle sue variazioni, le variazioni dell'energia potenziale elastica del sistema.

All'espressione *lavoro di deformazione* dovrà perciò qui attribuirsi soltanto un significato astratto di somma ideale delle energie elastiche dei singoli elementi del corpo considerati come indipendenti.

Tutto al più si potrà attribuire, nelle applicazioni, un significato fisico più concreto alla funzione Φ_1, immaginando il sistema convenientemente liberato da certi vincoli ovvero alterato mediante tagli nel suo grado di connessione o addirittura diviso in un numero più o meno grande di parti, e considerando delle variazioni corrispondenti a deformazioni possibili di ciascuna parte presa separatamente, sebbene non compatibili fra loro: con ciò Φ_1 verrà a rappresentare la somma delle energie elastiche possedute dalle singole parti riguardate come indipendenti.

Si è però soltanto quando queste singole parti deformate possono essere insieme connesse in modo da ricostituire in un unico complesso il solido dato (in un qualsiasi suo stato possibile di deformazione), che quella somma può venire interpretata come la misura dell'energia potenziale elastica accumulata nel corpo per effetto della deformazione.

In altre parole, è sempre soltanto nella configurazione di equilibrio, unica possibile fra tutte le considerate configurazioni equilibrate, che Φ_1 rappresenta un vero e proprio lavoro di deformazione del solido dato preso nel suo insieme.

Il teorema di Menabrea dovrebbe perciò a rigore enunciarsi dicendo che: *tra tutte le distribuzioni equilibrate di tensioni interne e di reazioni di vincolo, quella che corrisponde allo stato di equilibrio è quella che rende minima la funzione Φ_1: il valore minimo di questa funzione è allora precisamente eguale al lavoro di deformazione del sistema.*

È però invalso l'uso di enunciare più brevemente questo teorema affermando che la distribuzione delle tensioni interne e delle reazioni di vincolo in un corpo elastico in equilibrio *è quella che rende il lavoro di deformazione minimo compatibilmente colle forze esterne date.*

Sotto questa forma esso ha dato luogo alle più strane controversie: in realtà la proposizione sarebbe affatto priva di significato qualora si intendesse parlare del lavoro di deformazione propriamente detto, relativo cioè ai soli stati possibili del solido che si considera: perchè di tali stati uno solo è in equilibrio colle date forze esterne (proprio quello che si tratta di individuare), epperò, non essendovene altri, non avrebbe senso parlare di minimo del lavoro di deformazione compatibilmente colle forze esterne date.

La proposizione vuole, per riacquistare il suo significato, essere riferita alle deformazioni non congruenti o almeno non compatibili coi vincoli, deformazioni che nulla ci impedisce di scegliere compatibili (cioè in equilibrio) colle date forze esterne, e per le quali la funzione Φ_1 può ancora, come si è già detto, essere definita, se non come un vero e proprio lavoro di deformazione del solido dato, almeno come la somma dei lavori di deformazione delle singole sue parti considerate come indipendenti.

Così inteso, questo teorema fa utile riscontro al principio dei lavori virtuali. Abbiamo visto che l'applicazione di questo principio conduce in sostanza a scrivere le condizioni necessarie e sufficienti perchè una configurazione possibile del corpo dato sia in equilibrio sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne.

Possiamo prevedere fin d'ora che il teorema di Menabrea, che prende in esame le configurazioni equilibrate, e determina la soluzione del problema dell'equilibrio elastico per esclusione di tutte le configurazioni non possibili, deve compendiare in sè le condizioni di coerenza e di compatibililà coi vincoli.

Ne segue che i due procedimenti sono completamente e perfettamente distinti (contrariamente a quanto si è da qualche autore affermato), benchè valevoli entrambi a caratterizzare, sotto un diverso punto di vista, lo stesso stato di equilibrio.

Nè si creda che, perchè si viene a risolvere sempre lo stesso problema, non si debba sperare, in ultima analisi, alcun vantaggio dall'uso dell'uno piuttosto che dell'altro procedimento: il considerare invero il lavoro di deformazione, come testè abbiamo fatto, espresso in funzione delle tensioni interne, ed il caratterizzare la configurazione risolvente per mezzo delle proprietà di questa funzione, ha se non altro il vantaggio di condurci direttamente alla ricerca della effettiva distribuzione delle tensioni, e, se occorre, delle reazioni di vincolo, senza il previo calcolo della deformazione subìta dal corpo, cioè senza far intervenire le funzioni u, v, w.

Il che è di non lieve importanza nello studio di molti dei problemi della scienza delle costruzioni, laddove non sempre interessa conoscere le caratteristiche della deformazione; in realtà è precisamente lo stato di tensione interna che l'ingegnere prende più volentieri in esame quando vuol farsi un'idea del grado di sicurezza con cui il materiale resistente può sopportare l'azione di un dato sistema di forze esterne.

***

È facile rendersi conto del modo con cui il teorema di Menabrea può venire utilmente applicato nei problemi della pratica.

Incominciamo infatti coll'osservare che, come nell'applicazione del teorema dei lavori virtuali non è necessario prendere in considerazione tutte le configurazioni possibili del sistema, ma ci si può limitare a qualche classe particolare di esse se si prevede che vi sia compresa la configurazione di equilibrio cercata, così anche nell'applicazione del teorema di Menabrea non è *a priori* indispensabile prendere in esame tutte le configurazioni equilibrate del solido che si vuol studiare; chè anzi, se si riesce in qualche modo a precisare che la cercata configurazione di equilibrio deve appartenere ad una data classe di configurazioni equilibrate, si possono senz'altro escludere da ogni ulteriore studio tutte le configurazioni ad essa classe estranee, limitandosi a cercare nell'ambito più ristretto di essa la soluzione del problema.

È poi facile constatare che la soluzione stessa può farsi dipendere dalla risoluzione di un semplice sistema di r equazioni lineari fra r incognite, sempre quando la suddetta classe di configurazioni equilibrate goda della proprietà che si possano riferire le singole configurazioni che ad essa appartengono ai singoli sistemi di valori di r parametri indipendenti

$$X_1, \quad X_2, \ldots \quad X_r$$

biunivocamente e linearmente, cioè in modo tale che le tensioni interne e le reazioni di vincolo, ad esse configurazioni relative, possano riguardarsi come funzioni lineari di quegli r parametri; i quali, per la impossibilità in cui si trovano di venir determinati in base alle sole leggi della statica, prendono allora il nome di *incognite iperstatiche* del problema.

Ed invero, in questa ipotesi, il ricercare quella tra le infinite configurazioni della classe considerata, che soddisfa al teorema di Menabrea, significa procedere alla ricerca di quei valori degli r parametri incogniti che rendono minima la funzione Φ_1, la quale, nella sua qualità di funzione quadratica ed omogenea delle

$$(\sigma_x)_1, \quad (\sigma_y)_1, \ldots \quad (\tau_{xy})_1,$$

può evidentemente essere anche considerata come una funzione, certo quadratica, per quanto in generale non più omogenea, dei suddetti r parametri X_1, $X_2, \ldots X_r$.

I valori di questi parametri che caratterizzano la cercata configurazione di equilibrio risultano in conseguenza determinati in modo unico dal sistema di r equazioni

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} = 0 \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial X_r} = 0 \tag{105}$$

certamente lineari (non omogenee) nelle r incognite iperstatiche.

*
* *

Riferiamoci, per fissar meglio le nostre idee, ad un caso concreto, e prendiamo in esame un solido a cui siano applicabili le considerazioni svolte nell'ultimo capitolo della Parte Seconda, come potrebb'essere ad esempio una trave ad arco di quelle che si usano nella costruzione dei ponti.

Noi sappiamo che fino a che tale trave si considera semplicemente incastrata in corrispondenza di una delle sue basi, e del resto libera da ogni altro vincolo, le sole leggi della statica dei corpi rigidi bastano a definire, in funzione delle forze esterne date, le sei caratteristiche della sollecitazione relativa ad una qualunque sua sezione retta.

Ma se il solido è soggetto a qualche vincolo sovrabbondante, se per esempio anche l'altra base della trave viene come la prima incastrata, allora quelle caratteristiche divengono staticamente indeterminate.

È d'altronde fuor di dubbio che basterebbe praticare nella trave un taglio, per esempio secondo una sua sezione retta arbitraria, il quale dividesse il sistema in due parti fra loro indipendenti, per ripristinare immediatamente la determinazione statica del problema.

Si vuol dire con ciò che le caratteristiche della sollecitazione relativa ad una sezione retta generica della trave data si possono sempre esprimere per mezzo delle sole equazioni generali della statica in funzione delle forze esterne e delle caratteristiche del sistema di tensioni che nello stato di equilibrio si trasmettono attraverso il taglio.

La determinazione di queste ultime caratteristiche è adunque in questo caso condizione necessaria e sufficiente per la successiva applicazione di quei procedimenti mediante i quali abbiamo visto che si può giungere ad una soluzione, a seconda dei casi più o meno approssimata, del problema dell'equilibrio elastico.

D'altra parte è ben evidente che le configurazioni che si verrebbero a definire facendo variare in tutti i modi possibili i valori di queste caratteristiche — ed ammettendo che da una parte e dall'altra del taglio l'equilibrio si stabilisca secondo le leggi note — costituiscono una classe di configurazioni equilibrate alla quale appartiene indubbiamente la configurazione di equilibrio cercata.

Si può adunque applicare il teorema di Menabrea assumendo le dette caratteristiche per incognite iperstatiche.

Basterà scrivere il lavoro di deformazione nel modo indicato a pag. 221; nell'ipotesi del sistema piano e sollecitato a deformarsi nel suo piano, si giungerà così ad un'espressione della forma (99)

$$\Phi_1 = \int_s \frac{\mathcal{N}_s^2\, ds}{2EA} + \int_s \frac{\mathcal{M}_s^2\, ds}{2EJ} + \int_s t\, \frac{\mathcal{T}_s^2\, ds}{2GA}$$

nella quale ad $\mathcal{N}_s$, $\mathcal{M}_s$ e $\mathcal{T}_s$ non annetteremo (per semplicità di scrittura) gli indici *uno* come a rigore si dovrebbe fare, restando però ben inteso che esse si dovranno considerare come funzioni soltanto delle forze esterne date e delle incognite iperstatiche che dalle dette forze esterne traggono origine.

Operando le derivazioni indicate nelle (105) si otterranno immediatamente delle equazioni della forma:

$$\int_s \frac{\mathcal{N}_s}{EA}\frac{\partial \mathcal{N}_s}{\partial X_i}\,ds + \int_s \frac{\mathcal{M}_s}{EJ}\frac{\partial \mathcal{M}_s}{\partial X_i}\,ds + \int_s t\,\frac{\mathcal{T}_s}{GA}\frac{\partial \mathcal{T}_s}{\partial X_i}\,ds = 0 \qquad (106)$$

Ma le $\mathcal{N}_s$, $\mathcal{M}_s$ e $\mathcal{T}_s$ sono lineari tanto nelle forze esterne come nelle incognite X; le loro derivate parziali rispetto a queste incognite sono quindi delle costanti.

Le equazioni come la (106) saranno dunque lineari e non omogenee rispetto alle X, e poichè son tante quante sono le X stesse, ammetteranno una soluzione in ogni caso unica e ben determinata.