Prof. Ing. GUSTAVO COLONNETTI
della R. Scuola di Ingegneria di Torino

PRINCIPII
DI
DINAMICA

Seconda edizione riveduta ed accresciuta

5/4/'50

Con 80 figure nel testo

TORINO
UNIONE TIPOGRAFICO-EDITRICE TORINESE
(già fratelli Pomba Librai in Principio della Contrada di Pò - 1796)
1929-VII

Questi “**Principii di dinamica**” *ch'io pubblicai per la prima volta nel 1921 e che ora ripubblico — con qualche aggiunta e non pochi ritocchi — sono stati pensati e raccolti ad uso degli studenti della Regia Scuola di Ingegneria di Torino ai quali insegno i primi elementi della Meccanica.*

Chi si accinge a leggere queste pagine non si attenda di trovarvi cose nuove, nè molte.

Convinto della necessità di non sovraccaricare di lavoro i miei giovani allievi, convinto sopratutto della utilità dell'insegnar loro poco *per ottenere che quel* poco *lo meditino, lo comprendano e lo apprendano* bene, *di una cosa sola io mi son preoccupato, ed è di metter bene in evidenza nella mia esposizione le idee fondamentali e di raccogliere attorno alla enunciazione di queste tutto ciò che può servire a chiarirne il significato, a mostrarne l'intima essenza, a precisarne la portata, a prevederne le applicazioni.*

Come già nei “**Fondamenti della Statica**” (1) *cui questo volume logicamente fa seguito, ho fatto ben poco posto agli sviluppi analitici, limitandomi a quelli soli che sono strettamente indispensabili per stabilire le formole di uso più comune; ho dato per contro un più ampio respiro ai cenni storici e specialmente ai riferimenti all'intuizione ed all'esperienza cui spetta tanta parte nel primo affermarsi delle nostre conoscenze.*

Mi sono valso perciò, non solo dei classici della Meccanica, ma anche di alcuni Autori i cui scritti non appartengono tanto alla letteratura didattica, qual'è generalmente intesa, quanto alla critica.

Tra le opere cui ho più largamente e sistematicamente attinto ve ne sono anzi alcune che è doveroso ed opportuno ch'io segnali

---

(1) G. Colonnetti, *I fondamenti della Statica*, Torino, U. T. E. T., 1927.

fin d'ora, sia perchè mi preme di dare a ciascuno il suo, sia perchè mi piace che il lettore desideroso di approfondir le questioni sappia subito a quali opere può, a parer mio, più utilmente rivolgersi.

Citerò dunque, per la parte storico-critica, oltre al trattato classico del MACH (1), *la ben documentata raccolta del* JOUGUET (2), *e poi un interessantissimo corso di conferenze del* BOUASSE (3), *nonchè un volumetto, modesto di dimensioni ma ricco di idee, del* LECORNU (4).

Nell'impostazione analitica delle teorie generali ho seguiti, a seconda dei casi, i corsi di Meccanica dell' APPELL (5), *del* LECORNU (6), *del nostro* LEVI CIVITA (7), *nonchè quello, pubblicato in litografia, del mio antico Maestro, il* MORERA (8).

Finalmente per l'applicazione ai problemi pratici, e sopratutto per i riferimenti dell'esperienza, mi sono sovente riferito alle opere, sempre dense di acute ed istruttive osservazioni, di uno dei più originali fisici del tempo nostro, il BOUASSE (9).

La mia fu dunque, più che altro, opera di compilazione; ma se i miei allievi, leggendo queste pagine, si sentiranno invogliati ad andare a cercar nei trattati di maggior mole l'ulteriore sviluppo degli argomenti qui appena accennati, quest'opera per quanto modesta non sarà stata compiuta invano.

Torino, maggio 1929.

G. COLONNETTI

---

(1) E. MACH, *La Mécanique, exposé hystorique et critique de son développement*, trad. franc. di E. Bertrand, Paris 1904.

(2) E. JOUGUET, *Lectures de Mécanique; la Mécanique enseignée par les auteurs originaux*, Paris 1908-09.

(3) H. BOUASSE, *Introduction à l'étude des théories de la Mécanique*, Paris 1895.

(4) L. LECORNU, *La Mécanique, les idées et les faits*, Paris 1918.

(5) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, Paris 1909-11.

(6) L. LECORNU, *Cours de Mécanique professé à l'École polytechnique*, Paris 1914-15.

(7) T. LEVI CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, Bologna 1923-27.

(8) G. MORERA, *Lezioni di Meccanica razionale* (litogr.), Torino 1903-04.

(9) H. BOUASSE, *Cours de Mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave. — *Dinamique générale*, Paris, Delagrave, 1923. — *Gyroscopes et projectiles*, Paris, Delagrave, 1923.

PREMESSE

Lo studio della " ***dinamica*** „ cioè della *scienza in cui si compendiano le leggi del movimento dei corpi naturali* presuppone quello della geometria.

Vi sono anzi alcuni capitoli della geometria che altro non sono se non delle vere e proprie premesse alla meccanica in generale, e in modo particolare alla dinamica: tali sono la *geometria delle masse*, la *teoria degli spostamenti* e, in un certo senso, anche la *cinematica* o *geometria del movimento*.

È necessario che noi precisiamo bene nella nostra mente i limiti di queste diverse branche della scienza ed i loro mutui rapporti di interdipendenza: è opportuno che noi ci soffermiamo per un momento su quei punti fondamentali di esse a cui nel seguito dovremo fare più frequente ricorso.

***

Si dice che un corpo è in movimento quando muta la sua posizione nello spazio. Lo studio dei movimenti dei corpi implica dunque necessariamente la conoscenza dello " ***spazio*** „ e delle sue proprietà: implica cioè, come dicevamo dianzi, la conoscenza della geometria.

Però la geometria considera notoriamente la figura dei corpi come un ente astratto ed ideale di cui studia la forma, le dimensioni, la posizione, prescindendo completamente dalla loro costituzione fisica, vale a dire dalla "***materia***" di cui i corpi naturali son costituiti.

Ora non è affatto necessario per studiar le leggi del movimento dei corpi naturali addentrarci in disquisizioni sulla materia, sulla sua vera natura, sul concetto che noi ce ne possiamo formare: ma è indispensabile — e lo vedremo a suo tempo — introdurre questo concetto ed adottare un modo di misura, anche semplicemente quantitativa, della materia contenuta in un corpo. Ciò si fa attribuendo a ciascuna figura geometrica una grandezza scalare che prende il nome di *massa*.

Orbene il complesso di tutte le questioni nelle quali, oltre ai concetti geometrici interviene anche il concetto di massa, può essere studiato prescindendo completamente dalla ragione e dal significato fisico di questa nuova grandezza, e costituisce quella che abbiamo poc'anzi chiamata la geometria delle masse.

Veniamo ora allo studio dei movimenti dei corpi, cioè dei loro mutamenti di posizione nello spazio.

È intuitivo che anche qui si potrà, in un certo senso anzi si dovrà, procedere per gradi.

In un primo tempo ci converrà studiare quei movimenti da un punto di vista esclusivamente geometrico: ci converrà cioè studiare le posizioni successive dei corpi nello spazio, avendo riguardo ai soli elementi geometrici che le definiscono, e prescindendo completamente da tutti quegli altri elementi che possono essere in giuoco nel fenomeno fisico, per esempio dal tempo che un dato corpo impiega per passare da una ad un'altra data posizione. Ecco così definito quel capitolo della geometria che prende il nome di teoria degli spostamenti.

Introduciamo invece la nozione di "***tempo***": mettiamoci cioè a studiare i mutamenti di posizione dei corpi nello spazio avendo il dovuto riguardo al tempo impiegato: in una parola passiamo dallo studio degli spostamenti a quello dei movimenti propriamente detti: ed ecco la geometria del movimento o cinematica.

V'è chi la considera già come un capitolo della meccanica: in realtà è ancor della geometria e niente più che della geometria: si può infatti dire della nozione di tempo qualche cosa di simile a ciò che si è detto della nozione di massa: non è cioè necessario, nell'introdurla, mettere in conto la sua natura fisica, a noi del resto affatto sconosciuta: basta considerare il tempo come una quarta variabile indipendente aggiunta alle tre coordinate di ciascun punto dello spazio; o, se lo si preferisce, basta considerare le tre coordinate di ciascun punto materiale come funzioni di un quarto parametro indipendente.

Nel dominio della meccanica propriamente detta, vale a dire della meccanica considerata come una scienza fisica, non si entra fin che ci si limita all'analisi geometrica del movimento, a descrivere cioè il fenomeno fissandone le leggi nello spazio e nel tempo: si entra solo quando si incomincia a chiedersi quale sia l'intimo meccanismo a cui esso obbedisce, quali siano i rapporti di causa ad effetto che lo determinano.

Ora per rispondere a simili interrogativi, per approfondire il problema del movimento dei corpi naturali rendendosi ragione — per quel tanto almeno che ci è consentito dai limiti insuperabili della nostra conoscenza — delle circostanze determinanti da cui il movimento dipende ed a cui obbedisce, bisogna, accanto ai concetti di spazio, di materia e di tempo, introdurre ancora un concetto nuovo: quello di "*forza*".

A questo punto incomincia la dinamica.

Ma prima di iniziarne lo studio ricordiamo brevemente i più importanti e caratteristici teoremi di quei tre capitoli della scienza che tra la geometria e la dinamica formano come un naturale e graduale ponte di passaggio.

La geometria delle masse.

A ciascun punto materiale è annessa una grandezza scalare *positiva* che si chiama la sua massa.

Consideriamo un insieme qualunque di punti materiali siffatti. Scelta nello spazio un'origine O affatto arbitraria, consideriamo tutti i vettori che da tale origine vanno ai diversi punti dati: immaginiamo moltiplicato ciascuno di questi vettori per la massa del punto a cui esso fa capo: di tutti i nuovi vettori così ottenuti costruiamo la risultante e dividiamola per la somma delle masse. Il vettore che così si ottiene parte naturalmente esso pure da O e fa capo ad un certo punto G dello spazio la cui posizione dipende bensì dalle posizioni dei punti materiali dati e dalle grandezze delle loro masse, ma non dipende dalla particolare scelta di O: è cioè sempre lo stesso qualunque sia la posizione dell'origine adottata per costruirlo.

Questo punto G prende il nome di *centro di massa* o più comunemente di *centro di gravità* o *baricentro.*

È qui il luogo di dichiarare che la prima denominazione, per quanto meno diffusa, è assai più propria della seconda: questa si riconnette infatti al modo di agire delle forze di gravità nella ipotesi — praticamente molto importante sebbene assai particolare — che le forze stesse possano ritenersi tutte parallele, come accade fin che si studiano dei sistemi di punti di dimensioni molto piccole a fronte delle dimensioni del globo terrestre. Tuttavia l'uso è invalso di designare il centro di massa col nome di centro di gravità, e noi ci atterremo all'uso senza per altro annettere alla denominazione alcun particolare valore di richiamo al problema fisico a cui essa si riferisce.

Alla teoria dei centri di gravità si riconnette strettamente un altro capitolo della geometria delle masse, il quale prende il nome di teoria dei *momenti statici* (o momenti del primo ordine).

Si dice momento statico di un sistema di punti materiali per rapporto ad un punto, ad una retta o ad un piano dato, la somma dei prodotti delle singole masse di quei punti materiali per le rispettive distanze dal punto, dalla retta o dal piano considerato.

Ciò posto, dalla definizione stessa di centro di gravità segue immediatamente che il momento statico si può anche e più semplicemente ottenere se, invece di considerar le singole masse dei singoli punti dati, si considera la somma di esse (massa totale del sistema) concentrata tutta nel centro di gravità.

Segue ancora che il momento statico di un sistema di punti materiali è identicamente nullo per rapporto al suo centro di gravità, o ad una retta o ad un piano passante per esso: che il centro di gravità è anzi il solo punto dello spazio per cui valga tale proprietà, della quale ci si potrà quindi senz'altro servire vuoi per definirlo, vuoi per costruirlo.

Facciamo un altro passo innanzi: consideriamo la somma dei prodotti delle masse dei diversi punti materiali del sistema per i quadrati delle rispettive distanze da un punto, da una retta o da un piano dato: tale somma prende il nome di *momento d'inerzia* (momento del second'ordine) del sistema per rapporto al punto, alla retta od al piano considerato.

La teoria dei momenti d'inerzia trova innumerevoli ed importanti applicazioni nei più diversi campi della meccanica. Altrove si parlerà delle sue applicazioni allo studio della resistenza dei materiali. In dinamica essa costituisce l'indispensabile presupposto di ogni ricerca relativa ai moti di rotazione: è allora il momento d'inerzia per rapporto ad una retta (asse di rotazione) quello che più interessa.

Orbene si può facilmente dimostrare che il momento d'inerzia di un sistema materiale per rapporto ad una retta qualunque dello spazio è sempre eguale al momento d'inerzia dello stesso sistema per rapporto alla retta parallela condotta pel suo centro di gravità, accresciuto del prodotto della massa totale del sistema per il quadrato della distanza delle due rette.

Ma questo prodotto (per la supposta positività della massa) è certamente sempre positivo: il momento d'inerzia di un sistema materiale per rapporto ad una retta qualunque dello spazio è quindi sempre maggiore del momento d'inerzia dello stesso sistema per rapporto alla retta parallela condotta per il suo centro di gravità.

Il centro di gravità è quindi anche quel punto dello spazio pel quale passa quella fra tutte le rette di un sistema di parallele ad una direzione qualunque, per rapporto a cui il momento d'inerzia è minimo.

Altra proprietà essenziale: se si considerano tutte le rette uscenti da un medesimo punto dello spazio, e su ciascuna di esse si porta a partir da tal punto un vettore di grandezza proporzionale all'inverso della radice quadrata del momento d'inerzia corrispondente, il luogo delle estremità di questi vettori è un ellissoide che prende il nome di ellissoide d'inerzia relativo al punto considerato. I suoi tre assi definiscono tre direzioni mutuamente ortogonali che si chiamano direzioni principali (o assi principali) d'inerzia relativi a quel punto.

Se il punto considerato coincide col centro di gravità del sistema, gli assi principali assumono più particolarmente il nome di assi centrali.

La conoscenza dei tre assi centrali e dei tre momenti d'inerzia ad essi relativi (insieme con quella, s'intende, della massa totale) basta da sola a definire completamente e nel modo più semplice il momento d'inerzia del sistema per rapporto a qualunque retta dello spazio.

La teoria degli spostamenti.

Consideriamo due diverse posizioni di un medesimo corpo materiale o, più semplicemente, di una medesima figura geometrica; ed, in esse, le due posizioni P, P' di uno stesso punto.

Se si congiunge la posizione iniziale P alla posizione finale P' si ottiene quello che, per definizione, si conviene di chiamare col nome di " ***spostamento*** " di quel punto.

Si dice poi spostamento della figura data l'insieme degli spostamenti di tutti i suoi punti.

Giova incominciar collo studio di qualche caso molto particolare.

Un primo caso, ovviamente il più semplice di tutti, si ottiene se si suppone che gli spostamenti di tutti i punti della figura siano tutti paralleli, rivolti nello stesso senso e di egual grandezza, o, come si dice comunemente, siano equipollenti. Lo spostamento della figura prende allora il nome di " ***traslazione*** ".

Un secondo caso, meno semplice ma non meno importante del primo, si ottiene invece supponendo che restino fissi tutti i punti di una retta, attorno alla quale tutti gli altri punti della figura ruotino di un medesimo angolo nel medesimo senso.

Lo spostamento della figura prende in questo caso il nome di " ***rotazione*** ".

A rotazione avvenuta ciascun punto viene a trovarsi sopra una circonferenza passante per la sua posizione iniziale, giacente in un piano normale alla retta fissa (asse di rotazione) ed avente sulla retta stessa il suo centro, ad una distanza angolare dalla posizione iniziale che è la stessa per tutti i punti e che si può pertanto assumere come misura della grandezza della rotazione.

Orbene a questi due casi particolari, traslazione e rotazione, o ad una loro combinazione, si possono facilmente ridurre tutti gli *spostamenti rigidi* di una figura nello spazio, tutti cioè quegli spostamenti che essa figura può subire senza che si alterino le distanze mutue dei suoi punti, in una parola senza che mutino nè la sua forma nè le sue dimensioni.

Si può infatti dimostrare che se, nello spostamento generico che si vuol considerare, vi è un punto che rimane fisso, ve ne sono sempre infiniti altri, allineati su di una retta uscente da esso: allora lo spostamento si può realizzare mediante una semplice rotazione attorno a tale retta come asse.

Se invece lo spostamento che si vuol considerare non comporta alcun punto fisso si prenderà in considerazione un certo punto arbitrario della figura le cui posizioni, iniziale e finale, indicheremo al solito rispettivamente con P e P'.

Se si immagina impressa alla figura una traslazione equipollente allo spostamento PP' di tale punto, si viene ad ottenere una posizione intermedia di essa dalla quale si potrà poi passare alla sua posizione finale mediante un secondo spostamento, per rapporto al quale il punto prescelto va evidentemente riguardato come fisso: secondo spostamento che si deve dunque poter realizzare mediante una rotazione attorno ad un asse uscente da quel punto.

Occorre appena osservare che questa decomposizione di uno spostamento rigido qualunque in una traslazione ed in una rotazione si può fare in infiniti modi diversi in relazione alle differenti scelte possibili del punto di cui si è parlato.

Ed è interessante sapere che di questo elemento di arbitrarietà si può trarre profitto per ottenere che tra traslazione e rotazione interceda qualche particolare relazione: per ottenere in particolare che l'asse di rotazione riesca parallelo alla traslazione.

Se ne può concludere che le due posizioni iniziale e finale di una medesima figura hanno sempre una retta omologa in comune: che vi è cioè sempre una retta che si può far passare dalla posizione iniziale alla posizione finale facendola semplicemente scorrere su sè stessa; e che lo spostamento in discorso si può quindi sempre realizzare mediante uno *spostamento elicoidale* che ha questa retta per asse.

La geometria del movimento.

Consideriamo un punto qualunque P di un corpo in movimento, e lo spostamento PP' che esso punto subisce durante un intervallo piccolissimo di tempo dt.

Dividiamo il vettore PP' per dt.

Al tendere di dt verso zero, questo nuovo vettore tende generalmente verso un limite che si chiama " ***velocità*** „ del punto P nell'istante considerato.

La velocità è pertanto un vettore che ha per direzione la direzione limite dello spostamento (la direzione cioè della tangente alla traiettoria descritta dal punto considerato) e per grandezza il valore limite del rapporto tra lo spazio percorso ds ed il tempo dt impiegato a percorrerlo:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Sia ora Q un punto vicinissimo a P sulla traiettoria testè menzionata; e precisamente sia Q la nuova posizione che il solito punto P viene ad assumere dopo un intervallo di tempo piccolissimo Δt.

Consideriamo la variazione che subisce la velocità nel passaggio da P a Q, vale a dire il vettore che bisogna sommare geometricamente alla velocità in P per ottenere la velocità in Q.

Dividiamo anche questa volta pel tempo Δt.

Al tendere di Δt verso zero, anche questo vettore tende, generalmente, verso un limite: a tale limite si dà il nome di " ***accelerazione*** „ del punto P nell'istante considerato.

L'accelerazione è pertanto un vettore che ha per direzione la direzione limite della vàriazione di velocità, e per grandezza il valore limite del rapporto tra detta variazione di velocità ed il tempo impiegato ad effettuarla.

Se, a partire da un'origine arbitrariamente scelta, si immagina condotto un vettore equipollente alla velocità del punto P, al muoversi di questo punto sulla sua traiettoria l'estremità del vettore si muove alla sua volta (*moto odografo*) con una velocità che è in ogni istante precisamente equipollente all'accelerazione di P.

Dal fatto che tanto la velocità che l'accelerazione sono dei vettori, e quindi si possono geometricamente comporre e decomporre come i vettori, discende subito che l'accelerazione si può sempre ottenere come la risultante delle accelerazioni definite per mezzo delle componenti delle velocità.

Ora, assunti ad arbitrio tre assi coordinati ortogonali di riferimento x, y, z, le tre componenti della velocità v secondo gli stessi, si possono immediatamente scrivere sotto la forma:

$$\frac{dx}{dt}\,, \quad \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dz}{dt}$$

Ne segue che le tre componenti dell'accelerazione secondo gli stessi assi saranno:

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2}\,, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

Questo modo di rappresentazione del vettore accelerazione ha naturalmente il difetto — comune a tutti i metodi di calcolo proprii della geometria analitica — di far intervenire nella soluzione del problema del movimento degli elementi come gli assi fissi di riferimento che, in generale, sono affatto estranei al problema stesso.

Giova perciò talvolta riferire il vettore accelerazione ad assi che siano in qualche modo connessi col movimento che si sta studiando.

In realtà, qualunque sia la forma della traiettoria descritta dal punto P, vi sono sempre, in ciascun istante, tre direzioni mutuamente ortogonali che meritano di essere tenute presenti, e sono:

1) la direzione della tangente;

2) la direzione della normale principale, cioè della normale alla traiettoria che sta nel piano osculatore e passa pel centro di curvatura;

3) la direzione della binormale, cioè della perpendicolare al piano osculatore.

L'accelerazione, secondo la sua stessa definizione, deve sempre esser contenuta nel piano determinato da due tangenti successive, cioè nel piano osculatore. La sua componente secondo la binormale deve dunque sempre essere identicamente nulla.

Si dimostra poi:

1) che la componente dell'accelerazione secondo la tangente alla traiettoria (*accelerazione tangenziale*) è eguale al valore algebrico della derivata della velocità per rapporto al tempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

2) che la sua componente secondo la normale principale ha per valore il quadrato della velocità diviso per il raggio r di curvatura:

$$\frac{v^2}{r}$$

ed è sempre diretta verso il centro di curvatura. Di qui il suo nome di *accelerazione centripeta.*

* * *

Stabiliti questi elementi caratteristici del movimento di un punto, si può passare allo studio dei movimenti d'assieme di un sistema di punti: particolarmente interessante, sia per la sua semplicità, sia per l'importanza delle sue applicazioni, è il caso del *corpo rigido*, del corpo cioè che si muove nello spazio senza mutare di forma nè di dimensioni.

In analogia a quanto già si è detto nella teoria degli spostamenti, giova incominciar lo studio dai casi particolari più semplici, e precisamente dal caso del moto di traslazione e da quello del moto di rotazione.

Nel moto di traslazione il corpo si sposta nello spazio senza mutare di orientazione: è facile allora dimostrare che velocità ed accelerazione sono, in ciascun istante, le stesse per tutti i punti del corpo.

Nel moto di rotazione attorno ad un asse fisso, la velocità è, in ciascun punto, diretta normalmente al piano determinato dal punto e dall'asse fisso: la sua grandezza è proporzionale alla distanza del punto dall'asse. La costante di proporzionalità vien d'abitudine designata col nome di velocità di rotazione, o *velocità angolare*, del corpo nell'istante considerato: giova rappresentarla con un vettore ω diretto secondo l'asse di rotazione: il suo senso sarà in ogni caso perfettamente definito quando, con una opportuna convenzione, si sia fatto in qualche modo corrispondere la direzione positiva sull'asse al senso delle rotazioni positive.

Così facendo la velocità di un punto qualunque del corpo si può sempre identificare col momento del vettore ω per rapporto al punto stesso.

Ne segue subito che la composizione di due o più movimenti di rotazione si può senz'altro ricondurre alla composizione dei vettori corrispondenti.

E i movimenti stessi di traslazione possono venir composti fra loro e coi precedenti in base alle stesse leggi della geometria vettoriale. Ogni movimento di traslazione può invero sempre pensarsi come risultante di due movimenti di rotazione di velocità angolari eguali in grandezza ma di segno contrario, attorno a due assi paralleli: le due velocità angolari costituiscono infatti, in queste condizioni, una coppia di vettori il cui momento è notoriamente costante rispetto a tutti i punti dello spazio.

Del resto, dopo queste poche premesse, anche i casi di movimento più complessi e generali non presentano più alcuna difficoltà sostanziale.

Così se nel movimento vi è un solo punto che si mantenga fisso, si dimostra che le velocità dei singoli punti sono in ciascun istante quelle stesse che si avrebbero se si trattasse di una rotazione attorno ad un asse passante pel punto fisso. Quelle velocità si possono quindi ancora considerare come i momenti, presi per rapporto ai punti cui esse si riferiscono, di un vettore ω il quale però deve qui intendersi variabile col tempo non soltanto in grandezza ma anche in direzione.

L'asse secondo cui esso agisce si chiama *asse istantaneo* di rotazione. Il luogo che tale asse descrive nello spazio durante il movimento è un certo cono, avente il vertice nel punto fisso: per rapporto al corpo mobile lo stesso asse descrive un altro cono, solidale al corpo, avente esso pure per vertice il punto fisso: ed è facile constatare che il movimento considerato si può sempre pensar generato dal rotolamento del cono mobile sul cono fisso, l'asse istantaneo coincidendo in ciascun istante colla generatrice di contatto dei due coni.

Resta a considerare il caso più generale di movimento di un corpo: quello in cui non vi è nessun punto fisso. Si riesce allora a dimostrare che le velocità dei singoli punti sono in ciascun istante quelle stesse che si avrebbero nell'ipotesi che coesistessero un moto di traslazione parallelo ad un asse ed un moto di rotazione attorno al medesimo asse (movimento elicoidale elementare). Naturalmente la posizione e la direzione di quest'asse variano in generale da istante ad istante insieme colle grandezze delle due velocità di traslazione e di rotazione: ma la conoscenza di questi diversi elementi in funzione del tempo è tuttavia sufficiente, non solo a definire analiticamente il fenomeno, ma anche a dare un'idea intuitiva del suo andamento.

***

Singolarmente interessante sotto tutti i punti di vista è il caso dei sistemi piani che si muovono nel loro stesso piano.

Si dimostra infatti che in qualunque movimento rigido di una figura piana nel suo piano, le velocità dei singoli punti sono in ciascun istante quelle stesse che si avrebbero se si trattasse di una rotazione attorno ad un asse normale al piano, o più semplicemente diremo addirittura, attorno ad un punto del piano.

Questo punto, generalmente variabile da istante ad istante, prende il nome di *centro istantaneo* di rotazione. Nel muoversi esso descrive nel piano una certa curva fissa: considerato invece per rapporto alla figura mobile esso descrive un'altra curva, solidale a tale figura; ed il movimento può sempre pensarsi generato dal rotolamento della curva mobile sulla curva fissa, il centro istantaneo coincidendo in ciascun istante col punto di contatto delle due curve.

***

Un'ultima parola ci resta da dire a proposito dei *moti relativi*.

Accade frequentemente di dover definire il movimento di un sistema materiale per rapporto ad un sistema di riferimento che non è fisso, ma animato alla sua volta da un certo movimento.

Il movimento del sistema per rapporto agli assi mobili si dice allora moto relativo; il movimento di questi si dice moto di trascinamento; ed in funzione delle caratteristiche, supposte note, di questi due movimenti occorre saper determinare le caratteristiche del moto assoluto del sistema materiale dato.

Ora per quel che riguarda la velocità la cosa è estremamente semplice, perchè la velocità assoluta di un punto è sempre la risultante della sua velocità relativa e della sua velocità di trascinamento.

Ma ben più complesso si presenta il problema quando si passa a discorrere delle accelerazioni. A proposito delle quali Coriolis per primo ha dimostrato che per ottenere l'accelerazione assoluta bisogna alla risultante dell'accelerazione relativa e dell'accelerazione di trascinamento aggiungere geometricamente una terza accelerazione, detta *complementare*, o *centripeta composta*, eguale al doppio del prodotto vettoriale della velocità relativa e della velocità angolare di trascinamento.

Se da un'origine arbitraria O si immaginano condotti due vettori rispettivamente equipollenti a $2v$, doppio della velocità relativa, e ad ω, velocità angolare del moto di trascinamento, l'accelerazione di Coriolis si può intendere rappresentata, in grandezza, direzione e senso, dalla velocità con cui si muoverebbe l'estremità del vettore $2v$ se ruotasse attorno all'origine O colla velocità angolare ω.

L'accelerazione di Coriolis riesce quindi identicamente nulla:

1) tutte le volte che si annulla la velocità angolare del moto di trascinamento, come accade quando questo moto si riduce ad una semplice traslazione;

2) tutte le volte che la velocità relativa è nulla ovvero ha la direzione istessa della velocità angolare del moto di trascinamento.