D'altra parte, se le variazioni della velocità angolare si mantengono nei limiti di piccole frazioni della velocità stessa — come il più delle volte avviene nel caso delle macchine animate da movimento rotatorio — l'incremento della forza viva si può con sufficiente approssimazione esprimere sotto una forma affatto analoga a quella che varrebbe nel caso delle variazioni infinitamente piccole:

$$\Delta W = J \cdot \omega \cdot \Delta \omega$$

ovvero anche sotto questa forma:

$$\Delta W = \lambda J \omega^2$$

nella quale si è posto:

$$\Delta \omega = \lambda \cdot \omega$$

indicando con λ un coefficiente numerico che misura lo *scarto* della velocità.

La regolarità del movimento sarà evidentemente tanto più grande quanto più sarà piccolo lo scarto λ.

Ora, sempre a parità di valore di ΔW, lo scarto λ si può rendere tanto piccolo quanto si vuole, sia accrescendo ω, sia accrescendo J; il che è quanto dire: sia disponendo le cose in modo da far ruotare il sistema a velocità sufficientemente grandi, sia distribuendo le masse di esso in modo da rendere sufficientemente grande il loro momento d'inerzia.

Di qui la ragion d'essere, ed il modo di funzionare, di quei particolari organi di macchine che si chiamano *volanti* e che sono costituiti da grandi masse a cui si dà la forma di dischi, o meglio di anelli di grande diametro (sì da renderne massimo il momento d'inerzia) e che si fanno ruotare a grande velocità intorno al loro asse, allo scopo di regolarizzare il movimento.

***

Teoria generale del pendolo composto (*). — Sappiamo già che si designa genericamente col nome di pendolo un corpo rigido di forma qualunque il quale possa ruotare attorno ad un

(*) Cfr. H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 391, nonchè L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pag. 139.

asse orizzontale e sia soggetto soltanto all'azione del suo peso. Esso prende più precisamente il nome di pendolo composto quando lo si vuol distinguere dal pendolo semplice in cui tutta la massa è per ipotesi concentrata in un unico punto.

L'asse orizzontale fisso prende il nome di asse di sospensione. Prendiamo come piano della figura 39 il piano condotto per il baricentro perpendicolarmente all'asse di sospensione: questo si proietta in un punto O: sia $d = OG$ la distanza del baricentro G da O.

Sia θ l'inclinazione della congiungente OG sulla verticale in un dato istante del moto.

Detta M la massa totale e quindi Mg il peso, il momento di questo rispetto all'asse di sospensione sarà $-Mg.d.\operatorname{sen}\theta$ (il segno negativo sta ad indicare che quel momento agisce nel senso delle θ decrescenti, cioè tende a ricondurre il corpo verso la sua posizione di equilibrio per la quale è $\theta = 0$).

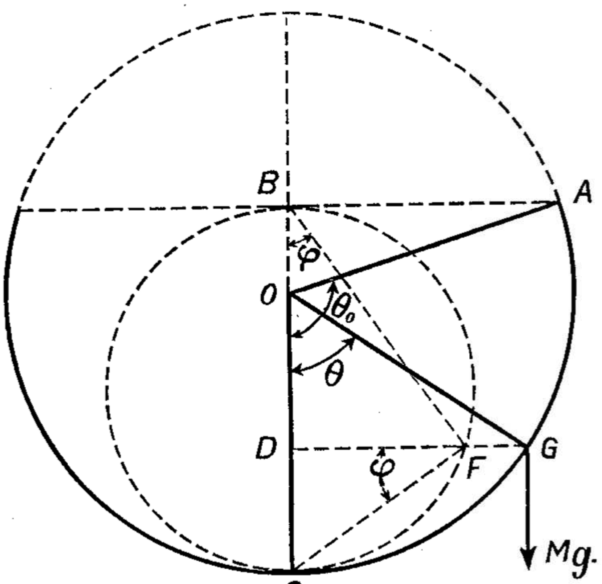

Fig. 39.

Detto finalmente J il momento d'inerzia del corpo rispetto al solito asse di sospensione, si potrà scrivere l'equazione del movimento:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - Mg\,.\,d\,.\operatorname{sen}\theta$$

Ora consideriamo un pendolo semplice di lunghezza l avente nel medesimo istante la medesima inclinazione θ sulla verticale. Sia m la sua massa e quindi ml^2 il suo momento d'inerzia. Per esso si avrà:

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = - m g l \operatorname{sen}\theta$$

Le due equazioni coincidono se si pone:

$$l = \frac{J}{Md} \tag{38}$$

La retta OG del corpo dato si muove dunque colla medesima legge con cui si muoverebbe un pendolo semplice di questa lunghezza l: la quale, per questo motivo, prende il nome di *lunghezza del pendolo composto.*

***

Del resto la trattazione del problema che ora passiamo ad esporre è assolutamente generale: vale cioè tanto se in essa l rappresenta la lunghezza effettiva di un pendolo semplice, come se con quella lettera si indica il rapporto $\frac{J}{Md}$ relativo ad un pendolo composto.

Riprendiamo dunque l'equazione differenziale del moto, che scriveremo:

$$\frac{l}{g}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\operatorname{sen}\theta$$

ed incominciamo coll'osservare che essa si presta senza difficoltà ad una prima integrazione, dalla quale si ottiene:

$$\frac{1}{2}\frac{l}{g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \cos\theta - \cos\theta_0$$

θ_0 essendo l'elongazione massima (vedi figura).

Alla costante:

$$k = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}$$

si dà di solito il nome di *modulo*: e la si mette in evidenza scrivendo l'ultima equazione sotto la forma:

$$\frac{1}{4}\frac{l}{g}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = k^2 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

dalla quale si deduce:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{k^2 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

Qui incominciano le difficoltà: e conviene operare un cambiamento di variabile.

Sia C la posizione più bassa per cui passa il baricentro G nel suo movimento, ed A la più alta: e B il punto in cui l'orizzontale condotta per A incontra la verticale per C.

Su BC come diametro tracciamo una circonferenza e facciamo corrispondere i singoli punti F di questa alle singole posizioni G del baricentro che stanno sulla medesima orizzontale: a ciascun angolo θ verrà così a corrispondere un determinato angolo φ che il raggio BF fa colla verticale: e si ha dalla figura

$$CD = CF \operatorname{sen} \varphi = CB \operatorname{sen}^2 \varphi$$

cioè:

$$d(1 - \cos\theta) = d(1 - \cos\theta_0) \operatorname{sen}^2 \varphi$$

o anche:

$$2\,d \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = 2\,d \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Di qui la relazione:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = k \operatorname{sen} \varphi$$

da cui si ricava:

$$d\frac{\theta}{2} = k\cos\varphi \frac{d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = k\cos\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = k\cos\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

D'altra parte:

$$\sqrt{k^2 - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}} = k\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi} = k\cos\varphi$$

e finalmente sostituendo:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

Ciò posto, si osservi che quando θ varia da 0 a θ_0, l'angolo φ varia da 0 a $\frac{\pi}{2}$. Il tempo occorrente al pendolo per compiere una oscillazione semplice è evidentemente doppio di quello corrispondente alla accennata variazione, e però varrà:

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

L'integrale ellittico che sta al secondo membro si può agevolmente calcolare sviluppando in serie:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \dots$$

Si ha infatti, per una formola ben conosciuta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \varphi)^{2p} \, d\varphi = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,\dots\, (2p-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,\dots\, 2p} \, \frac{\pi}{2}$$

Sostituendo si trova:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 k^6 + \dots\right]$$

Se $k = \operatorname{sen} \frac{\theta_0}{2}$ è sufficientemente piccolo perchè lo si possa confondere coll'angolo $\frac{\theta_0}{2}$ si ha la formola:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right]$$

Che se poi è tanto piccolo che il suo quadrato possa venire trascurato a fronte dell'unità, la formola si riduce a quella (7) delle oscillazioni isocrone:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

di cui abbiamo data a suo tempo la dimostrazione di Huygens.

***

A titolo di esercizio consideriamo un pendolo come quello schematicamente rappresentato nella fig. 40 a sinistra. O sia

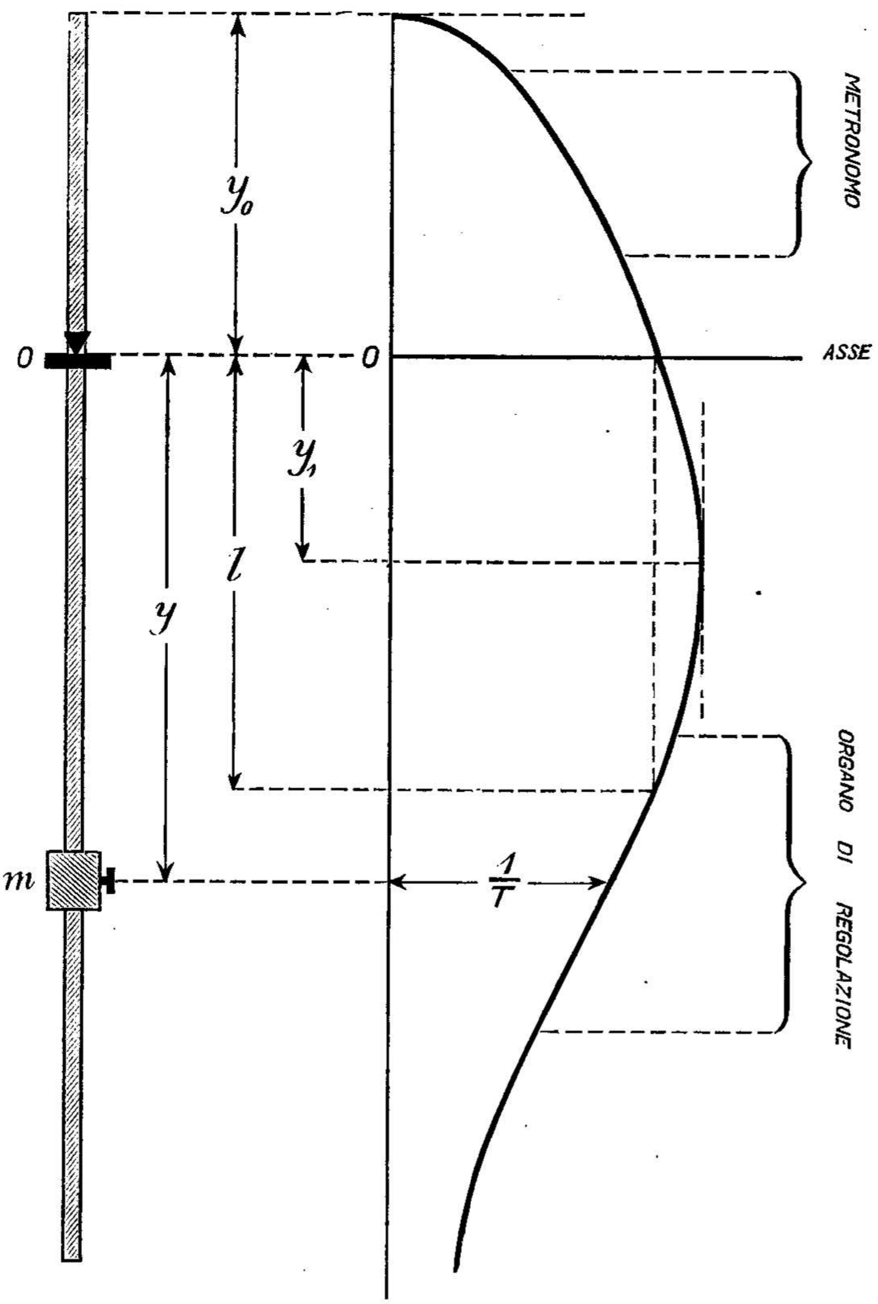

Fig. 40.

la traccia dell'asse di sospensione; m una massa addizionale spostabile a volontà, la cui posizione riterremo definita dalla sua distanza y da O contata positivamente verso il basso.

Sia al solito $l = \frac{J}{Md}$ la lunghezza del pendolo in assenza della massa addizionale m: la lunghezza del pendolo munito di detta massa addizionale sarà:

$$\frac{J + my^2}{Md + my}$$

In queste condizioni il periodo di oscillazione sarà:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J + my^2}{g\,(Md + my)}}$$

A destra della figura si è rappresentata graficamente la legge di variazione dell'inverso di questa quantità:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g\,(Md + my)}{J + my^2}}$$

che prende il nome di *frequenza*.

Chiediamoci in primo luogo se vi sono delle posizioni della massa addizionale, per le quali l'influenza di questa massa sulla frequenza sia nulla. Se esistono, esse dovranno soddisfare alla condizione:

$$\frac{J + my^2}{Md + my} = \frac{J}{Md} = l$$

la quale si può evidentemente scrivere sotto la forma:

$$J + my^2 = Mdl + myl$$

ovvero:

$$my^2 - myl = Mdl - J = 0$$

ovvero ancora:

$$my\,(y - l) = 0$$

epperò ammette due soluzioni:

$$y = 0 \qquad \text{ed} \qquad y = l$$

Nel primo caso infatti la massa addizionale viene a coincidere col centro di sospensione e (in quanto la si consideri come concentrata tutta in un punto) si può dire addirittura che non partecipa al movimento; nel secondo viene a coincidere col centro di oscillazione, il che vuol dire che essa, presa da sola, oscillerebbe colla medesima legge con cui oscillerebbe, pure da sola, la rimanente massa: è quindi ben naturale che il moto di questa non resti turbato dall'aggiunta della prima.

Constatiamo in secondo luogo che la frequenza può annullarsi ove si ponga

$$Md + my = 0$$

cioè per un valore:

$$y_0 = -\frac{Md}{m}$$

Quando la massa addizionale occupa la posizione così definita, il baricentro dell'intiero sistema cade in O. È quindi ben naturale che, in assenza di ogni qualsiasi coppia di richiamo il pendolo non oscilli: questo infatti e non altro s'intende affermare dicendo che la frequenza è nulla o, ciò che fa lo stesso, che il periodo di oscillazione è infinito.

Per ultimo vediamo se, e per quali posizioni della massa addizionale, la frequenza può divenire massima. Basterà imporre che sia nulla la derivata presa per rapporto ad y di:

$$\frac{Md + my}{J + my^2}$$

cioè:

$$my^2 + 2\,Mdy - J = 0$$

e si ricava:

$$y = -y_0 \pm \sqrt{y_0^2 + \frac{J}{m}}$$

Delle due radici una è negativa, maggiore in valore assoluto di y_0: non ha quindi nessun interesse perchè corrisponde ad una posizione della massa addizionale per la quale il sistema si capovolgerebbe.

L'altra:

$$y_1 = -y_0 + \sqrt{y_0^2 + \frac{J}{m}}$$

è invece positiva e sempre compresa tra 0 ed l.

In pratica due applicazioni fanno capo a questa teoria: la massa addizionale mobile lungo lo stelo di un pendolo viene infatti sovente utilizzata come organo di regolazione; posta al di sopra dell'asse di sospensione essa costituisce invece quell'apparecchio che va sotto il nome di metronomo.

***

Pendolo di torsione. — Si designa ordinariamente con questo nome il sistema costituito da un filo flessibile fisso alla sua estremità superiore e portante all'estremità inferiore una massa pesante che può avere le forme e le dimensioni più svariate.

Sotto l'azione della gravità il baricentro di questa massa, appena questa viene abbandonata a sè stessa, va automaticamente a collocarsi sulla verticale del filo di sospensione.

Per ragioni che abbiamo già avuto occasione di mettere altrove in evidenza, e sulle quali quindi ci dispensiamo dal ritornare, convien disporre la massa in modo che questa verticale venga a coincidere con uno dei suoi assi centrali d'inerzia.

In queste condizioni se alla massa si imprime una rotazione attorno alla predetta verticale, e poi la si lascia libera da forze esterne, ovvero soggetta a forze che si riducano ad una coppia ad asse verticale, il moto si manterrà di rotazione attorno alla stessa retta.

È precisamente ciò che si verifica per effetto della reazione elastica del filo, reazione la quale (astrazion fatta dallo sforzo assiale che serve ad equilibrare il peso) può entro certi limiti ritenersi equivalente ad una coppia ad asse verticale di momento $-C\theta$ essendo θ l'elongazione nell'istante che si considera, e C una costante positiva che dipende dal materiale di cui il filo è fatto, dalla sua forma e dalle sue dimensioni: (il segno negativo sta al solito ad indicare che la coppia tende a ricondurre la massa spostata verso la sua posizione di equilibrio, a cui corrisponde per ipotesi il valore $\theta = 0$).

L'equazione del movimento è:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = - C\theta$$

ed il suo integrale generale si può scrivere sotto la forma:

$$\theta = A \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{C}{J}}\, t - \alpha\right)$$

Essa rappresenta un moto periodico, del tipo di quelli che a suo tempo abbiamo chiamati *armonici.*

A ed α sono le due costanti di integrazione; la prima misura l'*elongazione massima* da una parte e dall'altra della posizione di equilibrio: la seconda la *fase* e determina l'istante in cui il sistema mobile passa per la sua posizione di equilibrio per rapporto all'origine dei tempi prescelta: mediante una opportuna scelta di questa origine si può quindi sempre far scomparire la costante α dall'equazione.

Detto al solito T il tempo necessario per compiere una oscillazione *semplice,* se ne otterrà il valore imponendo che, quando si muti t in $t + 2nT$, non mutino nè θ nè $\frac{d\theta}{dt}$ sicchè il sistema venga a ritrovarsi nella medesima posizione ed animato dalla medesima velocità. Ora per questo occorre e basta che si abbia

$$\sqrt{\frac{C}{J}} \,.\, 2nT = 2n\pi$$

Dunque:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{C}} \tag{39}$$

Questa formola non è del resto propria soltanto del particolare sistema di cui ci stiamo occupando: essa continua evidentemente a valere, qualunque sia l'origine della coppia che sollecita il sistema, purchè questa si possa ritenere proporzionale all'elongazione.

***

Tutte le volte che la teoria del pendolo di torsione è applicabile, si può servirsene per la determinazione sperimentale della costante C: è infatti evidente che, se si misura il tempo T, la formola che lo esprime può venire utilizzata per esprimere C in funzione del momento d'inerzia J.

Qualche volta però accade che la forma geometrica della massa oscillante è complicata, sì da rendere assai difficile e anche praticamente impossibile il calcolo del momento d'inerzia.

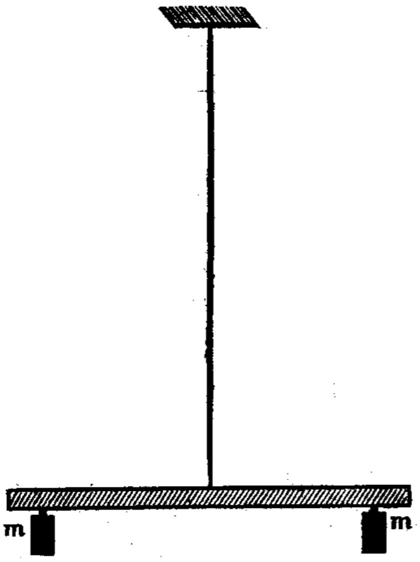

Fig. 41.

Si può allora evitare questo calcolo (e in ogni caso si può controllarne i risultati) eseguendo una seconda esperienza, dopo di aver fatto variare il momento d'inerzia di una quantità *conosciuta* J'.

Si aggiungono, per esempio, al sistema oscillante due masse m, m (fig. 41) *di forma geometrica semplice*, in posizione simmetrica rispetto alla sospensione.

Sia d la distanza del baricentro di ciascuna di quelle masse dalla verticale di sospensione, e ϱ il raggio d'inerzia della stessa massa per rapporto al suo asse verticale baricentrico, raggio che per la forma geometrica prescelta si suppone noto o facilmente calcolabile.

L'incremento del momento d'inerzia sarà:

$$J' = 2m\,(\varrho^2 + d^2)$$

Il tempo che il sistema così modificato impiegherà per compiere la solita oscillazione semplice, sarà pertanto:

$$T' = \pi \sqrt{\frac{J + J'}{C}}$$

Dal paragone di questo valore col precedente si ricava:

$$J = J' \frac{T^2}{T'^2 - T^2}$$

ed inoltre:

$$C = \pi^2 \frac{J}{T^2} = \pi^2 \frac{J'}{T'^2 - T^2}$$

***

La sospensione bifilare. — Tra i casi in cui la teoria testè svolta a proposito del pendolo di torsione è immediatamente applicabile, è notevole quello della sospensione bifilare.

Si dà questo nome al sistema composto di due lunghi fili eguali AB, AB attaccati superiormente a due punti fissi A, A (scelti su di una medesima orizzontale) e portanti inferiormente una traversa BB di lunghezza eguale alla distanza AA (fig. 42).

La traversa, sotto l'azione del suo peso P, assume spontaneamente una posizione di equilibrio stabile, naturalmente contenuta nel piano verticale passante pei punti fissi A, A.

Se però alla traversa si applica una coppia situata in un piano orizzontale, essa si sposta ruotando attorno all'asse verticale che passa pel suo punto di mezzo O, e nel tempo stesso innalzandosi di una certa altezza OO'.

Incominciamo col definire la nuova posizione di equilibrio della traversa in funzione del momento:

$$M = Fb$$

della coppia applicata.

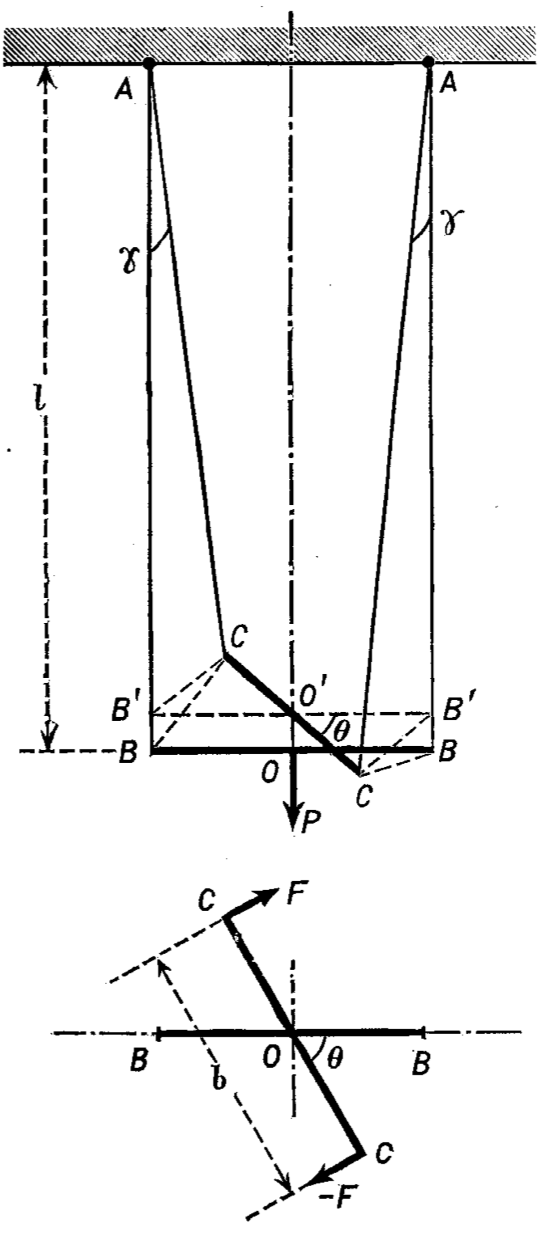

Fig. 42.

A tal fine denotiamo con θ l'angolo che la traversa, nella sua nuova posizione di equilibrio CC, fa colla direzione che essa aveva inizialmente, o, ciò che fa lo stesso, col piano verticale passante pei punti AA nel quale era inizialmente contenuta. Denotiamo invece con γ l'angolo che ciascuno dei fili AC di sospensione fa colla direzione verticale secondo la quale erano inizialmente disposti.

Si ha subito dalla figura:

$$OO' = BB' = AB - AB' = AB - AC\cos\gamma = l(1 - \cos\gamma)$$

In uno spostamento virtuale il quale facesse aumentare γ di $d\gamma$ il lavoro di sollevamento della traversa sarebbe dunque misurato da

$$P\frac{d}{d\gamma}[l(1 - \cos\gamma)]\,d\gamma = P\,l\,\mathrm{sen}\,\gamma\,d\gamma$$

Contemporaneamente ciascuno dei due punti cui sono applicate le due forze F, $-F$ si sposterebbe nella direzione della rispettiva forza di $\frac{b}{2}\,d\theta$; il lavoro effettuato dalla coppia applicata sarebbe dunque:

$$2F\frac{b}{2}\,d\theta = F\,b\,d\theta = M\,d\theta$$

Se pertanto si applica il teorema dei lavori virtuali, vale a dire si scrive che la somma algebrica dei lavori è nulla, si ha l'equazione generale dell'equilibrio:

$$M\,d\theta = P\,l\,\mathrm{sen}\gamma\,d\gamma.$$

Naturalmente non vi è qui che una sola variabile indipendente: bisogna dunque esprimere θ in funzione di γ o viceversa; ma la cosa non presenta difficoltà: basta paragonare le espressioni di CB′ nei due triangoli $O'B'C$ ed $AB'C$ per trovare la relazione:

$$l\,\mathrm{sen}\,\gamma = b\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

grazie alla quale l'equazione generale dell'equilibrio si riduce facilmente alla forma:

$$M = P\frac{b^2}{l}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{4\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}}}$$

Se θ è piccolo, sicchè $\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}$ riesce trascurabile a fronte dell'unità, si ha:

$$M = P \frac{b^2 \operatorname{sen} \theta}{4l}$$

Se poi θ è tanto piccolo che il suo seno si possa confondere coll'angolo stesso, si ha, anche più semplicemente:

$$M = \frac{P b^2}{4l} \theta$$

La coppia applicata si può allora ritenere senz'altro proporzionale alla rotazione che essa imprime alla traversa mobile.

Ciò è quanto dire che se la traversa mobile, una volta spostata di pochissimo nel modo anzidetto dalla sua posizione di equilibrio stabile, viene abbandonata a se stessa, essa si troverà richiamata verso quella medesima posizione da una coppia di reazione il cui momento, in ciascun istante del movimento che ne consegue, si potrà esprimere in funzione dell'elongazione θ in quell'istante, sotto la forma $-C\theta$ essendo:

$$C = \frac{P b^2}{4l}$$

Per la sospensione bifilare valgono dunque integralmente le cose dette dianzi per il pendolo di torsione, con questa sola differenza che la costante C dipende soltanto dal peso P della traversa e dalle lunghezze b ed l: da caratteristiche costruttive quindi a cui si possono facilmente attribuire valori arbitrariamente e convenientemente scelti.

Ne segue che la durata T dell'oscillazione semplice si può — assai più facilmente che nel caso del pendolo di torsione — prevedere e modificare a volontà operando opportunamente sul valore del peso P o su quello del rapporto $\frac{b^2}{l}$; il che rende questo dispositivo particolarmente apprezzato nella costruzione di certi strumenti di misura.

***

Smorzamento delle oscillazioni (*). — In causa delle resistenze passive (dovute agli attriti, alla imperfetta elasticità dei materiali, ed alla resistenza del mezzo) le quali sempre si oppongono a qualsiasi movimento, le oscillazioni di cui abbiamo fin qui trattato, non conservano in pratica, come la teoria vorrebbe, un'ampiezza costante.

L'ampiezza decresce invece nelle successive oscillazioni più o meno rapidamente, e dopo un certo tempo, che, a seconda dei casi, può essere brevissimo o anche molto lungo, il sistema in movimento finisce per arrestarsi nella sua posizione di equilibrio stabile.

Le oscillazioni si dicono allora smorzate, ed obbediscono a certe leggi generali che noi ci proponiamo qui di dedurre molto semplicemente riferendoci, tanto per fissare le idee, al caso del pendolo di torsione, e supponendo, per semplicità, che la resistenza che determina lo smorzamento (qualunque ne sia l'origine) sia in ogni istante proporzionale alla velocità.

L'equazione del movimento diviene:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta - f\frac{d\theta}{dt}$$

e, fin che la costante f che caratterizza la resistenza è abbastanza piccola da soddisfare alla diseguaglianza:

$$4CJ - f^2 > 0$$

l'integrale generale è del tipo:

$$\theta = Ae^{-\lambda t}\,\mathrm{sen}\,(\omega t - \alpha)$$

essendo:

$$\omega = \sqrt{\frac{C - \frac{f^2}{4J}}{J}}$$

e

$$\lambda = \frac{f}{2J}$$

(*) Cfr. H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 425.

Delle due costanti A ed α, la seconda si può, anche questa volta, far scomparire mediante una opportuna scelta dell'origine dei tempi: basta far in modo che per $t = 0$ sia $\theta = 0$ (fig. 43).

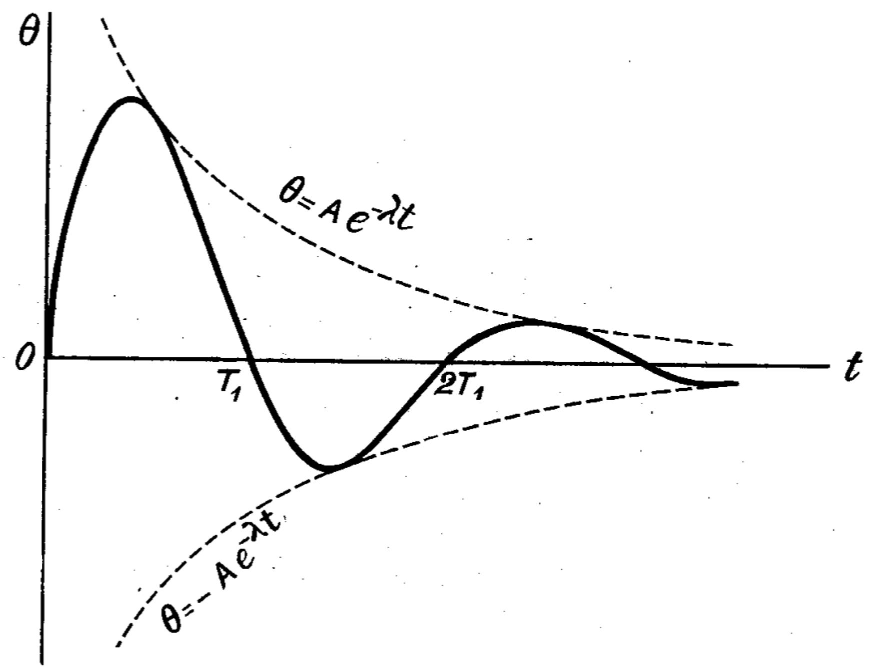

Fig. 43.

Allora θ si annulla di nuovo periodicamente per $t = nT_1$ tale che:

$$\omega \,.\, nT_1 = \sqrt{\frac{C - \frac{f^2}{4J}}{J}} \,.\, nT_1 = n\pi$$

Le oscillazioni son dunque ancora isocrone: il periodo è definito dall'intervallo di tempo che intercede tra due successivi passaggi per la posizione di equilibrio:

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{J}{C - \frac{f^2}{4J}}}$$

Lo stesso intervallo di tempo intercede del resto anche fra due successivi passaggi per posizioni di velocità nulla (elongazioni massime da bande opposte).

Però nelle oscillazioni smorzate queste elongazioni massime non sono più equidistanti (neppure per rapporto al tempo) dai passaggi per le posizioni di equilibrio, come accadeva nel caso delle oscillazioni armoniche semplici.

Dalla condizione

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

si ricava infatti:

$$e^{-\lambda t}(-\lambda \operatorname{sen} \omega t + \omega \cos \omega t) = 0$$

ossia:

$$\operatorname{tang} \omega t = \frac{\omega}{\lambda}$$

Ora λ è generalmente molto piccolo a fronte di ω, quindi il rapporto $\frac{\omega}{\lambda}$ risulta quasi sempre molto grande: non è però mai infinito: il che vuol dire che l'angolo ω è bensì prossimo a $\frac{\pi}{2}$ ma si mantiene sempre un po' inferiore a tale valore.

Il tempo necessario al sistema per andare dalla posizione di equilibrio a quella di massima elongazione è sempre un po' minore di quello che il sistema impiegherà immediatamente dopo per ritornare alla posizione di equilibrio.

***

Indichiamo con θ_1 e con θ_2 i valori che l'angolo θ assume al tempo generico t ed al tempo $t + 2T_1$. Si ha:

$$\theta_1 = Ae^{-\lambda t} \operatorname{sen} \omega t$$

$$\theta_2 = Ae^{-\lambda t - 2\lambda T_1} \operatorname{sen}(\omega t + 2\omega T_1)$$

Ora abbiamo visto che T_1 soddisfa, per definizione, alla condizione:

$$\omega T_1 = \pi$$

perciò:

$$\operatorname{sen}(\omega t + 2\omega T_1) = \operatorname{sen}(\omega t + 2\pi) = \operatorname{sen} \omega t$$

Per conseguenza:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = e^{2\lambda T_1}$$

Questo rapporto è costante: ciò vuol dire che i valori di θ corrispondenti a tempi $t + 2kT_1$ (t essendo qualunque, e k rappresentando la serie dei numeri intieri) formano una progressione geometrica.

Questo risultato ha un particolare interesse se riferito alle elongazioni massime: si esprime allora dicendo che: *le ampiezze delle oscillazioni decrescono in progressione geometrica.*

Il parametro della progressione si determina con tutta facilità osservando due successive elongazioni massime *dalla medesima parte*: le loro ampiezze che continueremo ad indicare con θ_1 e θ_2, si possono misurare senza affatto preoccuparsi dei relativi tempi (che differiscono di $2T_1$ automaticamente): posto

$$\delta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2} = e^{2\lambda T_1} - 1$$

se λ è sufficientemente piccolo si ha:

$$e^{2\lambda T_1} = 1 + 2\lambda T_1$$

epperò:

$$\delta = 2\lambda T_1 = \frac{f}{J} T_1$$

***

Paragoniamo ora il periodo T_1 con quello T che avevamo calcolato nel caso delle oscillazioni armoniche non smorzate:

$$T = \pi \sqrt{\frac{J}{C}}$$

Si trova subito:

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{C}{C - \frac{f^2}{4J}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f^2}{4JC}}} = 1 + \frac{f^2}{8JC} = 1 + \frac{f^2 T^2}{8\pi^2 J^2}$$

Ora se, in via di prima approssimazione, si sostituisce T a T_1 nell'espressione di δ, si può scrivere:

$$\frac{T_1}{T} = 1 + \frac{\delta^2}{8\pi^2}$$

Ammettiamo, tanto per fare un esempio, che la diminuzione relativa di ampiezza sia di un decimo: $\delta = 0{,}1$. È già questo uno smorzamento assai considerevole: infatti le ampiezze si succedono come i termini della serie:

100, 91, 83, 75, 68, 62, 57, 52, 47, ...

Tuttavia si trova:

$$\frac{T_1}{T} = 1{,}000127$$

la differenza oltrepassa appena l'uno per diecimila!

Si può quindi concludere che: *una resistenza proporzionale alla velocità non altera sensibilmente la durata delle oscillazioni, a condizione soltanto ch'essa non sia troppo grande.*

***

Se f cresce oltre un certo limite, il periodo T_1 che da principio ne sembrava quasi indipendente, prende alla sua volta a crescere sempre più rapidamente: basta d'altronde guardare l'espressione di T_1 per accorgersi che vi deve essere un valore di f avvicinandosi al quale T_1 deve tendere all'infinito.

Per quel valore di f cessa però di valere l'integrale generale di cui noi ci sjamo serviti.

La trattazione del problema del moto nell'ipotesi che si abbia:

$$4CJ - f^2 \leq 0$$

ha un grande interesse per certe sue applicazioni in altri rami della fisica, ma ha assai minore importanza nel campo della meccanica propriamente detta.

Ci limiteremo pertanto ad avvertire che il moto diviene *aperiodico*, come si può facilmente constatare anche sperimentalmente immergendo il pendolo di torsione di cui ci siamo fin qui occupati in un liquido abbastanza denso.

Si vede allora che il sistema, una volta deviato dalla posizione di equilibrio e lasciato libero sotto l'azione della coppia di richiamo e della accresciuta resistenza del mezzo, non assume più il solito moto oscillatorio attorno a quella posizione: a seconda dei casi esso si mantiene sempre dalla stessa parte della posizione di equilibrio ovvero raggiunge questa posizione e la oltrepassa, ma per una sola volta, per mantenersi cioè dall'altra parte indefinitamente: in ogni caso esso assume in definitiva un moto di accostamento *assintotico* a quella posizione (tale cioè che non vi perverrebbe se non dopo un tempo infinito).