

PARTE TERZA

LA DINAMICA DEI SISTEMI RIGIDI

Moto di rotazione di un solido attorno ad un asse fisso — Moto
di un solido attorno ad un punto fisso — Moto di un solido
completamente libero nello spazio.

I.

MOTO DI ROTAZIONE DI UN SOLIDO ATTORNO AD UN ASSE FISSO (*)

Tra tutti i problemi di movimento dei sistemi rigidi — vale a dire dei sistemi i cui punti son vincolati a mantener immutate le lor mutue distanze — quelli che si riferiscono ai moti di rotazione attorno ad un asse fisso sono tra i più interessanti ed importanti, e ciò non soltanto perchè concernono un caso particolare fondamentale a cui in un certo senso tutti gli altri problemi di movimento possono venir ricondotti, ma anche e soprattutto perchè trovano innumerevoli e svariatissime applicazioni immediate nel campo della pratica tecnica.

Consideriamo dunque un solido soggetto a vincoli tali che gli permettano soltanto di ruotare attorno ad un suo asse fisso. In pratica per render fisso quest'asse si vincolano, in modo da fissarli, due suoi punti.

Procedendo in modo del tutto analogo a quello seguito nello studio del corrispondente problema di equilibrio [Cfr. *I fondamentali della statica*, pag. 126] noi assumeremo gli assi coordinati di riferimento in modo che l'origine coincida con uno dei due punti fissi O' e che uno degli assi (per es.: l'asse z) passi per l'altro dei due punti fissi O'' (fig. 33). In queste condizioni quei due punti hanno rispettivamente per coordinate :

$$0, 0, 0$$

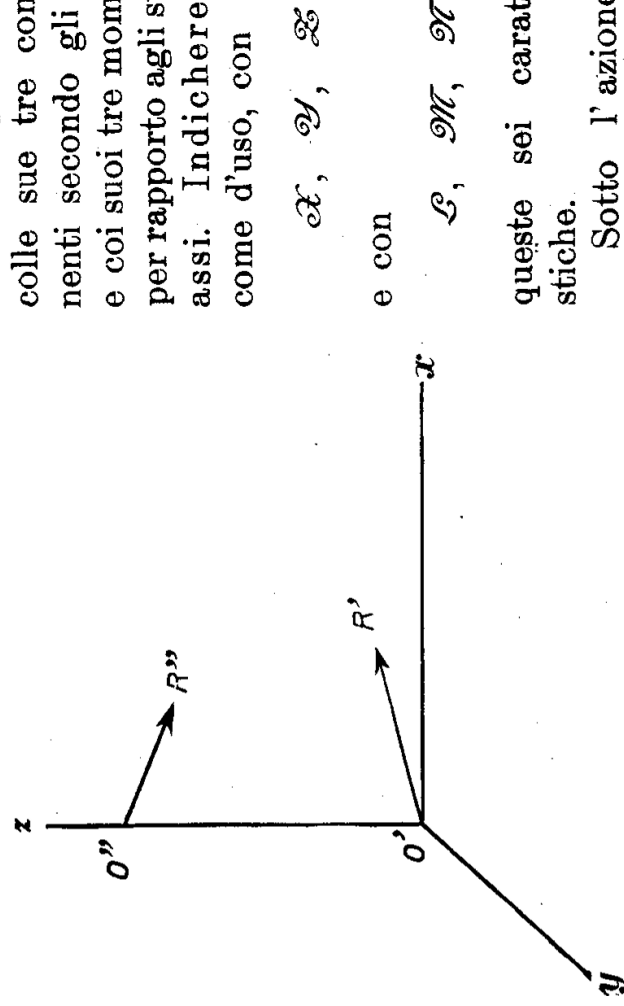
e

$$0, 0, d$$

ove con d si è semplicemente indicata la distanza dei due punti.

(*) Cfr. P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, tome II, Paris 1911, pag. 79, ovvero L. LECORNU, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, p. 135, nonchè H. BOUASSE, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 363.

Al solido noi supporremo applicato un sistema qualunque di forze che, riferito al prescelto sistema di assi coordinati, si potrà al solito rappresentare colle sue tre componenti secondo gli assi e coi suoi tre momenti per rapporto agli stessi assi. Indicheremo, come d'uso, con



queste sei caratteristiche.

Sotto l'azione di questo sistema di forze il solido ruota, per ipo-

Fig. 33.

tesi, attorno all'asse z . Indicheremo, come sempre, con ω la sua velocità angolare in un istante generico t .

Detta r la distanza dall'asse z di un elemento generico di massa m , noi sappiamo che la sua velocità lineare nell'istante t è eguale al momento, per rapporto al punto P in cui l'elemento si trova, del vettore ω : è eguale cioè ad $r \cdot \omega$ ed è diretta perpendicolarmente al piano passante per P e per l'asse z .

Sappiamo ancora che, detto J il momento d'inerzia del solido per rapporto all'asse z , il momento della quantità di moto del solido rispetto allo stesso asse è misurato da :

$$J \cdot \omega$$

e che la sua forza viva è invece misurata da

$$\frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

Ciò premesso è assai facile esprimere la legge del moto : lo si può anzi fare, come sappiamo, in più modi diversi.

Si può, per esempio, applicare il teorema del momento della quantità di moto il quale si esprime scrivendo che *la derivata*

del momento della quantità di moto rispetto all'asse fisso z dev'essere eguale all'analogo momento delle forze applicate:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{N} \quad (36)$$

Oppure si può applicare il teorema delle forze vive secondo il quale *l'incremento della forza viva durante un intervallo infinitesimo di tempo dt deve riuscir eguale al lavoro compiuto durante lo stesso intervallo di tempo dalle forze applicate*. Ora quell'incremento di forza viva è nel caso attuale misurato da :

$$d\left(\frac{1}{2} J \omega^2\right) = J \cdot \omega \cdot d\omega$$

mentre il contemporaneo lavoro delle forze applicate si può notoriamente esprimere sotto la forma

$$\mathcal{N} \cdot \omega \cdot dt$$

e l'eguaglianza di queste due espressioni ci riconduce ovviamente alla (36).

* * *

È facile in quella equazione mettere in evidenza la posizione che il solido occupa in ciascun istante; basta considerare un punto qualunque P di esso, situato fuori dell'asse z di rotazione, ed il piano che passa per tale punto e per l'asse z . Tale piano è da considerarsi come connesso col solido in movimento, cioè come ruotante insieme con esso attorno all'asse z . La posizione del solido in un dato istante può pertanto riguardarsi come perfettamente definita se si conosce l'angolo θ che quel piano fa con un piano fisso, per esempio col piano zx . E siccome :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

così la (36) viene a potersi scrivere sotto la forma

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{N} \quad (37)$$

nella quale il momento $\mathcal{N}$ delle forze applicate è da riguardarsi come una funzione del tempo t nel senso più ampio dell'espres-

sione: funzione cioè del tempo t sia direttamente ed esplicitamente, sia indirettamente ed in modo implicito per essere $\mathcal{N}$ funzione della posizione del solido, epperò dell'angolo θ , ovvero della sua velocità di rotazione, vale a dire della derivata $\frac{d\theta}{dt}$, ovvero ancora di altre caratteristiche del movimento le quali son tutte alla lor volta delle funzioni di t .

Naturalmente fin che il problema vien posto in termini così generali non si può pronunciarsi sulla possibilità o meno di eseguire l'integrazione di questa equazione differenziale del second'ordine. Tutto quel che si può dire si è che l'integrazione, quando sia possibile, introduce due costanti arbitrarie la cui determinazione in ciascun caso concreto deve potersi far dipendere dalla conoscenza, fra i dati del problema, delle condizioni in cui il movimento si effettua in un qualche suo particolare istante, per esempio dalla conoscenza dei valori di θ e di $\frac{d\theta}{dt}$ nell'istante iniziale $t = 0$.

L'integrazione si fa immediatamente se il momento $\mathcal{N}$ è costante; dalla (37) si passa allora subito all'equazione differenziale del prim'ordine:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\mathcal{N}}{J} t + a$$

e da questa all'equazione del movimento in termini finiti:

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{N}}{J} t^2 + at + b$$

a e b essendo due costanti d'integrazione i cui valori dipendono semplicemente dalle condizioni iniziali del moto: esse possono anzi rendersi nulle entrambe se si assume per origine dei tempi l'istante in cui il moto incomincia, sicchè:

$$\text{per } t = 0 \quad \text{sia} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0$$

e se si scelgono i due piani, fisso e mobile, tra i quali vien misurato l'angolo θ , per modo che, in quell'istante, coincidano, sicchè:

$$\text{per } t = 0 \quad \text{sia anche} \quad \theta = 0$$

Nel movimento di rotazione così definito la velocità angolare cresce proporzionalmente al tempo: è dunque questo il caso del moto uniformemente accelerato.

Se, come caso particolare, il momento $\mathcal{N}$ è nullo la velocità angolare riesce costante: il moto di rotazione diviene uniforme.

Vediamo ora di approfondire meglio l'argomento scrivendo, non una sola, ma tutte le equazioni del moto, onde poterne dedurre tutti gli elementi caratteristici, ed in particolare i valori incogniti delle reazioni di vincolo.

Siano:

$$X', \quad Y', \quad Z'$$

le componenti secondo i tre assi coordinati della reazione R' agente sul punto fisso O' , ed:

$$X'', \quad Y'', \quad Z''$$

le analoghe componenti della reazione R'' agente su O'' .

Se si immaginano sostituiti i vincoli con queste loro due reazioni, il solido viene a potersi riguardare come libero nello spazio, ed in virtù del principio di d'Alembert l'insieme di tutte le forze, note ed incognite, ad esso applicate, deve soddisfare alle sei equazioni (20) e (21) le quali nel caso concreto assumeranno la forma:

$$\begin{aligned} \sum m \frac{d^2x}{dt^2} &= \mathcal{X} + X' + X'' \\ \sum m \frac{d^2y}{dt^2} &= \mathcal{Y} + Y' + Y'' \\ \sum m \frac{d^2z}{dt^2} &= \mathcal{Z} + Z' + Z'' \\ \sum m \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \mathcal{L} - Y''d \\ \sum m \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= \mathcal{M} + X''d \\ \sum m \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \mathcal{N} \end{aligned}$$

Se si tien conto che, nel moto di rotazione attorno all'asse z di cui ci stiamo occupando, la velocità di un punto generico di coordinate:

$$x, y, z$$

ha per componenti

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

e che quindi le componenti dell'accelerazione sono, per il medesimo punto,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega \frac{dy}{dt} - y \frac{d\omega}{dt} = -\omega^2 x - y \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \omega \frac{dx}{dt} + x \frac{d\omega}{dt} = -\omega^2 y + x \frac{d\omega}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

le sei equazioni generali del movimento divengono:

$$-\omega^2 \sum mx - \frac{d\omega}{dt} \sum my = \mathcal{X} + X' + X''$$

$$-\omega^2 \sum my + \frac{d\omega}{dt} \sum mx = \mathcal{Y} + Y' + Y''$$

$$0 = \mathcal{Z} + Z' + Z''$$

$$\omega^2 \sum myz - \frac{d\omega}{dt} \sum mzx = \mathcal{E} - Y''d$$

$$-\omega^2 \sum mzx - \frac{d\omega}{dt} \sum myz = \mathcal{M} + X''d$$

$$\frac{d\omega}{dt} \sum m(x^2 + y^2) = \mathcal{N}$$

L'ultima di queste equazioni (che non contiene nessuno dei valori delle reazioni incognite) quando si tenga presente che

$$\sum m(x^2 + y^2) = \sum mr^2 = J$$

si riduce, com'è ben naturale che accada, alla (36) già da noi precedentemente stabilita e discussa.

Restano le cinque equazioni precedenti le quali, supposta nota la legge del movimento definita da quella sesta equazione, possono venire utilizzate per lo studio delle reazioni di vincolo.

Nei confronti delle quali reazioni accade qui quel che abbiamo già visto accadere nell'analogo problema di statica [Cfr. *I fondamenti della statica*, pag. 127]; delle cinque equazioni si possono cioè utilizzare la quinta e la quarta per determinare rispettivamente X'' ed Y'' ; in seguito ci si servirà della prima e della seconda per determinare X' ed Y' ; mentre dalla terza si potrà dedurre il valore della somma:

$$Z' + Z'' = -\mathcal{E}$$

Il calcolo dei valori singoli di Z' e di Z'' riesce anche qui impossibile finchè si considera il solido come indeformabile.

Consideriamo un caso particolare: quello in cui

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

le forze applicate ammettono una risultante passante per il punto fisso O' scelto come origine degli assi. Abbiamo già detto che in questo caso il solido ruota attorno al suo asse fisso con velocità costante. L'ultima delle sei equazioni generali del movimento diviene infatti:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Se si tien conto di questo risultato, nonchè del supposto annullarsi tanto di $\mathcal{E}$ che di $\mathcal{M}$, dalla quinta e dalla quarta di quelle sei equazioni si ricavano i valori

$$\begin{aligned} X'' &= -\frac{\omega^2}{d} \sum mzx \\ Y'' &= -\frac{\omega^2}{d} \sum myz \end{aligned}$$

Queste due componenti della reazione R'' si annullano dunque se:

$$\sum mzx = \sum myz = 0$$

se cioè l'asse di rotazione è asse principale d'inerzia per il punto fisso O' .

E poichè nulla ci vieta di supporre che anche Z'' sia eguale a zero — visto che si potrà sempre soddisfare egualmente alla $Z' + Z'' = -\mathcal{Z}$ coll'assumere per Z' il valore che quell'equazione in tale ipotesi determina — le condizioni in cui il movimento si effettua dovranno nell'ipotesi prospettata ritenersi affatto indipendenti dall'esistenza o meno del vincolo imposto ad O'' . Siamo in altre parole indotti a concludere che si può liberare il punto O'' da ogni vincolo e conservare fisso il solo punto O' senza che il solido smetta di ruotare con moto uniforme attorno all'asse z .

Se pertanto un corpo rigido avente un punto fisso, e soggetto a forze la cui risultante passi per questo punto, ruota inizialmente attorno ad uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, esso seguirà a ruotare uniformemente intorno allo stesso asse come se fosse fisso.

Per questa loro proprietà caratteristica gli assi principali d'inerzia passanti per un punto fisso di un corpo vengono anche chiamati suoi *assi permanenti* di rotazione.

* * *

Passiamo ad un caso più particolare ancora: supponiamo che, oltre ad essere:

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

siano anche:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = 0$$

supponiamo cioè che le forze applicate al solido costituiscano un sistema in equilibrio, o addirittura che esse siano tutte nulle.

Le prime due delle solite sei equazioni generali del movimento divengono rispettivamente:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sum mx &= X' + X'' \\ -\omega^2 \sum my &= Y' + Y'' \end{aligned}$$

Sempre nell'ipotesi che l'asse di rotazione sia asse principale d'inerzia per il punto fisso O' e che perciò:

$$X'' = Y'' = Z'' = 0$$

da quelle due equazioni si ricavano:

$$X' = -\omega^2 \sum mx$$

ed

$$Y' = -\omega^2 \sum my$$

mentre dalla terza si deduce:

$$Z' = 0$$

Che se poi si suppone che l'asse di rotazione contenga il centro di gravità del solido, il che implica la duplice condizione:

$$\sum mx = \sum my = 0$$

allora anche

$$X' = Y' = 0$$

Anche il vincolo imposto ad O' può venire soppresso senza che il solido smetta di ruotare con velocità angolare costante attorno all'asse z .

Si noti che, nell'ipotesi qui prospettata, questo asse deve necessariamente essere asse principale d'inerzia anche per il centro di gravità: deve cioè essere uno di quelli che abbiamo chiamati assi centrali d'inerzia del solido.

Se pertanto un corpo rigido, non soggetto a forze nè a vincoli di sorta, epperò libero completamente nello spazio, ruota inizialmente attorno ad uno dei suoi assi centrali d'inerzia, esso seguirà a ruotare uniformemente ed indefinitamente attorno a tale asse come se fosse fisso nello spazio.

Per questa loro proprietà caratteristica gli assi centrali di inerzia si dicono anche *assi naturali* di rotazione del corpo.

**

È degna d'essere rilevata la circostanza che, quando l'asse z coincide con un asse centrale d'inerzia sicchè:

$$\sum mx = \sum my = 0$$

e

$$\sum m y z = \sum m z x = 0$$

perchè le sei componenti delle due reazioni R' ed R'' si annullino, occorre e basta che si abbia:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{Z} = \mathcal{L} = \mathcal{M} = 0$$

Non è cioè necessario che le forze applicate al solido (supposto libero da ogni vincolo) siano in equilibrio e tanto meno che esse sian tutte nulle: basta che esse si possano ridurre ad una coppia giacente in un piano normale all'asse di rotazione, il cui momento $\mathcal{N}$ può del resto esser qualunque.

Il solido inizialmente animato da una velocità di rotazione attorno ad un tale asse potrà accelerare o ritardare il suo movimento secondo la:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{N}$$

ma continuerà a ruotare in ogni caso attorno allo stesso asse come se fosse fisso nello spazio.

A questo risultato si può anche arrivare ragionando così:

Un corpo rigido ruoti attorno ad un asse fisso con velocità angolare costante ω . Se si assume questo asse come asse delle z , e si indica con r la distanza da esso di una massa generica m , la forza centrifuga per questa massa ha per valore $m\omega^2 r$ e le sue componenti secondo gli altri due assi sono:

$$m\omega^2 x \quad \text{ed} \quad m\omega^2 y$$

Ora in assenza di forze applicate il principio di d'Alembert impone che si facciano equilibrio le forze d'inerzia, che, quando (come abbiamo supposto) il corpo è animato da un semplice moto di rotazione uniforme, altro non sono che forze centrifughe.

Ma ciascuna di queste forze centrifughe può considerarsi come derivante da una funzione di forza:

$$-\frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{\omega^2}{2} mr^2$$

si può cioè far corrispondere al loro complesso un'energia potenziale:

$$H = -\frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 = -\frac{\omega^2}{2} J$$

La predetta condizione di equilibrio si potrà pertanto esprimere imponendo che questa energia potenziale sia massima o minima: ovvero, dato che la velocità angolare si mantiene necessariamente costante, imponendo che sia massimo o minimo il momento d'inerzia J .

In altre parole: *un corpo non soggetto a forze può muoversi di moto rotatorio uniforme attorno ad un asse fisso nello spazio solo a condizione che il suo momento d'inerzia per rapporto a detto asse sia massimo o minimo, compatibilmente coi vincoli.*

Va da sé che se il corpo è rigido, ed i vincoli sono tali da impedire qualsiasi suo movimento rispetto all'asse che non sia un semplice movimento di rotazione attorno ad esso (come accade quando due punti del corpo sono fissi su quest'asse) il momento d'inerzia è invariabile, epperò la condizione indicata è da considerarsi come verificata di necessità.

Ma se invece i vincoli permettono al corpo qualche movimento, capace di far variare il suo momento d'inerzia per rapporto all'asse fisso, allora, se la predetta condizione non è verificata, il semplice moto di rotazione non potrà mantenersi, ed il corpo tenderà a mutare la sua orientazione rispetto all'asse.

Più precisamente si riconosce facilmente che sussistono i corollari seguenti:

1) Se un corpo rigido è animato da un moto di rotazione attorno ad un asse fisso nello spazio, ma non è rigidamente connesso a quest'asse, bensì può ruotare attorno ad un determinato punto di questo, esso corpo tenderà ad orientarsi in modo che uno degli assi principali di inerzia relativi a quel punto, venga a coincidere coll'asse di rotazione;

2) Se un corpo rigido è animato da un moto di rotazione attorno ad un asse fisso nello spazio, ma non è rigidamente connesso a quest'asse, bensì può ruotare attorno ad un dato suo punto situato fuori di questo, esso corpo tenderà ad orientarsi in modo che il suo baricentro venga a cadere nel piano che contiene l'asse di rotazione ed il punto dato;

3) Se alle ipotesi del numero precedente si aggiunge quella

che il punto del corpo che è connesso coll'asse di rotazione sia precisamente il baricentro, allora il corpo tenderà ad orientarsi in modo che uno dei suoi assi centrali d'inerzia riesca parallelo all'asse di rotazione; e la sua posizione sarà stabile se si tratta dell'asse minore.

* * *

Ecco un esempio estremamente semplice ed intuitivo che può servire bene a chiarire queste importanti proposizioni (*).

Consideriamo un sistema costituito da due sole masse eguali m , m giacenti in un medesimo piano coll'asse di rotazione z

(fig. 34). Scegliamo l'asse delle x in questo piano in modo che passi per il loro baricentro (punto di mezzo della loro congiungente): detta l la distanza di ciascuna delle masse dal baricentro, e d quella di questo baricentro dall'asse z , ed indicato con α l'angolo che la congiungente delle due masse fa coll'asse delle x , le

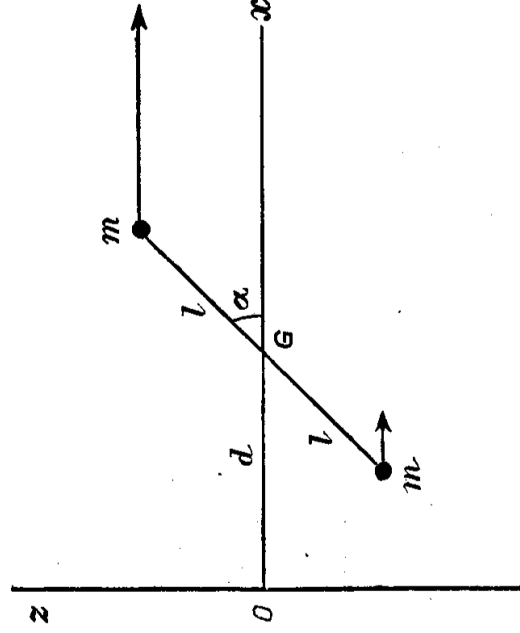


Fig. 34.

forze centrifughe delle due masse si potranno evidentemente esprimere sotto la forma:

$$m\omega^2 (d + l \cos \alpha) \quad \text{ed} \quad m\omega^2 (d - l \cos \alpha)$$

Ne segue che la loro risultante vale bensì:

$$2m\omega^2 d$$

come se la intera massa $2m$ fosse concentrata nel baricentro: essa è però applicata in un punto diverso del baricentro, tanto

(*) Cfr. H. BOUASSE, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 369.

è vero che presenta rispetto a questo il momento :

$$\begin{aligned} m\omega^2(d + l \cos \alpha) l \sin \alpha - m\omega^2(d - l \cos \alpha) l \sin \alpha = \\ = 2m\omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha = m\omega^2 l^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Se pertanto le due masse considerate non fossero rigidamente connesse all'asse di rotazione, ma potessero muoversi nel piano zx ruotando per esempio attorno al loro baricentro, esse prenderebbero effettivamente a ruotare nel senso delle α decrescenti, vale a dire nel senso che tende a portare la loro congiungente a coincidere coll'asse delle x .

In pratica poi accadrebbe questo, che il sistema formato da quelle due masse, una volta che avesse raggiunto l'orientamento cui corrisponde l'equilibrio dinamico ($\alpha = 0$), non vi si manterrebbe, ma passando oltre in virtù della forza viva acquistata, prenderebbe ad oscillare periodicamente attorno a quell'orientamento : e queste oscillazioni, sovrapponendosi al moto dato di rotazione attorno all'asse z , lo perturberebbero nel senso che anche la velocità angolare di questo presenterebbe delle variazioni periodiche in relazione colle variazioni del momento d'inerzia.

Queste nozioni sono della più alta importanza, non solo teorica, ma anche pratica.

Esse danno infatti un'idea del modo con cui si debbono *equilibrare* i corpi a cui si vuol imprimere dei moti di rotazione attorno ad un asse che non sia materialmente fissato. Si pensi per esempio ad un corpo, sospeso ad un lungo filo flessibile, che si voglia far oscillare sotto l'influenza della elasticità di torsione del filo, la quale sviluppa una coppia in un piano orizzontale. Perchè il moto del corpo si riduca effettivamente ad una semplice rotazione attorno alla verticale di sospensione, non basta che il suo baricentro giaccia su di essa (come automaticamente accade sotto l'azione della gravità) ma occorre che con quella verticale coincida uno degli assi centrali d'inerzia del corpo. Che se questa condizione non fosse realizzata si vedrebbe immediatamente complicarsi il movimento per il sovrapporsi di oscillazioni pendolari.

Le stesse osservazioni vanno fatte a proposito delle oscillazioni di un ago magnetizzato che si muova sotto l'influenza del campo magnetico terrestre.

E così in molti altri casi.

Del resto, anche quando l'asse di rotazione è fissato materialmente, le azioni dissimetriche e periodiche che il corpo ruotando può esercitare sui suoi supporti, sono le cause di molti inconvenienti ben noti ai moderni costruttori di macchine: ci tiamo il logoramento irregolare delle parti sottoposte ad attrito: citiamo soprattutto i moti vibratorii permessi dalla elasticità dei materiali e che, per sistemi rotanti a grande velocità, possono assumere proporzioni e caratteristiche pericolose.

Di qui la necessità di *equilibrare dinamicamente* anche questi sistemi facendo in modo che l'asse di rotazione coincida esattamente con uno degli assi centrali d'inerzia.

* * *

Il problema della regolarizzazione dei moti rotatorii periodici. — Si riscontrano sovente nella pratica tecnica — e particolarmente nella teoria delle macchine — dei problemi nei quali un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare variabile da istante ad istante secondo una legge più o meno complicata, ma periodica, sicchè i singoli punti del corpo, ad intervalli eguali di tempo, vengono a riprendere sempre le medesime velocità.

Basta allora applicare il teorema delle forze vive per un intervallo di tempo eguale ad un intero periodo (o ad un numero intero di periodi) per convincersi che, dovendo esser nulla la variazione della forza viva, dovrà anche esser nullo il lavoro fatto dalle forze applicate.

Ciò non vuol dire naturalmente che tale lavoro sia identicamente nullo in ogni istante, come accadrebbe per esempio se le forze applicate si facessero in ogni istante equilibrio. Anzi in generale ciò non dovrà avvenire, altrimenti la velocità angolare del corpo non potrebbe più essere, come noi abbiamo supposto, variabile da un istante all'altro. Vuol dire soltanto che se durante una certa frazione del periodo le forze applicate fanno un lavoro positivo, durante la rimanente parte di esso le forze compiono un lavoro di segno contrario, e di grandezza

eguale al precedente, sicchè la somma estesa all'intero periodo riesce eguale a zero.

Nella teoria delle macchine vi sono delle buone ragioni per distinguere sistematicamente le forze in due categorie a seconda che, durante il movimento, fanno lavoro positivo o negativo: le prime si chiamano *forze motrici*, le altre *resistenze*, ed il lavoro da esse compiuto si designa nell'un caso col nome di *lavoro motore*, nell'altro col nome di *lavoro resistente*.

Adottando anche noi queste denominazioni, ormai consacrate dall'uso, diremo che in un motò rotatorio periodico v'è sempre una certa frazione del periodo durante la quale il lavoro motore prevale sul lavoro resistente, mentre nella rimanente parte di esso è il lavoro resistente che prevale invece, ed in egual misura, sul lavoro motore.

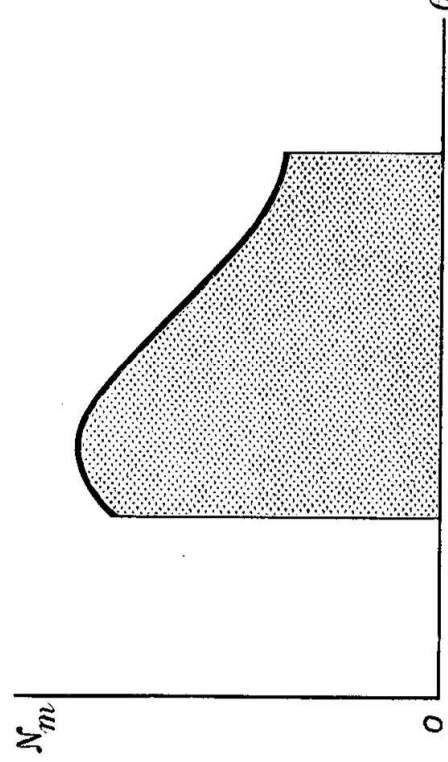


Fig. 35.

Se si rappresentano graficamente i valori del momento $\mathcal{N}_m$ delle forze motrici per rapporto all'asse di rotazione, assumendoli come ordinate di un diagramma le cui ascisse misurano gli angoli θ (fig. 35), l'area elementare compresa fra due ordinate vicinissime misurerà ovviamente il prodotto

$$\mathcal{N}_m \cdot d\theta = \mathcal{N}_m \cdot \omega dt$$

misurerà cioè il lavoro elementare compiuto nell'intervallo di tempo infinitesimo dt dalle forze motrici; l'area (finita) racchiusa tra il diagramma, l'asse delle ascisse, e le due ordinate relative a due istanti successivi qualunque del movimento, misurerà in conseguenza il lavoro motore compiuto nell'intervallo (finito) di tempo che quei due istanti delimitano.

Similmente se si rappresentano con un analogo diagramma i valori del momento $\mathcal{N}$, delle resistenze per rapporto all'asse di rotazione, in funzione dei soliti angoli θ , l'area racchiusa tra questo nuovo diagramma, l'asse delle ascisse, e le due ordinate relative ai due istanti successivi prima considerati, misurerà il lavoro resistente compiuto nello stesso intervallo di tempo.

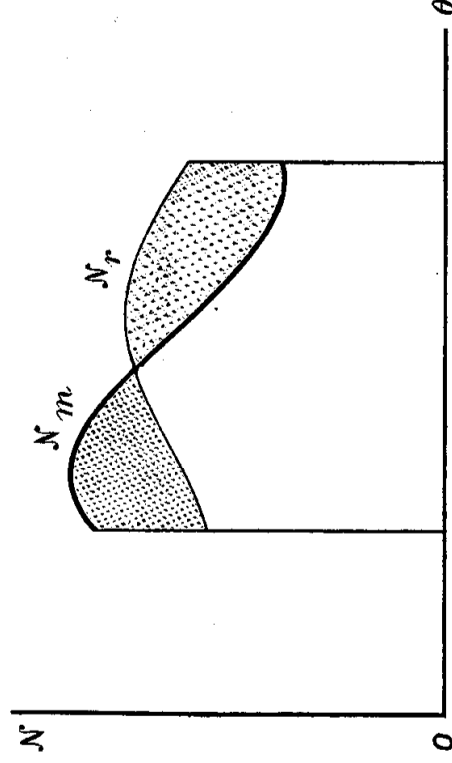


Fig. 36.

Se poi i due diagrammi vengono opportunamente sovrapposti (fig. 36) l'area racchiusa tra le due curve e le due solite ordinate generiche misurerà l'eccesso dell'un lavoro sull'altro.

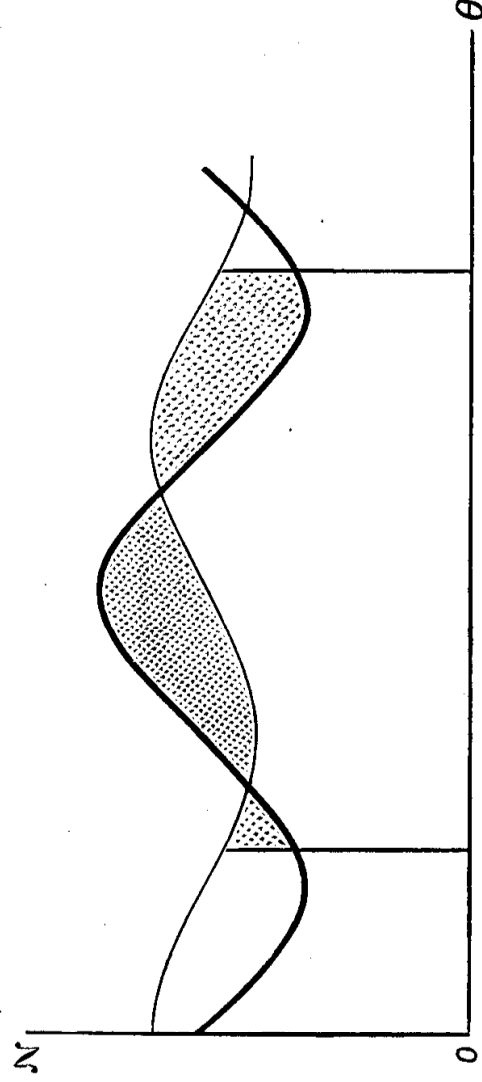


Fig. 37.

Per intervalli eguali ad un intero periodo (fig. 37), o ad un numero intero di periodi, tale area deve pertanto riuscire sempre nulla: devono cioè alternarsi le aree positive e quelle negative per modo che, scelto comunque un intervallo eguale

ad un periodo, o ad un numero intero di periodi, vi sia tra le une e le altre perfetto compenso.

Tutto ciò premesso si tenga presente che, in virtù del teorema delle forze vive, negli intervalli di tempo in cui il lavoro motore supera il lavoro resistente, la velocità angolare del sistema dev'essere crescente: essa deve invece decrescere negli intervalli di tempo in cui il lavoro resistente supera il lavoro motore.

Ciò è quanto dire che la velocità angolare presenterà in ciascun periodo almeno un massimo ed un minimo in corrispondenza di certi istanti in cui si passa dall'uno all'altro stato di cose, e che pertanto sono contrassegnati nei nostri diagrammi da quei punti in cui la curva rappresentativa del momento motore è intersecata dalla curva rappresentativa del momento resistente.

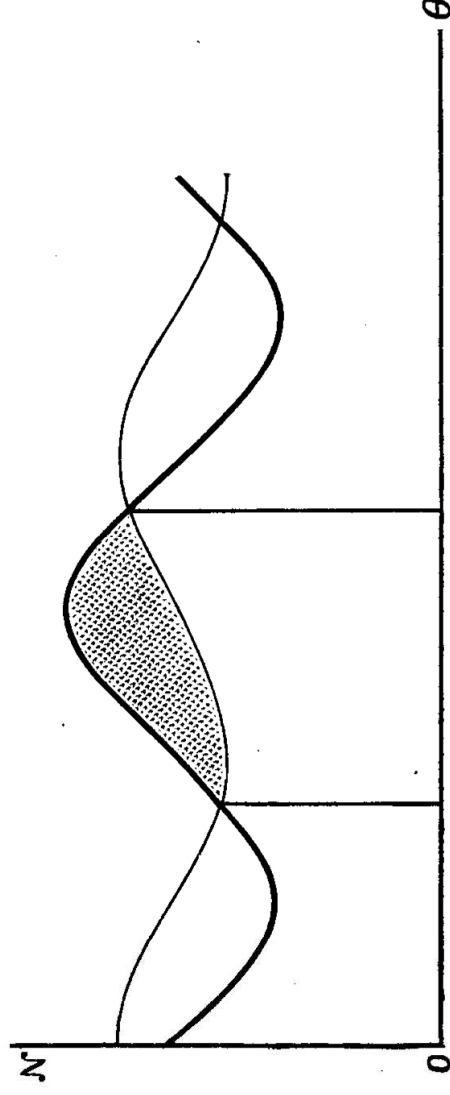


Fig. 38.

Consideriamo ora l'intervallo di tempo compreso fra l'istante in cui la velocità angolare è minima e quello in cui essa è massima (fig. 38).

Sempre pel teorema delle forze vive, l'incremento (finito) ΔW della forza viva durante un tale intervallo di tempo — vale a dire la differenza fra il massimo ed il minimo valore che la forza viva assume durante il periodo — dovrà riuscire precisamente eguale all'eccesso (finito) del lavoro motore sul lavoro resistente per lo stesso intervallo di tempo, eccesso rappresentato nella figura dall'area punteggiata e che è quindi da considerarsi come dato quando è data la legge secondo cui variano le forze applicate.