APPENDICE

SU LA TEORIA DELL'URTO

Abbiamo già avuto occasione di accennar, di sfuggita, che cosa si debba intender per " urto „ ed in qual modo un tal fenomeno dinamico si possa ricollegare come un caso limite ai diversi altri fenomeni di cui ci siam venuti occupando.

La teoria dell'urto si differenzia però da tutti gli altri capitoli della dinamica per ciò che non è più lecito in essa — neppure a titolo di prima approssimazione — prender le mosse dalla solita ipotesi della rigidità.

Pensiamo infatti, tanto per fissar le idee su di un esempio molto semplice, al caso di due sfere i cui centri si muovano su di una medesima retta, con velocità differenti e tali che la lor distanza vada col tempo diminuendo.

Verrà necessariamente un momento in cui le due sfere verranno a contatto: allora, se esse fossero assolutamente indeformabili, una almeno delle due velocità dovrebbe cambiar bruscamente di valore: ciò vuol dire che una almeno delle due accelerazioni dovrebbe, in quell'istante, diventar infinita.

Ma un'accelerazione infinitamente grande di una massa di dimensioni finite, dopo tutto quel che noi siamo venuti dicendo, non può concepirsi se non come l'effetto di una forza pure infinitamente grande.

D'altra parte, di forze infinitamente grandi in natura non ce ne sono, nè ce ne possono essere, poichè nessun corpo naturale potrebbe esercitarle nè sopportarle senza rompersi.

Si evita la difficoltà solo se si ammette che, nel momento istesso in cui le due sfere vengono a contatto, esse prendano a deformarsi per modo che, se un cambiamento brusco di velocità deve avvenire, avvenga limitatamente alle sole vicinanze immediate del punto di contatto e concerna quindi soltanto un elemento di massa infinitamente piccolo.

Si concepisce allora facilmente come il prodotto di questa massa infinitamente piccola per l'accelerazione (sia pur essa infinitamente grande) si possa mantenere finito.

Quanto alle rimanenti porzioni delle due sfere, resta inteso che esse verranno mutando di velocità solo in prosieguo di tempo: per esse pertanto il fenomeno potrà esser rapido sì, ma non istantaneo, e le accelerazioni potranno riuscir grandi, ma non infinite.

***

Una tale applicazione delle teorie generali della dinamica al problema dell'urto non poteva naturalmente delinearsi se non dopo molti tentativi e molte incertezze. L'abitudine di prescindere dalle deformazioni piccolissime dei corpi naturali, e l'apparente istantaneità del fenomeno, dovevano necessariamente concorrere a render più difficile la chiara comprensione di esso.

Si spiega così perchè lo stesso Descartes fosse ancora ben lontano dall'avere su questo argomento delle idee esatte: v'è tutta una serie delle sue lettere al P. Mersenne in cui egli si occupa dell'urto dei corpi, ma le sue teorie, spesso in contrasto palese colla stessa esperienza, sono sovente intessute di curiosissimi errori (*).

In una di quelle lettere, scritta nel 1640, Descartes non si perita di affermare la possibilità di eseguire sperimentalmente la misura della forza d'urto per paragone con un peso.

Ora nessun dubbio che l'esperienza si può facilmente istituire: basta prendere una ordinaria bilancia nella quale uno dei due piatti sia stato soppresso e sostituito con un gancio a cui per mezzo di un filo noi sospenderemo un peso P.

Se colla nostra mano solleviamo il peso P dell'altezza h, e (regolate le cose in modo che il sistema sia, in queste condizioni, in equilibrio) lasciamo cadere il peso, vediamo subito che il filo si tende, trasmette l'urto al gancio, e per esso al giogo della bilancia, obbligando il piatto che sta dall'altra parte a sollevarsi.

(*) H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris, 1895, pag. 201.

Nulla ci vieta di determinare sperimentalmente qual'è il minimo peso P_1 che occorre collocare sul piatto perchè questo, sotto l'azione dell'urto, non si sollevi. L'esperienza dimostra che P_1 è sempre maggiore di P, che cioè l'azione dinamica del peso P cadente dall'altezza h è sempre maggiore dell'azione statica dovuta allo stesso peso in riposo sul piatto.

Ma chi cercasse — come avrebbe voluto Descartes — di trovare nella differenza $P_1 - P$ una misura dell'effetto dinamico da metter in relazione coll'entità P del peso e coll'altezza h della sua caduta, si sbaglierebbe a partito. L'esperienza prova infatti che, a parità di peso e di altezza di caduta, la differenza $P_1 - P$ può assumere tutti i valori immaginabili, e ciò in dipendenza di altri fattori a cui certo non penserebbe chi prescindesse dalla deformabilità dei materiali. Basta per esempio cambiare il filo che serve alla sospensione: a seconda che questo filo è più o meno estensibile, la differenza $P_1 - P$ passa da valori molto piccoli a valori grandissimi.

***

Fu solo nel 1724 che Bernouilli, in un suo discorso " su la trasmissione del movimento „ enunciò le prime idee esatte sul fenomeno dell'urto.

Ecco, ad un dipresso, come egli si esprime:

" Facciamo ben attenzione a quel che succede quando un corpo in movimento viene ad urtare contro un ostacolo elastico, per esempio contro una molla.

Nel primo istante, appena avvenuto il contatto, la molla è costretta a deformarsi un poco, epperò prende a reagire contro il corpo che la preme e gli fa perdere un poco della sua velocità.

Continuando però a muoversi, il corpo costringerà la molla a deformarsi un altro poco: crescerà così la forza con cui essa reagisce, e la velocità del corpo diminuirà ulteriormente.

E così ancora, per gradi successivi, fino a che la velocità del corpo si sarà completamente annullata e la deformazione della molla e la sua forza di reazione saran giunte al massimo.

Arrestato il corpo nel suo movimento, la molla ricomincierà a distendersi costringendo il corpo a retrocedere e rendendogli successivamente, in ordine inverso di tempo, quei medesimi incrementi di velocità che prima gli aveva sottratti.

E ciò fino a che la molla avrà ripresa la sua configurazione primitiva ed il corpo avrà riacquistata la primitiva velocità, rivolta soltanto in senso contrario „.

Da questa analisi, veramente acuta e profonda, della funzione delle deformazioni elastiche nel fenomeno dell'urto, Bernouilli trae senz'altro una conclusione generale di fondamentale importanza, ed è questa: che il fenomeno dell'urto, malgrado la sua apparente istantaneità, si svolge sempre per gradi, in un tempo che può esser anche molto breve, ma che è sempre finito, e sviluppando delle forze che possono anche esser molto grandi, ma che si mantengono sempre, esse pure, finite.

***

Ecco in qual modo noi — riprendendo e sviluppando gli accenni fatti a pag. 70 e seg. — possiamo precisare in simboli questa possibilità che una forza finita, sia pur molto grande, agendo su di un corpo per un tempo brevissimo, gli imprima una velocità (o una variazione di velocità) pure finita; e constatare nel tempo stesso una circostanza che è della maggiore importanza per le semplificazioni che ci permetterà di introdurre nel nostro studio, che cioè nell'intervallo piccolissimo di tempo durante il quale il fenomeno si svolge, la posizione del corpo si può ritenere sensibilmente immutata.

Riferiamoci al caso del punto materiale pel quale abbiamo a suo tempo stabilita la relazione (12)

$$mv = Ft$$

In essa v rappresenta, com'è noto, la velocità che la massa m, supposta inizialmente in quiete, viene ad aver acquistata alla fine dell'intervallo di tempo t durante il quale si suppone che la forza F abbia agito su di essa con intensità costante.

Il moto essendo uniformemente accelerato, l'accelerazione sarà, secondo la (1):

$$a = \frac{v}{t}$$

mentre lo spazio percorso, nello intervallo di tempo t, sarà, in conformità alla (2)

$$s = \frac{1}{2}\,at^2 = \frac{1}{2}vt$$

Ora è evidente che — fermo restando il valore v della velocità che si vuole che la massa m acquisti — si può far decrescere a volontà l'intervallo di tempo durante il quale il fenomeno si svolge, purchè si faccia corrispondentemente crescere l'intensità della forza, per modo che il prodotto Ft, e quindi anche quello mv, si mantengano costanti.

Al limite, per t tendente a zero, bisogna far crescere F indefinitamente: le relazioni scritte sopra dimostrano che anche l'accelerazione a cresce indefinitamente, mentre lo spazio percorso s tende a zero.

In questo senso è lecito affermare che una forza sufficientemente grande può imprimere una velocità finita ad un corpo, agendo su di esso per un intervallo di tempo così breve che, per la durata di esso, il corpo si può considerare come immobile nello spazio.

Ora il lettore farà bene a fermar su questo punto la sua attenzione perchè è caratteristica delle forze d'urto — sì da differenziare queste dalle forze ordinarie di cui ci siamo sempre occupati per l'innanzi — questa possibilità di studiarne gli effetti senza tener conto degli spostamenti che, durante la loro azione, subiscono i loro punti di applicazione.

Tanto più che un'altra conseguenza di non minor rilievo ne segue immediatamente; ed è la possibilità, nello studio di questi effetti delle forze d'urto, di far astrazione anche dalla presenza di tutte le altre forze (ordinarie) eventualmente applicate allo stesso corpo; e ciò perchè, nell'intervallo piccolissimo di tempo durante il quale l'urto si verifica, tali forze non compiranno alcun lavoro apprezzabile, o, ciò che è poi la stessa cosa, non determineranno che delle variazioni di velocità trascurabili.

***

Tutto ciò premesso, riprendiamo in considerazione il prodotto

$$Ft$$

o meglio ancora, per tener conto delle possibili variazioni che la forza F generalmente subisce durante l'intervallo di tempo t, l'integrale

$$\int_t F\,dt$$

a cui abbiamo già dato il nome di *impulso*.

E desso un vettore le cui componenti secondo i soliti assi coordinati sono:

$$\int_t X\,dt$$
$$\int_t Y\,dt$$
$$\int_t Z\,dt$$

e che compare in tutte le formole della dinamica non appena si cerca di farne l'applicazione al caso dell'urto.

Prendiamo ad esempio le (22) nelle quali abbiamo a suo tempo compendiato il teorema della quantità di moto.

Se si tien presente che, nell'istante in cui si verifica un urto, tutte le altre forze (ordinarie) eventualmente applicate al sistema possono venir trascurate, quelle equazioni si possono subito scrivere sotto la forma

$$d\,Q_x = X\,dt$$
$$d\,Q_y = Y\,dt$$
$$d\,Q_z = Z\,dt$$

Integrando a tutta la durata t dell'urto, si trovano le variazioni (finite) delle componenti della quantità di moto:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\,Q_x &= \int_t X\,dt \\ \Delta\,Q_y &= \int_t Y\,dt \\ \Delta\,Q_z &= \int_t Z\,dt \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

le quali esprimono il teorema:

Se i vincoli son tali da permettere al corpo urtato una traslazione rigida secondo una data direzione, la variazione della componente (secondo la stessa direzione) del vettore quantità di moto dovuta all'urto, è eguale all'analoga componente dell'impulso.

***

In modo tutt'affatto analogo si procederà volendo applicare al problema dell'urto le equazioni (24) compendianti il teorema dei momenti delle quantità di moto.

Queste equazioni, grazie alla già accennata possibilità di prescindere da tutte le forze che non sian quella d'urto, si potranno infatti subito scrivere sotto la forma

$$\begin{aligned} d\,S_x &= y\,Z\,dt - z\,Y\,dt \\ d\,S_y &= z\,X\,dt - x\,Z\,dt \\ d\,S_z &= x\,Y dt - y\,X\,dt \end{aligned}$$

Integrando anche qui a tutta la durata t dell'urto, e tenendo presente che, durante tale intervallo di tempo, le coordinate x, y, z del punto di applicazione della forza d'urto si possono considerare come costanti, si otterranno le variazioni delle componenti del momento delle quantità di moto:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\,S_x &= y\int_t Z\,dt - z\int_t Y\,dt \\ \Delta\,S_y &= z\int_t X\,dt - x\int_t Z\,dt \\ \Delta\,S_z &= x\int_t Y\,dt - y\int_t X\,dt \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

donde il teorema:

Se i vincoli son tali da permettere al corpo urtato una rotazione rigida attorno ad un determinato asse fisso, la variazione del momento della quantità di moto rispetto a tale asse, dovuta all'urto, è eguale all'analogo momento dell'impulso.

***

Un risultato anche più importante e generale si ottiene naturalmente se si applica direttamente l'equazione fondamentale (16) della dinamica, equazione che scriveremo per l'occasione sotto la forma

$$\sum\left[\left(X - \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx}{dt}\right)\right)\delta x + \left(Y - \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dy}{dt}\right)\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z - \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dz}{dt}\right)\right)\delta z\right] = 0$$

o, meglio ancora, sotto l'altra equivalente:

$$\sum\left[\left(X\,dt - d\left(m\frac{dx}{dt}\right)\right)\delta x + \left(Y\,dt - d\left(m\frac{dy}{dt}\right)\right)\delta y + \right.$$
$$\left. + \left(Z\,dt - d\left(m\frac{dz}{dt}\right)\right)\delta z\right] = 0$$

In essa la sommatoria va al solito estesa a tutti i punti materiali di cui il sistema è costituito. Ma, tra le forze applicate, le sole forze d'urto vanno qui tenute in conto, tutte le altre potendosi, mentre dura l'urto, trascurare.

Ciò posto integriamo per tutta la durata dell'urto.

Nel far ciò si terrà presente che, per tale intervallo di tempo, i vincoli possono considerarsi come immutabili: gli spostamenti virtuali compatibili coi vincoli nell'istante iniziale continueranno pertanto ad esser tali fino all'istante finale, e reciprocamente. Le δx, δy, δz dovranno perciò nell'integrazione esser trattate come delle costanti.

Si ottiene così l'equazione:

$$\left.\begin{aligned}\sum\left[\left(\int_t X\,dt - \Delta\left(m\frac{dx}{dt}\right)\right)\delta x + \left(\int_t Y\,dt - \Delta\left(m\frac{dy}{dt}\right)\right)\delta y + \right.\\ \left. + \left(\int_t Z\,dt - \Delta\left(m\frac{dz}{dt}\right)\right)\delta z\right] = 0\end{aligned}\right\}\quad(47)$$

Basta paragonare quest'equazione alla (16) o più semplicemente ancora all'equazione dei lavori virtuali:

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

per convincersi che essa non è altro che un'equazione di equilibrio: equilibrio di un sistema soggetto agli stessi vincoli che al sistema dato competono nell'istante dell'urto, e sollecitato da due sistemi di forze aventi per componenti rispettivamente le componenti:

$$\int_t X\,dt$$
$$\int_t Y\,dt$$
$$\int_t Z\,dt$$

dell'impulso, e le componenti:

$$-\Delta\left(m\,\frac{dx}{dt}\right)$$

$$-\Delta\left(m\,\frac{dy}{dt}\right)$$

$$-\Delta\left(m\,\frac{dz}{dt}\right)$$

della variazione della quantità di moto, mutata di segno.

Si potrà dunque concludere che *nell'istante in cui si verifica un urto, gli impulsi e le variazioni delle quantità di moto, prese col segno cambiato, si fanno equilibrio.*

***

Accade sovente che l'urto si verifichi, non per l'intervento di un'azione esterna data, ma per il solo fatto che in un dato istante entra in funzione un nuovo vincolo determinante qualche cambiamento brusco di velocità. L'urto è allora dovuto ad una reazione di vincolo.

In questo caso non è più vero quel che abbiamo poc'anzi ammesso, che i vincoli proprii dell'istante iniziale del fenomeno son cioè gli stessi che competono all'istante finale, e che perciò gli spostamenti virtuali compatibili all'inizio dell'urto son tali anche alla fine.

Vi sono certamente degli spostamenti virtuali compatibili coi vincoli nell'istante iniziale che non son più tali dopo l'introduzione del vincolo nuovo.

Ma se ci limitiamo ad assumere come δx, δy, δz le componenti di spostamenti virtuali compatibili coi vincoli quali essi sono alla fine del fenomeno (epperò dopo l'introduzione del vincolo nuovo) non v'è dubbio che essi erano tali anche al principio. Così le δx, δy, δz potranno continuare a trattarsi come delle costanti.

D'altra parte, in vista di tali spostamenti virtuali, le reazioni di vincolo, sia che agiscano nei modi consueti sia che operino per urto, non fanno lavoro epperò possono venir omesse nella scrittura dell'equazione dei lavori virtuali.

Come dunque nell'applicare l'equazione fondamentale della dinamica non ci si occupa delle reazioni dei vincoli ma solo delle forze esplicitamente date, così nell'applicare la (47) non ci si dovrà occupare degli urti derivanti dall'introduzione di nuovi vincoli ma solo di quelli direttamente applicati.

In assenza di questi ultimi la (47) diviene

$$\sum\left[\Delta\left(m\frac{dx}{dt}\right)\delta x+\Delta\left(m\frac{dy}{dt}\right)\delta y+\Delta\left(m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right]=0 \qquad (48)$$

e ci dice che, *nell'istante in cui entra in funzione un nuovo vincolo, le variazioni delle quantità di moto si fanno equilibrio.*

S'intende bene, dopo tutto quel che si è detto, che questo equilibrio sussiste in rapporto ai vincoli finali, quali sono cioè dopo l'aggiunta del vincolo nuovo.

***

Particolarmente interessante è il caso in cui il vincolo nuovo è permanente, cioè continua, dall'istante del suo intervento in poi, ad operare sul corpo considerato.

Allora infatti tra tutti i sistemi di spostamenti virtuali immaginabili vi è anche il sistema degli spostamenti reali che il corpo subisce effettivamente nell'elemento di tempo dt immediatamente successivo al fenomeno.

Denotiamo, per brevità, con

$$v_x, \qquad v_y, \qquad v_z$$

le componenti della velocità di un punto generico del corpo immediatamente prima dell'intervento del nuovo vincolo, e con

$$v_x', \qquad v_y', \qquad v_z'$$

le analoghe componenti della velocità dello stesso punto immediatamente dopo; ed assumiamo:

$$\delta x = v_x'\,dt$$
$$\delta y = v_y'\,dt$$
$$\delta z = v_z'\,dt$$

La (48) diviene:

$$\sum m\left[(v_x' - v_x)\, v_x' + (v_y' - v_y)\, v_y' + (v_z' - v_z)\, v_z'\right] = 0$$

ossia:

$$\sum m\,(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) = \sum m\,(v_x v_x' + v_y v_y' + v_z v_z')$$

In virtù di questa relazione si ha:

$$\sum \frac{1}{2}\, m \left[(v_x - v_x')^2 + (v_y - v_y')^2 + (v_z - v_z')^2\right] =$$

$$= \sum \frac{1}{2}\, m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \sum \frac{1}{2}\, m\,(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2) -$$

$$- \sum m\,(v_x v_x' + v_y v_y' + v_z v_z') =$$

$$= \sum \frac{1}{2}\, m\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) - \sum \frac{1}{2}\, m\,(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2)$$

Nell'ultimo membro di questa equazione si trova la differenza fra la forza viva effettivamente posseduta dal corpo in movimento nell'istante immediatamente precedente all'introduzione del nuovo vincolo, e la forza viva che lo stesso corpo viene effettivamente a possedere nell'istante immediatamente successivo: tale ultimo membro misura dunque la perdita di forza viva dovuta all'introduzione del vincolo.

Il primo membro invece rappresenta la forza viva che spetterebbe al corpo se fosse animato da velocità che, segno a parte, sono precisamente eguali alle variazioni delle velocità effettive: la si chiama, per brevità, la forza viva dovuta alle velocità perdute.

Sussiste pertanto il teorema, dovuto a Carnot:

Quando in un sistema materiale in movimento si aggiungono dei nuovi vincoli permanenti, si verifica una perdita di forza viva eguale alla forza viva dovuta alle velocità perdute.

***

Ritorniamo ora al problema dell'urto propriamente detto e vediamo di precisare l'andamento effettivo del fenomeno almeno in un caso molto semplice: nel caso cioè in cui i due corpi che si urtano son due sfere omogenee animate da semplici movimenti di traslazione secondo la congiungente dei loro centri (*).

Abbiamo detto già, fin dal principio di questa nostra breve trattazione, per qual ragione occorre ammettere che, non appena avvenuto il contatto, le due sfere si deformino permettendo così ai punti che si son venuti a toccare di assumere immediatamente velocità eguali, senza che ciò avvenga immediatamente per il rimanente delle due masse.

S'intende che questa identità delle velocità dei punti delle due sfere che son venuti a contatto, che è geometricamente necessaria per tutta la durata, d'altronde brevissima, dell'urto, non persiste necessariamente dopo l'urto.

Se essa persiste — se cioè le due sfere, più o meno deformate, si mantengono, nel loro movimento ulteriore, sempre in contatto — si dice che il materiale di cui esse son costituite è *anelastico* o *plastico*.

L'analisi stessa del fenomeno che noi abbiamo riportata dal famoso discorso di Bernouilli ci dice però che, in generale, una tale ipotesi non si avvererà: più precisamente ci dice che, se il materiale di cui le sfere son costituite possiede quella proprietà caratteristica che abbiamo chiamata elasticità — ed in virtù della quale un corpo deformato tende a riprendere forme e dimensioni primitive al cessare della causa che ha prodotta la deformazione — le due sfere ad urto avvenuto si separeranno.

La loro velocità relativa, nell'istante immediatamente successivo all'urto, sarà necessariamente di segno opposto a quella che esse possedevano immediatamente prima, visto che prima le due sfere si avvicinavano e dopo invece si debbono allontanare.

L'esperienza dimostra poi che, nella realtà delle cose, quella velocità relativa finale è, in valor assoluto, sempre minore della velocità relativa iniziale, e tanto più prossima a questa quanto più perfetta è l'elasticità dei materiali.

Si è così condotti ad ammettere, almeno come caso limite, che se i materiali fossero *perfettamente elastici*, la velocità relativa per effetto dell'urto cambierebbe semplicemente di segno senza mutar di grandezza.

(*) Cfr. L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris, 1915, pag. 301.

***

Siano ora:

m_1 ed m_2 le masse delle due sfere (fig. 78);

v_1 e v_2 le loro velocità di traslazione immediatamente prima dell'urto: velocità che, per fissar le idee, supporremo dirette nel medesimo senso e tali che le due sfere vengano ad incontrarsi ($v_1 > v_2$);

v_1' e v_2' le velocità delle stesse sfere ad urto avvenuto.

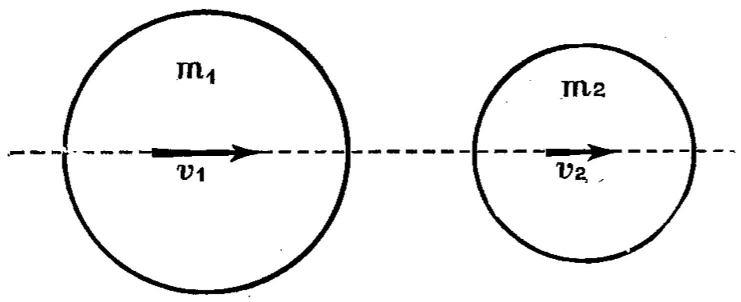

Fig. 78.

Ragioni ovvie di simmetria ci permettono, in queste ipotesi così semplici, di affermare *a priori* che i centri delle due sfere, che prima dell'urto si muovevano sulla lor congiungente, continueranno a muoversi dopo l'urto sulla medesima retta; e che perciò anche v_1' e v_2' avranno la stessa direzione; il problema si riduce perciò a calcolare, nei varî casi possibili, le grandezze di queste due velocità.

Intanto il teorema sul moto del baricentro, che è sicuramente applicabile poichè il sistema delle due sfere non è soggetto a nessuna forza nè ad alcun vincolo esterno, ci fornisce tra le velocità iniziali e quelle finali una prima equazione:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \tag{49}$$

Un'altra equazione la si ha poi quando si precisi, dal punto di vista dell'elasticità, il comportamento delle due sfere.

Nel caso dei materiali anelastici si dovrà infatti avere

$$v_1' = v_2'$$

Nell'altro caso limite dei materiali perfettamente elastici si avrà invece:

$$v_1' - v_2' = -(v_1 - v_2)$$

Queste due equazioni non son altro, ben inteso, che delle definizioni: definizioni di casi limiti tra i quali è sempre compreso il reale comportamento dei corpi naturali che sono sempre un poco elastici ma imperfettamente elastici: per essi si potrebbe per esempio scrivere:

$$v_1' - v_2' = -\varepsilon (v_1 - v_2) \tag{50}$$

ε essendo un coefficiente esclusivamente dipendente dalla natura fisica dei materiali, il cui valore, nullo per i materiali anelastici cresce fino a raggiungere l'unità per i materiali perfettamente elastici.

Dato, in ogni singolo caso concreto, il valore di questo coefficiente, le (49) e (50) permettono di esprimere v_1' e v_2' in funzione di v_1 e di v_2.

***

Incominciamo col soffermarci un momento sul caso particolare dei materiali anelastici:

$$\varepsilon = 0$$

Dalla (49) e (50) si ricava subito:

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Calcoliamo la variazione della forza viva. Per definizione essa è eguale ad

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Sviluppando e riducendo si trova:

$$-\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2$$

quantità sempre e sicuramente negativa: nell'urto di due sfere anelastiche si verifica dunque sempre una perdita di forza viva.

Nulla di più facile del resto che arrivare a questo risultato se si parte dal teorema di Carnot, teorema che è nel caso concreto applicabile, perchè, dato che le due sfere non debbono più dopo l'urto distaccarsi, l'urto stesso può interpretarsi come l'effetto della introduzione di un vincolo permanente.

Ora in virtù del teorema di Carnot la perdita di forza viva dev'essere eguale alla forza viva dovuta alle velocità perdute:

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2 - v_2')^2$$

Si ritrova così, a parte il segno, l'espressione scritta poc'anzi.

Occorre appena avvertire che la perdita di forza viva trova la sua naturale giustificazione nella deformazione permanente delle due sfere oltrechè nei fenomeni secondarii che l'accompagnano (innalzamento di temperatura ecc.).

***

Passiamo ora al caso generale, cioè supponiamo:

$$0 < \varepsilon < 1$$

Dalle (49) e (50) si ricavano, per le velocità dopo l'urto, i valori:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - \varepsilon m_2 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 + \varepsilon m_1 (v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$$

Con questi valori si trova, per la variazione della forza viva:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

l'espressione:

$$-\frac{1-\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$$

la quale differisce da quella trovata nel caso dell'urto delle sfere anelastiche soltanto pel fattore:

$$1 - \varepsilon^2$$

che sta a rappresentare la frazione a cui si riduce la perdita di forza viva in virtù della parziale elasticità attribuita ai materiali.

***

Nel caso limite dell'elasticità perfetta

$$\varepsilon = 1$$

la perdita di forza viva si riduce a zero.

In tal caso, infatti, le (49) e (50) dànno per le velocità dopo l'urto i valori:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2\, m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{2\, m_1 v_1 + (m_2 - m_1)\, v_2}{m_1 + m_2}$$

che soddisfano alla condizione:

$$\frac{1}{2}\, m_1 \,(v_1^2 - v_1'^2) = \frac{1}{2}\, m_2 \,(v_2'^2 - v_2^2)$$

esprimente che la forza viva perduta nell'urto da una delle sfere è eguale alla forza viva contemporaneamente acquistata dall'altra.

Se le due sfere sono identiche, vale a dire hanno la medesima massa:

$$m_1 = m_2$$

si trova:

$$v_1' = v_2$$

$$v_2' = v_1$$

le due sfere nell'urto si scambiano semplicemente le loro velocità.

Se invece si suppone che la seconda sfera sia immobile e che la sua massa sia infinitamente grande:

$$m_2 = \infty$$

$$v_2 = 0$$

si trova:

$$v_1' = -\, v_1$$

$$v_2' = 0$$

la seconda sfera resta dunque immobile anche dopo l'urto, mentre la prima rimbalza colla velocità stessa che possedeva prima, cambiata soltanto di segno.

Il lettore non esiterà a riconoscere in questo secondo caso particolare l'esempio tipico del corpo urtante contro un ostacolo elastico (molla) così efficacemente intuito ed illustrato da Bernouilli nel passo che abbiamo da principio citato.

* * *

Applicazione allo studio degli effetti di un urto su di un solido ruotante attorno ad un asse fisso.

Assumiamo l'asse di rotazione come asse delle z.

Denoteremo al solito con J il momento d'inerzia del solido rispetto a tale asse, con ω la sua velocità angolare, e quindi con

$$J\omega$$

il momento della sua quantità di moto per rapporto allo stesso asse.

Indicheremo poi specificatamente con

$$x \quad y \quad z$$

le coordinate del punto del solido su cui viene applicato l'urto, con

$$X \quad Y \quad Z$$

le componenti della forza d'urto in un istante generico, e quindi con

$$\mathcal{M} = x\,Y - y\,X$$

il contemporaneo valore del momento di detta forza d'urto per rapporto all'asse di rotazione.

Per definizione:

$$\int_t X\,dt$$

$$\int_t Y\,dt$$

$$\int_t Z\,dt$$

sono le tre componenti dell'impulso, ed

$$x\int_t Y\,dt - y\int_t X\,dt = \int_t (x\,Y - y\,X)\,dt = \int_t \mathfrak{M}\,dt$$

il momento dell'impulso per rapporto all'asse di rotazione.

Applicando il teorema dimostrato a pag. 263 secondo il quale *la variazione del momento della quantità di moto del sistema rispetto all'asse di rotazione, per effetto dell'urto, deve essere eguale all'analogo momento dell'impulso*, si ottiene l'equazione:

$$J(\omega_1 - \omega_0) = \int_t \mathfrak{M}\,dt \tag{51}$$

nella quale ω_0 ed ω_1 stanno a denotare, com'è chiaro, i valori che alla velocità angolare ω competono immediatamente prima ed immediatamente dopo l'urto.

Se il solido era inizialmente in quiete:

$$\omega_0 = 0$$

la velocità angolare che esso acquista per effetto dell'urto è:

$$\omega = \frac{1}{J}\int_t \mathfrak{M}\,dt \tag{52}$$

La sua forza viva, nell'istante immediatamente successivo all'urto, sarà:

$$\frac{1}{2}\,J\omega^2 = \frac{1}{2J}\left[\int_t \mathfrak{M}\,dt\right]^2 \tag{53}$$

* * *

Passiamo ora alla determinazione delle reazioni di vincolo (*). Come già abbiamo fatto nel caso delle forze ordinarie, noi supporremo che vi siano due punti fissi di coordinate:

$$0 \quad 0 \quad 0$$

e

$$0 \quad 0 \quad h$$

immagineremo idealmente soppressi i vincoli relativi, ed applicati a quei due punti due impulsi tali che le condizioni dinamiche del solido restino immutate.

(*) Cfr. L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris, 1915, pag. 145, nonchè H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 455.

Continueremo a denotare con

$$\begin{matrix} \mathcal{X} & \mathcal{Y} & \mathcal{Z} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{matrix}$$

le sei caratteristiche della forza d'urto applicata, in un istante generico, con

$$\begin{matrix} X' & Y' & Z' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

le caratteristiche della reazione R' agente sul punto fisso O' nel medesimo istante, e con

$$\begin{matrix} X'' & Y'' & Z'' \\ -Y''h & X''h & 0 \end{matrix}$$

le caratteristiche della reazione R'' agente sul punto O' sempre nello stesso istante.

Terremo poi ancora presente che, nel moto di rotazione attorno all'asse z, la velocità di un punto generico del solido, di coordinate

$$x \quad y \quad z$$

ha per componenti:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega x$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

e che quindi le componenti della quantità di moto, secondo i i tre assi coordinati, sono misurate da

$$-\sum m \omega y = -\omega \sum my$$

$$\sum m \omega x = \omega \sum mx$$

$$0$$

mentre i momenti della stessa quantità di moto per rapporto agli stessi assi sono misurati da

$$-\sum m \,.\, \omega x \,.\, z = -\omega \sum mxz$$

$$-\sum m \,.\, \omega y \,.\, z = -\omega \sum myz$$

$$\sum (m \,.\, \omega x \,.\, x + m \,.\, \omega y \,.\, y) = \omega \sum m (x^2 + y^2) = \omega J$$

Tutto ciò premesso, applichiamo il teorema generale dimostrato a pag. 265 secondo il quale *gli impulsi e le variazioni della quantità di moto, prese queste ultime col segno cambiato, si debbono far equilibrio.*

Saremo così condotti a scrivere le sei equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
-(\omega_1-\omega_0)\sum my &= \int_t \mathcal{X}dt + \int_t X'dt + \int_t X''dt\\
(\omega_1-\omega_0)\sum mx &= \int_t \mathcal{Y}dt + \int_t Y'dt + \int_t Y''dt\\
0 &= \int_t \mathcal{Z}dt + \int_t Z'dt + \int_t Z''dt\\
-(\omega_1-\omega_0)\sum mxz &= \int_t \mathcal{L}dt - h\int_t Y''dt\\
-(\omega_1-\omega_0)\sum myz &= \int_t \mathcal{M}dt + h\int_t X''dt\\
(\omega_1-\omega_0)\, J &= \int_t \mathcal{N}dt
\end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

L'ultima di queste equazioni (che non contiene nessuno degli impulsi incogniti delle reazioni di vincolo) coincide, come doveva accadere, colla (51).

Le cinque equazioni precedenti, con procedimento affatto identico a quello da noi illustrato nel caso delle forze ordinarie (pag. 169), si possono utilizzare per la determinazione delle cinque incognite:

$$\int_t X'dt$$

$$\int_t Y'dt$$

$$\int_t X''dt$$

$$\int_t Y''dt$$

$$\int_t Z'dt + \int_t Z''dt$$

Non staremo dunque a ripeterci.

* * *

Preferiamo passare senz'altro a chiederci se, ed in quali condizioni, può darsi il caso che i vincoli non risentano azione alcuna per effetto dell'urto. In quel caso le (54) si debbono ridurre alle seguenti:

$$-(\omega_1 - \omega_0) \sum my = \int_t \mathscr{X}\, dt$$

$$(\omega_1 - \omega_0) \sum mx = \int_t \mathscr{Y}\, dt$$

$$0 = \int_t \mathscr{Z}\, dt$$

$$-(\omega_1 - \omega_0) \sum mxz = \int_t \mathscr{L}\, dt$$

$$-(\omega_1 - \omega_0) \sum myz = \int_t \mathscr{M}\, dt$$

$$(\omega_1 - \omega_0) J = \int_t \mathscr{N}\, dt$$

Ora la terza di queste equazioni ci avverte esser prima di tutto indispensabile che l'impulso applicato (l'unico rimasto in gioco dopo la supposta scomparsa di quelli derivanti dai vincoli) giaccia in un piano normale all'asse di rotazione.

Quanto al significato delle altre equazioni lo si comprenderà più facilmente se, approfittando di quel tanto di libertà di scelta degli assi coordinati che ci è ancor consentita, si attribuiranno a questi assi delle posizioni un po' particolari.

Basta infatti supporre che uno dei piani coordinati passanti per l'asse di rotazione, per esempio il piano zx, passi per il baricentro G del solido, perchè si abbia:

$$\sum my = 0$$

e quindi la prima di quelle equazioni si riduca a

$$0 = \int_t \mathscr{X}\, dt$$

Siamo così in grado di concludere che il predetto impulso deve essere normale a quel piano zx determinato dall'asse di rotazione e dal baricentro.

D'altra parte, poichè, per ipotesi, i vincoli non son destinati ad intervenire, i due punti O' ed O'' non son più, in ultima analisi, dei punti particolari, bensì due punti qualunque dell'asse di rotazione.

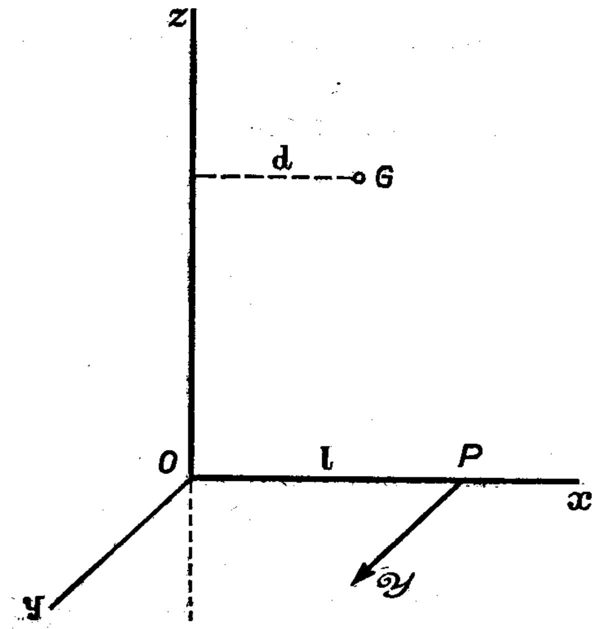

Fig. 79.

Nulla ci vieta pertanto di spostare l'origine lungo l'asse z, scegliendola proprio in quel punto O in cui l'asse stesso è intersecato dal piano ad esso normale che contiene l'impulso.

Ciò è quanto dire che la linea d'azione dell'impulso — che abbiamo già riconosciuto dover essere normale al piano zx — viene ad essere contenuta nel piano xy : essa sarà dunque una parallela all'asse y. Detta l la distanza di tale linea d'azione dall'asse y, nonchè dall'asse di rotazione (fig. 79), si avrà :

$$\mathscr{L} = 0$$
$$\mathscr{M} = 0$$
$$\mathscr{N} = \mathscr{Y} l$$

Ora, con queste posizioni, la quarta e la quinta equazione si riducono subito a

$$\sum mxz = 0$$
$$\sum myz = 0$$

ed esprimono la condizione che l'asse di rotazione sia un asse principale d'inerzia per il punto O.

L'ultima equazione poi, scritta sotto la forma:

$$(\omega_1 - \omega_0) J = l \int_t \mathcal{Y} dt$$

e confrontata colla seconda:

$$(\omega_1 - \omega_0) \sum mx = \int_t \mathcal{Y} dt$$

ci conduce senz'altro alla relazione:

$$l = \frac{J}{\sum mx} = \frac{J}{Md}$$

nella quale si è indicata al solito con

$$M = \sum m$$

la massa totale del solido, e con

$$d = \frac{\sum mx}{\sum m}$$

la distanza del suo baricentro G dall'asse di rotazione.

Convien pertanto concluderne che:

perchè sotto l'azione di un urto applicato ad un solido girevole attorno ad un asse fisso i vincoli non sviluppino reazione di sorta, occorre e basta:

1° *che l'asse fisso sia asse principale d'inerzia per uno dei suoi punti* O;

2° *che l'urto si eserciti perpendicolarmente al piano che contiene l'asse ed il baricentro* G *del solido;*

3° *che la linea d'azione dell'impulso incontri questo piano nel punto* P *situato sulla perpendicolare all'asse condotta per* O, *ad una distanza da* O *pari ad:*

$$l = \frac{J}{Md}$$

Ma questa distanza non è altro che la lunghezza del pendolo composto costituito dal solido dato, supposto orientato in modo che l'asse di rotazione risulti orizzontale.

Tra il punto P, che prendè in questa teoria il nome di *centro di percussione*, ed il punto O dell'asse di rotazione, intercedono pertanto quelle medesime relazioni di posizione che, nella teoria del pendolo composto (pag. 180), noi abbiano riconosciute come caratteristiche del centro di oscillazione per rapporto al centro di sospensione.

***

Il pendolo balistico (*).

È un dispositivo sperimentale che serviva correntemente alla misura della velocità dei proietti quando questi non avevano nè le velocità nè le masse cospicue cui oggi siamo avvezzi.

Può tuttavia venire ancora applicato pei piccoli calibri, meglio ancora per le palle da fucile, ed offre occasione ad osservazioni altamente istruttive.

Si tratta in sostanza di un pendolo composto il quale porta un recipiente cilindrico pieno di sabbia o di qualche materia molle nella quale il proietto va ad affondarsi (fig. 80). Quando il proietto è in posizione di riposo l'asse del recipiente deve coincidere colla orizzontale condotta pel centro di oscillazione (nel piano di oscillazione) del pendolo: colla stessa orizzontale si avrà cura di far anche coincidere la traiettoria del proietto immediatamente prima dell'urto.

Il sistema essendo, per costruzione, simmetrico per rapporto al predetto piano di oscillazione, non v'è dubbio che le tre condizioni poc'anzi enunciate siano soddisfatte: l'urto non darà perciò origine ad alcuna reazione di vincolo, e per studiarne gli effetti noi potremo considerare le due parti del sistema — pendolo e proietto — come libere nello spazio, e su ciascuna di esse immaginar applicato l'impulso derivante dall'azione dell'altra.

In virtù di questi due impulsi, naturalmente eguali e contrarii, la velocità angolare del pendolo passerà dal valore *zero*

(*) Cfr. L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris, 1915, pag. 149. H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 458.

ad un certo valore ω mentre la velocità del proietto passerà dal valore iniziale (incognito) v al valore $l\omega$.

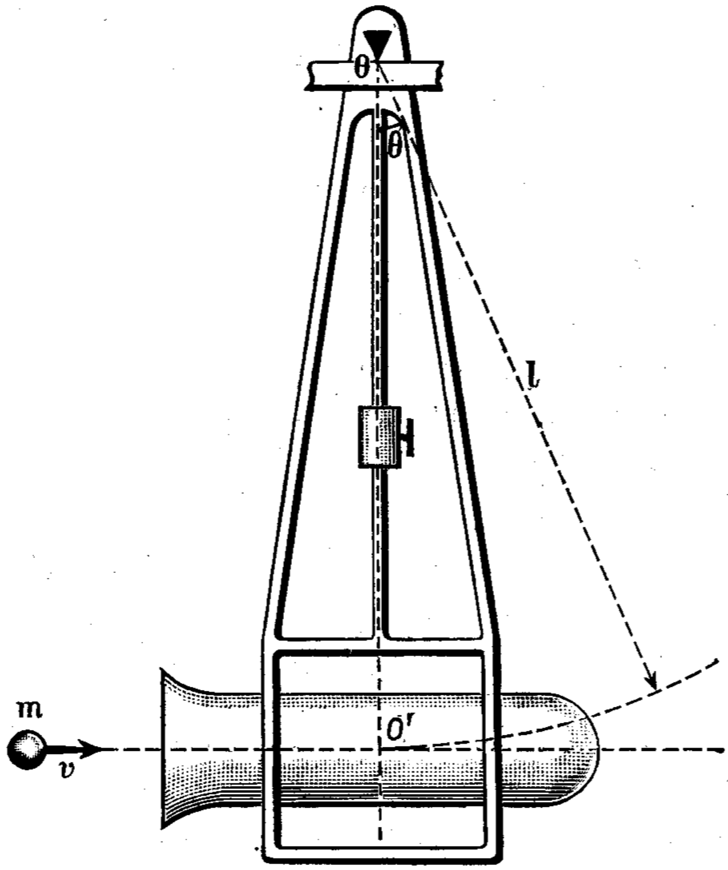

Fig. 80.

Noi designeremo con F l'intensità della forza d'urto in un istante generico, e quindi con

$$\int F dt$$

il valore dell'impulso.

Denoteremo poi con m la massa del proietto, con M la massa del pendolo, con J il momento di inerzia di questo per rapporto al suo asse di sospensione.

E scriveremo:

1° che la quantità di moto perduta nell'urto dal proietto dev'essere eguale all'impulso:

$$m\,(v - l\omega) = \int_t F dt$$

2° che il momento (per rapporto all'asse di sospensione) della quantità di moto acquistata per effetto dell'urto dal pendolo deve essere eguale all'analogo momento dell'impulso:

$$J\omega = l \int_t F\,dt$$

Dal paragone di queste due equazioni si ricava subito la relazione:

$$J\omega = ml\,(v - l\omega)$$

la quale ci permette di esprimere la velocità incognita v in funzione della velocità angolare ω con cui il pendolo, immediatamente dopo l'urto, si diparte dalla sua posizione di riposo; si ha infatti:

$$v = \frac{J + ml^2}{ml}\,\omega$$

Notiamo, fra parentesi, prima di passar oltre, che allo stesso risultato si può anche giungere applicando il teorema di Carnot.

Anche qui infatti, come già nel caso delle due sfere anelastiche, l'urto viene a creare tra il pendolo ed il proietto un nuovo vincolo permanente. La perdita di forza viva deve dunque riuscir eguale alla forza viva dovuta alle velocità perdute.

Ora l'equazione che esprime questa eguaglianza:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,(J + ml^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,m\,(v - l\omega)^2 + \frac{1}{2}\,J\omega^2$$

fatte le opportune riduzioni, conduce alla relazione tra v ed ω che abbiamo poc'anzi trovata.

***

Giunti a questo punto della nostra indagine non abbiamo, per completarla, che da richiamar cose note. La velocità angolare ω con cui il pendolo si diparte dalla sua posizione di riposo si può infatti immediatamente determinare se si misura la sua elongazione.

A tal fine, detta d la distanza del baricentro del pendolo dal suo asse di sospensione, e quindi:

$$D = \frac{Md + ml}{M + m}$$

la distanza dallo stesso asse del baricentro del sistema composto del pendolo e del proietto — resi, dopo l'urto, solidali — basterà scrivere:

$$\frac{1}{2}(J + ml^2)\,\omega^2 = (M + m)\,g\,D\,(1 - \cos\theta)$$

$$= 2\,(Md + ml)\,g\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

e ricavarne:

$$\omega = 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\sqrt{g\,\frac{Md + ml}{J + ml^2}}$$

Sostituendo si trova:

$$v = 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,\frac{\sqrt{g\,(Md + ml)\,(J + ml^2)}}{ml}$$

Ma noi non abbiamo ancora, fin qui, messo in conto che

$$l = \frac{J}{Md}$$

Grazie a questa particolare condizione l'espressione trovata di v si semplifica alquanto ed assume la forma:

$$v = 2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}\,\frac{Md + ml}{m}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

V'è poi chi vuol trovare una semplificazione ulteriore nel fatto che l'arco descritto, nella sua elongazione, dal centro di oscillazione, è sotteso da una corda di lunghezza

$$c = 2\,l\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$$

in funzione della quale si può esprimere la velocità incognita v sotto la forma:

$$v = c\left(1 + \frac{Md}{ml}\right)\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Qualunque sia l'espressione che si vuol adottare tra le due che abbiamo qui indicate, vale la pena di tener presente che al posto delle masse si possono sempre, senza inconvenienti, sostituire i rispettivi pesi.

Gli elementi occorrenti pel calcolo di v sono così tutti di immediato e facile rilievo in ciascun caso particolare. Il punto più delicato dell'esperienza sarà ancora la determinazione della lunghezza l del pendolo composto, per la quale determinazione si ricorrerà al paragone con un pendolo semplice avente la stessa durata di oscillazione del pendolo composto adottato.

L'esperienza stessa ci dirà poi se la determinazione in discorso è stata fatta colla dovuta esattezza. Basterà controllare che la durata di oscillazione non sia mutata dopo che al pendolo è stata aggiunta la massa m del proietto proprio in corrispondenza del suo centro di oscillazione.

Oppure si potrà verificare l'effettiva assenza di ogni qualsiasi azione sui vincoli per effetto dell'urto. A tal fine basta far portare il pendolo da due coltelli poggianti su di un piano orizzontale perfettamente levigato (sicchè i coltelli possano scorrere su di esso senza incontrar sensibile resistenza di attrito) e verificare che nell'istante dell'urto non avvenga scorrimento alcuno. Basterebbe infatti che la traiettoria del proietto passasse un poco al di sopra o un poco al di sotto del centro di percussione (cioè del centro di oscillazione del pendolo) per determinare degli scorrimenti dei coltelli sul loro piano d'appoggio nell'uno o nell'altro senso.