VI.

IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Nei già citati suoi *Philosophiae naturalis principia mathematica* Newton scriveva:

" Le forze che agiscono sopra una macchina si equilibrano reciprocamente allorquando le loro grandezze misurate nella direzione dei rispettivi spostamenti (componenti utili) stanno tra loro nella ragione inversa delle velocità di questi spostamenti. Questa legge si verifica indistintamente in tutte le macchine, il cui scopo consiste tutto nel diminuire la velocità per aumentare la forza: ed è così che si risolve il problema di muovere un peso dato, o di vincere una data resistenza con una forza data.

" Imperocchè l'equilibrio sussisterà bensì se le componenti utili della potenza e della resistenza sono inversamente proporzionali alle velocità dei loro punti di applicazione: ma non appena l'azione della potenza, misurata dal prodotto della sua componente utile per la rispettiva velocità, oltrepassi l'analoga azione della resistenza, allora la prima vincerà la seconda. E se l'ineguaglianza è tale da compensare, anzi da vincere anche le resistenze che nascono dall'attrito fra i varii organi in movimento, l'azione sovrabbondante della potenza determina delle accelerazioni nelle varie parti della macchina e nei corpi che comunque ostacolano il suo movimento.

" In conclusione: se l'azione della potenza è misurata dal prodotto della sua componente utile per la velocità del suo punto di applicazione, e se similmente si calcola la reazione della resistenza tenendo conto insieme di tutte le forze resistenti che derivano dal sollevamento eventuale di pesi, dalla coesione e dagli attriti, *nonchè dalle accelerazioni* delle singole parti in movimento, si può affermare che azione e reazione in ogni macchina, saranno sempre eguali ed opposte „ (*).

In questo brano, che non potrebbe essere nè più chiaro, nè più preciso, Newton mostra chiaramente di essere riuscito a sollevarsi dalla considerazione del solito punto materiale isolato a quella di una macchina, vale a dire di un sistema eminentemente complesso e soggetto non soltanto a forze, ma altresì a vincoli di ogni sorta, ed addita con meravigliosa sicurezza la via che la scienza avrebbe dovuto percorrere per risolvere il problema generale della dinamica dei sistemi (**).

Ma disgraziatamente questo brano restò per lunghi anni lettera morta: fu anzi soltanto in tempi relativamente recenti che esso fu rimesso in luce per opera di Thomson e Tait: il principio generale che è in esso implicitamente ma chiaramente contenuto, venne formulato esplicitamente per la prima volta da D'Alembert.

Questo principio non è in ultima analisi che una generalizzazione di quell'enunciato particolare relativo alla forza d'inerzia che a suo tempo abbiamo presentato come un modo concreto di esprimere la relazione fondamentale tra forza ed accelerazione.

Si trattava allora di un solo punto materiale isolato, il quale sotto l'azione di una data forza si muoveva di moto rettilineo uniformemente accelerato: ed abbiamo detto che si poteva esprimere la legge del moto dicendo che vi è in ogni istante equilibrio fra la forza applicata (misurata dai suoi effetti statici) e la forza d'inerzia (definita come il prodotto della massa per l'accelerazione, cambiata di segno).

Non era quello, lo ripetiamo, un principio nuovo: era semplicemente un nuovo modo di esprimere una relazione già conosciuta.

D'Alembert ne ha fatto un principio mirabilmente fecondo,

(*) “ Si aestimetur agentis actio ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio aestimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatibus et viribus resistendi ab earum attritione, cohaesione, pondere et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper aequales „. [Newtoni *Principia Philosophiae*, Tomus primus, Genevae, MDCCXXXIX – *Axiomata sive leges motus, Scholium*, pag. 60].

(**) Cfr. H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pag. 141.

generalizzando quell'enunciato ad un sistema qualunque, cioè ammettendo che *in un sistema composto di un numero qualunque di punti materiali, soggetti a vincoli affatto arbitrarii, le forze applicate e le forze d'inerzia si debbono fare equilibrio.*

***

Le parole già citate di Newton bastano a dimostrare lo spirito di questo principio, cioè le ragioni che ci possono indurre ad annoverare le forze d'inerzia come delle vere e proprie forze effettivamente applicate al sistema. Poche considerazioni di carattere formale serviranno a chiarirne la portata pratica ed il valore.

Consideriamo un sistema di punti materiali $M, M', M'' \ldots$ sollecitati da certe forze $F, F', F'' \ldots$ le quali, se i punti fossero completamente liberi ed indipendenti, comunicherebbero loro certe ben determinate accelerazioni.

In realtà però i punti che noi consideriamo non saranno liberi, ma bensì soggetti a certi vincoli, in causa dei quali essi assumeranno delle accelerazioni $a, a', a'' \ldots$ generalmente diverse dalle precedenti.

Indichiamo con $E = m \,.\, a$, $E' = m' \,.\, a'$, $E'' = m'' \,.\, a'' \ldots$ le forze che occorrerebbe applicare ai singoli punti, supposti liberi, per conferire loro le accelerazioni effettive.

Queste forze si devono poter effettivamente ottenere componendo le forze applicate colle reazioni incognite dei vincoli che indicheremo rispettivamente con $V, V', V'', \ldots$

Ora dire che le forze effettive E sono le risultanti delle forze applicate F e delle reazioni dei vincoli V equivale a dire che il sistema delle $-E, F, V$ è in equilibrio, ossia ancora che le $-E$ e le F sono equilibrate dai vincoli.

Ma le forze effettive cambiate di segno non sono altro che le forze d'inerzia: donde il nostro enunciato.

***

La fig. 24 rappresenta un caso particolare che è molto istruttivo: un'unica massa è vincolata a muoversi sopra un piano inclinato privo di attrito sotto l'azione del solo suo peso $P = m \,.\, g$ che è quindi l'unica forza applicata.

È evidente che se si potesse comporre la P colla reazione (incognita) V del piano d'appoggio, si dovrebbe ottenere a guisa di risultante la forza effettiva $E = m \cdot a$.

D'Alembert ci dice soltanto questo: che fare quella composizione equivale a stabilire l'equilibrio delle tre forze P, V e $-E$, ossia ancora a stabilire l'equilibrio delle forze P e $-E$ grazie al vincolo.

Ora noi conosciamo bene le condizioni di equilibrio sopra un piano (privo di attrito): esse si riducono ad imporre che la risultante delle forze sia normale al piano: ciò che si esprime scrivendo che deve essere nulla la somma delle proiezioni ortogonali delle forze sul piano stesso.

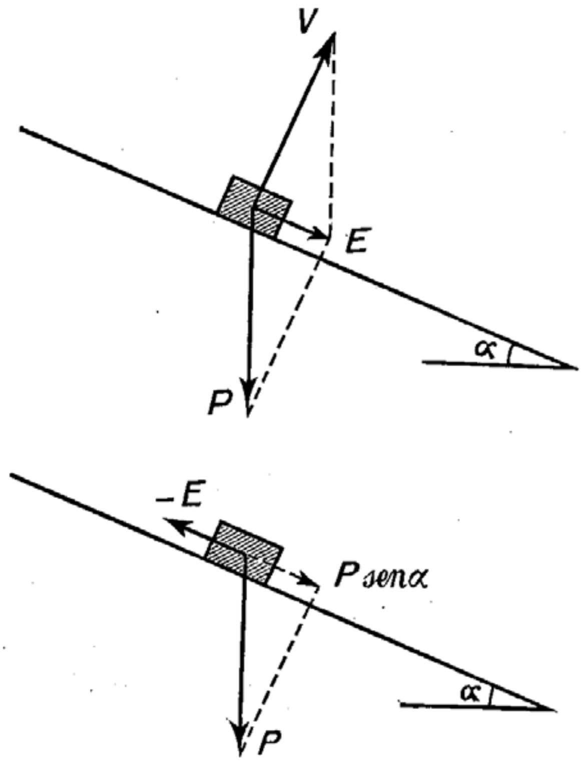

Fig. 24.

Ma la forza d'inerzia, come l'accelerazione di cui è funzione, deve per necessità di cose essere parallela al piano: si proietterà pertanto in vera grandezza. La proiezione del peso sarà invece misurata dal prodotto di esso per il seno dell'angolo che il piano dato fa col piano orizzontale. Si avrà dunque la condizione:

$$P \cdot \text{sen}\, \alpha - E = 0$$

ossia:

$$m \cdot g \cdot \text{sen}\, \alpha - m \cdot a = 0$$

dalla quale si ricava subito:

$$a = g \cdot \text{sen}\, \alpha$$

come aveva trovato Galileo.

* * *

Ho detto che l'esempio è istruttivo, e lo è realmente in questo senso: che esso mette in chiaro quello che è il pregio sostanziale del nuovo principio.

È infatti fuor di dubbio che esso conduce alla effettiva risoluzione del problema del moto perchè trasforma la relazione di proporzionalità che, per definizione, intercede tra le forze effettive e le accelerazioni effettive, in una relazione (in generale assai più complicata) tra le stesse accelerazioni effettive, che sono le incognite del problema, e le forze applicate, che ne sono i dati.

Ma a questo risultato il principio di D'Alembert ci conduce soltanto a condizione che del sistema che noi consideriamo, noi abbiamo già fatto lo studio statico: la risoluzione del problema dinamico è cioè ricondotta a quella del corrispondente problema di equilibrio.

E ciò può considerarsi, a seconda del punto di vista, come un pregio o come un difetto.

È un pregio in quanto il problema dell'equilibrio è generalmente più semplice: ed una volta risolto quello, il principio di D'Alembert ci fornisce una *regola pratica e sicura* per dedurne la soluzione del problema del moto, senza costringerci più a fare alcun ragionamento nè alcuna indagine particolare sulle leggi a cui il moto obbedisce. Ma per ciò stesso non v'è da sperare di trarre dalla applicazione del principio suddetto notizia alcuna che ci illumini sul fenomeno dinamico e ce ne faccia in qualche modo penetrare le ragioni e le leggi generali.

Si può con Ernesto Mach (*) esprimere questa che è la caratteristica sostanziale che differenzia il principio di D'Alembert da tutti quelli che siamo venuti prima studiando, col dire che il suo valore è di ordine eminentemente *economico*.

* * *

Per chi si ponga da questo particolare punto di vista della maggior economia del pensiero, tutta la dinamica si può far derivare da queste tre semplicissime proposizioni, le prime due

(*) Cfr. E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 324.

delle quali sono da considerarsi come delle definizioni, la terza invece come un postulato che l'esperienza conferma in tutte le sue conseguenze:

1) Ciascun elemento di volume è caratterizzato da un parametro, che si chiama la sua massa.

2) Si dice forza d'inerzia di un elemento di volume il vettore, parallelo al vettore accelerazione, diretto in senso contrario, e la cui grandezza è quella del vettore accelerazione moltiplicata per la massa.

3) Sussiste in ogni istante equilibrio tra tutte le forze applicate all'elemento di volume, purchè si comprenda fra esse la forza d'inerzia.

La dinamica è allora ridotta alla pura e semplice deduzione matematica delle conseguenze di queste tre proposizioni, ed al confronto di quelle conseguenze coi fatti.

La deduzione non presenta grandi difficoltà: si tratta infatti soltanto di scrivere, in ciascun caso speciale, le equazioni dell'equilibrio affermato dal principio di D'Alembert, ed è da prevedersi che ciò si potrà sempre fare in varii modi, utilizzando quei medesimi procedimenti che a tal fine si impiegano nella Statica. Potremo cioè applicare il principio della leva, o della composizione delle forze, o dei momenti statici, come potremo applicare quello dei lavori virtuali. La differenza sarà solo questa: che, nel primo caso, noi dovremo introdurre nelle equazioni le forze di vincolo, generalmente sconosciute, salvo ad eliminarle poi pazientemente utilizzando la loro proprietà di essere sempre a due a due eguali ed opposte, in omaggio al principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione. Applicando il principio dei lavori virtuali noi avremo invece il vantaggio di far astrazione da tutte le reazioni dei vincoli che, nel movimento del sistema, non compiono lavoro.

Il primo che abbia pensato a scrivere l'equazione dei lavori virtuali facendovi comparire, insieme alle forze effettivamente applicate, anche le forze d'inerzia, fu J. L. Lagrange (1736-1818) il quale, nella sua *Mécanique analytique* pubblicata per la prima volta nel 1788, dimostrò come, fondata su quella equazione, la risoluzione dei più differenti problemi di Meccanica si riducesse tutta e solamente ad una questione di calcolo.

La Meccanica aveva chiuso con Newton il faticoso, ma glorioso periodo della scoperta dei principii: con Lagrange essa ha acquistati tutti i caratteri di una scienza matematica organicamente costituita.

Orbene, noi ci accingiamo a prospettare a grandi linee, nei capitoli che seguono, il mirabile edificio analitico che Lagrange ha architettato.

Nello svolgimento sistematico delle equazioni fondamentali che ora passiamo a scrivere, e prima ancora di aver occasione di farne vedere le applicazioni a singoli problemi speciali, noi ritroveremo, sotto forma di teoremi generali, i varii principii che siamo venuti fin qui esponendo e discutendo. Le dimostrazioni che ne daremo, per quanto importanti perchè ne precisano il grado di generalità ed il rigore, non ci potranno però trarre in inganno: non è ad esse, ma sempre e soltanto alle discussioni che precedono, che noi dovremo rifarci per aver lume sul significato vero e sulla vera portata di quei teoremi.

* * *

Prima però di iniziare l'esposizione sistematica della dinamica analitica, vogliamo ancora soffermarci per un momento sul principio di D'Alembert per far vedere come esso possa anche mettersi sotto un'altra forma singolarmente elegante e suggestiva (*).

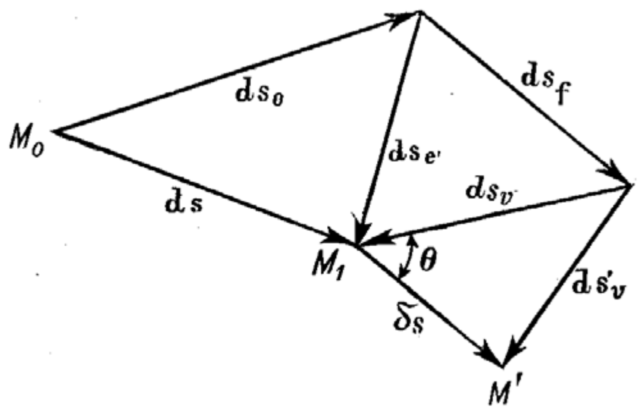

Fig. 25.

Riprendiamo a tal fine in considerazione uno qualunque M di quei certi punti materiali costituenti il sistema dato, ed indi-

(* Cfr. E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1895, pag. 334, nonchè L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pag. 46.

chiamo con ds lo spostamento elementare $M_0 M_1$ (fig. 25) che quel punto subisce in un intervallo piccolissimo di tempo dt.

Noi sappiamo che ds si può sempre considerare come la somma *geometrica* dello spostamento:

$$ds_0 = v_0 \, . \, dt$$

che (in virtù della velocità v_0 posseduta all'inizio dell'intervallo di tempo considerato) il punto M subirebbe, se fosse libero da ogni vincolo e sottratto ad ogni forza applicata, e dello spostamento:

$$ds_e = \frac{1}{2} \, . \, a \, . \, dt^2 = \frac{E}{2m} \, dt^2$$

che, secondo la (2) o la (13), la forza efficace E determinerebbe agendo da sola pel tempo dt sullo stesso punto, supposto naturalmente sempre libero da ogni vincolo ed inizialmente in quiete.

Se poi si vuol tener conto che la forza efficace E non è in realtà nient'altro che la risultante della forza applicata F e della reazione incognita di vincolo V, si può anche dire che, per ottenere lo spostamento effettivo ds bisogna sommare *geometricamente*:

$$ds_0 = v_0 \, . \, dt$$

con i due spostamenti:

$$ds_f = \frac{F}{2m} \, dt^2 \qquad \text{e} \qquad ds_v = \frac{V}{2m} \, dt^2$$

che lo stesso punto M, supposto inizialmente in quiete e libero da ogni vincolo, verrebbe a subire se su di esso si facessero agire separatamente e successivamente la forza applicata F, e la reazione di vincolo V, considerata essa pure, non già come una reazione incognita, bensì come una forza data.

Ma le V non cessano per questo di essere delle reazioni di vincolo, vale a dire delle forze che, *per definizione*, non fanno alcun lavoro negli spostamenti compatibili coi vincoli quali essi sono nell'istante che si considera.

Esse devono pertanto soddisfare identicamente ogni equazione del tipo:

$$\sum V \, . \, \delta s \, . \cos \theta = 0$$

nella quale:

δs sia uno qualunque di questi spostamenti compatibili, il quale faccia passare il punto generico M dalla posizione M_1 (che esso viene effettivamente ad occupare alla fine dell'intervallo di tempo dt) alla posizione M' che è poi una qualunque di quelle che, sempre compatibilmente coi vincoli, lo stesso punto potrebbe occupare;

θ sia l'angolo che la direzione di questo spostamento δs fa colla direzione della reazione di vincolo V che è poi quella stessa dello spostamento:

$$ds_v = \frac{V}{2m} dt^2$$

e la sommatoria sia estesa a tutti i punti materiali che costituiscono il sistema considerato.

Tenuto conto che l'intervallo di tempo dt, qualunque esso sia, è certamente lo stesso per tutti i punti del sistema, epperò va trattato come una costante rispetto alla sommatoria, tanto vale scrivere:

$$\Sigma\, 2\, m \,.\, ds_v \,.\, \delta s \,.\, \cos\theta = 0$$

D'altronde si ha dalla figura:

$$ds_v'^2 = ds_v^2 + \delta s^2 - 2\, ds_v \,.\, \delta s \,.\, \cos\theta$$

Ora se si moltiplicano entrambi i membri di questa eguaglianza per la massa m del punto cui essa si riferisce, e si somma membro a membro questa con tutte le altre eguaglianze analoghe relative agli altri punti del sistema, tenendo presente il risultato poc'anzi stabilito, si giunge alla relazione:

$$\Sigma\, m \,.\, ds_v'^2 = \Sigma\, m \,.\, ds_v^2 + \Sigma\, m \,.\, \delta s^2$$

in cui tutti i termini sono evidentemente positivi.

Ciò è quanto dire che:

$$\Sigma\, m \,.\, ds_r'^2 > \Sigma\, m \,.\, ds_v^2$$

Si esprime ciò dicendo che:

la somma dei quadrati degli spostamenti imputabili alle reazioni, moltiplicati per le masse corrispondenti, assume nel moto *effettivo il più piccolo tra tutti i valori che essa potrebbe assumere in tutti i moti compatibili coi vincoli;*

o sotto altra forma:

il moto effettivo del sistema è quello per cui la somma dei quadrati degli spostamenti imputabili alle reazioni, moltiplicati per le masse corrispondenti, riesce minima compatibilmente coi vincoli.

Questo teorema è dovuto a Gauss.

***

Vediamone brevemente l'applicazione al solito semplicissimo caso di un'unica massa che si muove su di un piano inclinato, privo di attrito, sotto l'azione del solo suo peso:

$$P = mg$$

In questa ipotesi lo spostamento:

$$ds_f = \frac{P}{2m} dt^2 = \frac{1}{2} g \, . \, dt^2$$

che il punto subirebbe sotto la sola azione del suo peso — supposto il punto inizialmente in quiete e non vincolato al piano inclinato — riesce naturalmente verticale, e può, con una opportuna scelta delle scale, essere rappresentato dal vettore stesso che rappresentava l'accelerazione g nella nostra fig. 3 (pag. 26).

Quanto allo spostamento effettivo:

$$ds_e = \frac{1}{2} a \, . \, dt^2$$

è ovvio che dovrà essere diretto parallelamente al piano di appoggio, e che, colla medesima scelta delle scale, verrà rappresentato dallo stesso vettore che rappresenterà l'accelerazione incognita a.

Ciò posto il teorema di Gauss si riduce ad imporre che sia minimo lo spostamento ds_v; condizione questa che, una volta dato ds_f e data la direzione di ds_e, si verifica quando ds_v viene a coincidere colla perpendicolare abbassata dall'estremo di ds_f (ossia di g) sulla direzione di ds_e (ossia di a).

Si ritrova così per l'accelerazione incognita a il valore g' della fig. 3; e si ritrova insieme la relazione tra gli spazi percorsi sul piano inclinato e quelli che verrebbero percorsi sulla verticale se il grave cadesse liberamente, quale l'aveva trovata per primo Galileo (pag. 27).

***

Degno di attenzione è il fatto che il teorema di Gauss, così come il principio di D'Alembert cui equivale, comprende in sè come casi particolari anche le leggi della statica.

Basta per esempio pensare che il piano d'appoggio sia orizzontale — o, più generalmente, che la forza applicata invece di essere verticale sia normale al piano comunque orientato — per veder subito che il teorema di Gauss esige, per esser soddisfatto, che ds_v sia eguale ed opposto a ds_f.

Ciò che vuol dire, da una parte, che la reazione del piano d'appoggio dev'essere eguale e contraria alla forza applicata; d'altra parte che ds_e deve risultare identicamente nullo e che quindi la massa deve rimanere in quiete.