V.

LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

Noi abbiamo visto come il principio di D'Alembert, opportunamente combinato col teorema dei lavori virtuali, permetta di scrivere $3n - k$ equazioni differenziali che, riunite alle k equazioni di vincolo, costituiscono un complesso di $3n$ equazioni tra le $3n$ coordinate ed il tempo.

Abbiamo detto allora quali difficoltà si frappongano in pratica alla risoluzione di un tale sistema di equazioni.

In realtà, per essere veramente utili, quelle equazioni hanno bisogno di venir messe sotto una forma nuova, che Lagrange per primo ha scoperta, e nella quale le variabili non sono più legate da alcuna equazione di condizione.

A tal fine in luogo di considerare le $3n$ coordinate come delle incognite tenute a soddisfare alle k equazioni di vincolo, conviene servirsi di queste k equazioni di vincolo per esprimere le coordinate stesse in funzione di certe variabili indipendenti:

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \ldots, \quad q_r$$

in numero di

$$r = 3n - k$$

e considerare poi queste variabili come le nuove incognite del problema.

Si avranno così $3n$ espressioni che scriveremo, tanto per fissar le idee, sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q_1, q_2, \ldots, q_r, t) \\ y &= y(q_1, q_2, \ldots, q_r, t) \\ z &= z(q_1, q_2, \ldots, q_r, t) \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

e dalle quali, differenziando *senza far variare il tempo*, si potranno ricavare altrettante relazioni del tipo:

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_r}\delta q_r\\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_r}\delta q_r\\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_r}\delta q_r\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Per brevità di scrittura noi rappresenteremo con

$$x' = \frac{dx}{dt}$$
$$y' = \frac{dy}{dt}$$
$$z' = \frac{dz}{dt}$$

le derivate *totali* delle funzioni x, y, z per rapporto al tempo, e con

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2}$$
$$z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$$

le analoghe derivate seconde.

Poichè le x, y, z sono delle funzioni delle q e di t, epperò dipendono dal tempo in doppio modo cioè direttamente ed indirettamente (pel fatto che le variabili q sono alla lor volta delle funzioni di t), si avranno in ultima analisi per le x', y', z' delle espressioni del tipo:

$$\left.\begin{aligned}x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2}q_2' + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_r}q_r' + \frac{\partial x}{\partial t}\\ y' &= \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial y}{\partial q_2}q_2' + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_r}q_r' + \frac{\partial y}{\partial t}\\ z' &= \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial q_1}q_1' + \frac{\partial z}{\partial q_2}q_2' + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_r}q_r' + \frac{\partial z}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$q'_1, q'_2, \ldots, q_r'$ essendo le derivate delle singole variabili indipendenti q per rapporto al tempo.

Ora, siccome le $q_1', q_2', \ldots, q_r'$ per ipotesi non compaiono nelle (31), nulla ci vieta di considerarle come delle variabili intieramente distinte dalle $q_1, q_2, \ldots, q_r$, e di riguardar le x', y', z' come delle funzioni lineari di esse.

Prendendo allora le derivate parziali di dette funzioni rispetto a tali variabili si ottengono immediatamente le relazioni:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1'} = \frac{\partial x}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial x'}{\partial q_2'} = \frac{\partial x}{\partial q_2}; \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial y'}{\partial q_1'} = \frac{\partial y}{\partial q_1}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \quad \frac{\partial z'}{\partial q_r'} = \frac{\partial z}{\partial q_r}$$

Se invece si calcola la derivata parziale di una delle (33), per esempio della prima tra esse, per rapporto ad una delle variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_r$, per esempio per rapporto a q_1 — tenendo presente che nel calcolo stesso le $q_1', q_2', \ldots, q_r'$ possono senz'altro riguardarsi come delle costanti — si trova:

$$\frac{\partial x'}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q_1' + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 . \partial q_1} q_2' + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_r . \partial q_1} q_r' + \frac{\partial^2 x}{\partial t . \partial q_1}$$

Ma l'ultimo membro di questa eguaglianza non è evidentemente altro che:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$$

Si possono così stabilire le relazioni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial x'}{\partial q_1}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_2} = \frac{\partial x'}{\partial q_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{\partial y'}{\partial q_1}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial q_r} = \frac{\partial z'}{\partial q_r}$$

***

Tutto ciò premesso introduciamo l'espressione nota della forza viva del sistema:

$$W = \sum \frac{1}{2} m \left(x'^2 + y'^2 + z'^2 \right)$$

Derivando rispetto alle variabili indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_r$ si ottengono ovviamente delle espressioni del tipo:

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q} \right)$$

Derivando invece rispetto alle $q_1', q_2', \ldots, q_r'$ si ottengono delle espressioni del tipo:

$$\frac{\partial W}{\partial q'} = \sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'} \right) =$$

$$= \sum m \left(x' \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

Prendendo poi di queste ultime espressioni le derivate totali per rapporto al tempo, si ha:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q'}\right) = \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q} + z'' \frac{\partial z}{\partial q} \right) +$$

$$+ \sum m \left(x' \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} + y' \frac{d}{dt} \frac{\partial y}{\partial q} + z' \frac{d}{dt} \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

Ma l'ultima sommatoria, dopo ciò che abbiamo avvertito, può anche scriversi:

$$\sum m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q} + y' \frac{\partial y'}{\partial q} + z' \frac{\partial z'}{\partial q} \right)$$

epperò vale

$$\frac{\partial W}{\partial q}$$

Si avrà pertanto in definitiva:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q'}\right) = \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q} + z'' \frac{\partial z}{\partial q} \right) + \frac{\partial W}{\partial q}$$

***

Ritorniamo ora col pensiero alla (16) cioè alla equazione fondamentale della dinamica:

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

Scritta sotto la forma:

$$\Sigma\, m\, (x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = \Sigma\, (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)$$

essa si presta facilmente ad essere trasformata in modo da farvi comparire le nuove variabili q_1, q_2, ..., q_r in luogo delle coordinate x, y, z.

Se infatti nel suo primo membro noi sostituiamo alle $3n$ componenti δx, δy, δz dello spostamento virtuale le loro espressioni (32), quel primo membro diviene naturalmente una funzione lineare ed omogenea delle variazioni virtuali:

$$\delta q_1 , \quad \delta q_2 , \quad \ldots , \quad \delta q_r$$

nella quale funzione il coefficiente di una qualunque δq di tali variabili sarà della forma:

$$\sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q} + y'' \frac{\partial y}{\partial q} + z'' \frac{\partial z}{\partial q} \right)$$

epperò si potrà anche scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial q'} \right) - \frac{\partial W}{\partial q}$$

Così quel primo membro dell'equazione fondamentale della dinamica viene ad assumere la nuova forma:

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial q'} \right) - \frac{\partial W}{\partial q} \right] \delta q$$

Quanto al secondo membro, che rappresenta, come è noto, il lavoro delle forze applicate nel cambiamento virtuale di configurazione considerato, è sempre possibile metterlo sotto la forma:

$$\Sigma\, Q . \delta q$$

Basta infatti riflettere, per convincersene, che le X, Y, Z sono delle funzioni date dalle coordinate x, y, z e dal tempo; coll'aiuto quindi delle (31) e delle (32) il lavoro si potrà sempre esprimere come una funzione lineare nelle δq_1, δq_2, ... δq_r che definiscono il cambiamento di configurazione.

Se si tien presente che queste δq sono fra loro affatto indipendenti e completamente arbitrarie, si riesce anche a precisare in modo molto semplice il significato dei coefficienti Q.

Nulla ci vieta infatti di supporre per un momento che tutte le δq si annullino, salvo una: la sommatoria resta ridotta ad uno solo dei suoi termini; ed il coefficiente Q di quel termine non può esser altro che il quoziente ottenuto dividendo per δq il lavoro delle forze applicate relativo ad un cambiamento virtuale di configurazione in cui varii soltanto la q corrispondente.

Eccoci pertanto in grado di scrivere l'equazione generale del movimento sotto la forma:

$$\sum\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q'}\right)-\frac{\partial W}{\partial q}\right]\delta q=\Sigma\, Q\,\delta q \tag{34}$$

le sommatorie essendo estese da 1 ad r (grado di libertà del sistema).

Ma le δq sono, come abbiamo già detto, indipendenti: questa equazione esige dunque che i coefficienti delle singole variabili, nei due membri, siano eguali. Ciò è quanto dire che essa si decompone senz'altro nelle r equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_1'}\right)-\dfrac{\partial W}{\partial q_1}=Q_1\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_2'}\right)-\dfrac{\partial W}{\partial q_2}=Q_2\\[1ex]\cdots\cdots\cdots\cdots\\[1ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_r'}\right)-\dfrac{\partial W}{\partial q_r}=Q_r\end{array}\right\} \tag{35}$$

Queste sono le *equazioni di Lagrange*.

***

Esse sono in numero di r, tante cioè quanti sono i parametri q: essendo equazioni differenziali del secondo ordine, nella loro integrazione entreranno $2r$ costanti arbitrarie: ma, se si conoscono le posizioni e le velocità iniziali dei singoli punti del sistema, se cioè sono dati i valori delle q e delle q' per $t=0$ si disporrà di $2r$ condizioni coll'aiuto delle quali anche le costanti di integrazione riesciranno completamente determinate.

L'integrazione di queste equazioni può presentare difficoltà gravissime, sovente anche insormontabili: il problema meccanico è però in ogni caso ridotto ad un ben determinato problema di analisi.

Concludendo, le equazioni differenziali del moto si potranno sempre ottenere, in ciascun caso particolare, con un procedimento perfettamente uniforme ed assolutamente generale, cioè applicabile sempre quando le condizioni del sistema ed i vincoli ad esso imposti soddisfano alle condizioni da noi ammesse.

In questi casi — e sono gli unici di cui noi intendiamo occuparci, date le finalità ed il carattere essenzialmente elementare di questo nostro corso — si giunge al risultato in un modo che si potrebbe quasi chiamare automatico in quanto non esige da chi lo deve applicare nessuna riflessione, nessun ragionamento, nessuna discussione del problema concreto che egli sta per risolvere.

Abbiamo già detto in precedenza che questo è nello stesso tempo il principale pregio ed il maggior difetto del metodo. Qui non potremmo meglio sintetizzare questa idea che ripetendo le parole che J. Bertran scriveva a questo proposito nel " Journal de l'École Polytechnique „ (1848) e che L. Lecornu cita molto opportunamente nel suo trattato già più volte ricordato (*):

" L'abitudine di dedurre tutto dalle formole fa sovente perdere, almeno fino ad un certo punto, il sentimento chiaro e preciso delle verità meccaniche considerate in sè stesse: e, se è vero che incontestabili progressi della scienza sono dovuti all'introduzione dei metodi analitici più generali, è pur vero che, per compenso, le singole questioni vi appaiono sotto una forma assai poco evidente, sicchè questi metodi sono assai più idonei a convincere che a illuminare la nostra mente: risultato quest'ultimo che si raggiunge molto più sicuramente quando ci si sforza di penetrare con metodi intuitivi le relazioni intime tra cause ed effetti „.

(*) L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pagg. 85 e 86.

***

Quando i vincoli sono indipendenti dal tempo nelle (33) scompaiono i termini $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$: le x', y', z' divengono delle funzioni lineari ed omogenee nelle q': la forza viva W alla sua volta diviene quadratica ed omogenea nelle stesse variabili, sicchè, in virtù di una notissima proprietà delle funzioni omogenee, si può scrivere:

$$2W = \sum q' \frac{\partial W}{\partial q'}$$

o ciò che fa lo stesso:

$$W = \sum q' \frac{\partial W}{\partial q'} - W$$

Facendo la derivata totale dei due membri per rapporto a t, e tenendo presente che in W la variabile t compare sia attraverso le q che attraverso le q', si trova:

$$\frac{dW}{dt} = \sum q' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q'}\right) + \sum q'' \frac{\partial W}{\partial q'} - \sum \frac{\partial W}{\partial q} q' - \sum \frac{\partial W}{\partial q'} q'' =$$
$$= \sum q' \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) - \frac{\partial W}{dq}\right]$$

Ora quest'ultima sommatoria si ottiene moltiplicando i primi membri delle (35) per le rispettive q', e sommando: essa equivale dunque a $\sum Qq'$. Si ha pertanto:

$$\frac{dW}{dt} = \sum Qq' = \sum Q \frac{dq}{dt}$$

il che è quanto dire:

$$dW = \sum Q\, dq$$

Ma il primo membro è la variazione elementare della forza viva: il secondo misura, come abbiamo già avuto occasione di rilevare, il lavoro elementare delle forze applicate. Ecco così ritrovato il teorema delle forze vive.

***

Se le forze applicate ammettono un potenziale Π il loro lavoro elementare, per uno spostamento virtuale qualunque, sarà misurato da $\delta\Pi$. Ora Π essendo una funzione delle coordinate dei punti del sistema si potrà sempre esprimere in funzione delle nuove variabili q e del tempo t; si avrà così:

$$\Sigma\, Q\,\delta q = -\,\delta\Pi = -\sum \frac{\partial \Pi}{\partial q}\,\delta q$$

da cui:

$$Q = -\,\frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

e le equazioni di Lagrange assumono la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1'}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial q_r'}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} = 0$$

Che se, oltre ad esistere il potenziale delle forze, si verifica anche la precedente condizione della indipendenza dei vincoli dal tempo, si ha:

$$\delta W = -\,\delta\Pi$$

donde l'integrale delle forze vive:

$$W + \Pi = \text{costante}$$

nel quale W è da considerarsi come una funzione delle q e delle q', mentre Π è funzione delle sole q.

Nota sui vincoli non olonomi (*).

L'esistenza delle resistenze di attrito conduce non di rado alla considerazione di un tipo di vincolo affatto differente da quelli che sono stati fin qui considerati e definiti: tipo di vincolo che — se si eccettua qualche caso particolare assolutamente ovvio, del genere di quelli di cui abbiamo incidentalmente parlato a pag. 144 e seg. — non può venire trattato se non con specialissime cautele.

Supponiamo che due corpi a contatto possiedano delle superficie abbastanza scabre per rendere impossibile qualsiasi loro scorrimento relativo: noi dovremo allora riguardare come incompatibili col vincolo tutti quegli spostamenti virtuali dell'un corpo rispetto all'altro che implicherebbero scorrimento nel punto (o nei punti) in contatto.

S'intende che da ciò non segue affatto che questi punti siano vincolati a mantenersi indefinitamente in contatto: invece i due corpi possono, per esempio, rotolare l'uno sull'altro. Il moto elementare relativo si riduce allora notoriamente ad una rotazione attorno ad un asse passante per il punto (od i punti) di contatto.

L'azione mutua di quei due corpi è allora rappresentata da due forze di vincolo, necessariamente eguali ed opposte, le quali in generale sono inclinate sul piano tangente comune alle due superficie in contatto (come avviene sempre quando tra esse esiste attrito): ma se si escludono di proposito tutti gli spostamenti virtuali che implicano scorrimento, e ci si limita a considerare le rotazioni elementari di cui si è fatto cenno poc'anzi, la somma dei lavori virtuali di quelle due forze si mantiene identicamente nulla.

Ne risulta che il teorema dei lavori virtuali continua ad essere integralmente applicabile.

Invece le equazioni di Lagrange cessano di esserlo.

Ora, per quanto non sia nostra intenzione approfondire questo argomento, pure riteniamo indispensabile fare su di esso alcune osservazioni — se non altro per impedire che un'errata appli-

---

(*) L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome I, Paris 1914, pag. 475; tome II, Paris 1915, pag. 39.

cazione dei metodi esposti abbia a condurci a commettere dei gravi errori — rinviando il lettore desideroso di maggiori dettagli all'opera già citata del Lecornu (*).

*
* *

Incominciamo coll'osservare che l'assenza di scorrimenti non può, in generale, esprimersi con una equazione in termini finiti tra le coordinate dei punti del sistema.

Si abbia, per esempio, un corpo appoggiato sul piano coordinato xy. Siano x_0, y_0, 0 le coordinate del punto P del corpo che, nella posizione considerata, si trova a contatto del piano, ed x_1, y_1, z_1 le coordinate del medesimo punto in seguito ad uno spostamento virtuale: l'assenza di scorrimento si esprime imponendo che sian nulle le variazioni prime della x e della y; la condizione che il corpo in movimento non si distacchi dal piano di appoggio si traduce per parte sua imponendo che sia nulla la variazione prima della z; in simboli si scriveranno dunque le condizioni:

$$dx = 0 \qquad dy = 0 \qquad dz = 0$$

Le variazioni:

$$x_1 - x_0 \qquad y_1 - y_0 \qquad z_1$$

non saranno però nulle, bensì soltanto infinitesime del secondo ordine.

Non sarebbe affatto lo stesso scrivere:

$$x_1 - x_0 = 0 \qquad y_1 - y_0 = 0 \qquad z_1 = 0$$

perchè così si verrebbe a rendere assolutamente fisso il punto P: si verrebbe cioè ad escludere, insieme coi possibili scorrimenti, anche ogni possibile rotolamento del corpo sul piano.

Passando a considerare un caso un po' meno particolare, si può affermare che, dette q_1, q_2, ... q_6 le sei coordinate dalle quali si può far dipendere la posizione di un corpo rigido libero

(*) L. Lecornu, *Cours de mécanique*, tome II, Paris 1915, pag. 100 e seg.

nello spazio, per esprimere che questo corpo rotola senza strisciare su di una superficie fissa, bisogna scrivere una equazione della forma:

$$A_1 dq_1 + A_2 dq_2 + \ldots + A_6 dq_6 = 0$$

nella quale i coefficienti A sono funzioni delle q, ma il cui primo membro non è in generale un differenziale esatto.

In modo generale riterremo che le equazioni di vincolo potranno essere delle equazioni differenziali non integrabili tra le coordinate ed il tempo.

Hertz ha proposto di dare ai vincoli di questo genere il nome di *vincoli non olonomi* per contraddistinguerli da quelli che noi abbiamo studiati fin ora, e che egli chiama olonomi, i quali si possono sempre tradurre in equazioni a termini finiti fra le coordinate ed il tempo.

***

Ciò posto ecco a grandi linee come ci si dovrà comportare quando tra i vincoli ve ne sono di quelli non olonomi.

Si comincierà coll'esprimere le coordinate in funzione di r parametri q scelti in modo da soddisfare alle equazioni dei vincoli olonomi, come se altri vincoli non esistessero: e procedendo nel modo che già conosciamo, si giungerà ancora una volta all'equazione:

$$\sum \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial q'} \right) - \frac{\partial W}{\partial q} \right] \delta q = \Sigma\, Q \,\delta q$$

In essa però le variazioni virtuali δq non saranno più da considerarsi come indipendenti: esse dovranno verificare le equazioni dei vincoli non olonomi.

Se queste, come accade nella maggior parte dei casi pratici, sono lineari per rapporto alle derivate delle q prese rispetto al tempo, le equazioni a cui debbono soddisfare le δq (e nella deduzione delle quali il tempo va al solito trattato come una costante) riescono del tipo:

$$\begin{array}{l} A_1 \delta q_1 + A_2 \delta q_2 + \ldots + A_r \delta q_r = 0 \\ B_1 \delta q_1 + B_2 \delta q_2 + \ldots + B_r \delta q_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H_1 \delta q_1 + H_2 \delta q_2 + \ldots + H_r \delta q_r = 0 \end{array}$$

e non sono integrabili.

Sia h il numero di queste equazioni.

Moltiplichiamo i loro primi membri per altrettanti coefficienti indeterminati:

$$\lambda_a, \lambda_b, \ldots \lambda_h$$

poi combiniamoli colla equazione generale del moto, nel modo istesso che abbiamo esposto e discusso quando trattammo del metodo dei moltiplicatori di Lagrange [Cfr. *I fondamenti della Statica*, pag. 86]: saremo immediatamente tratti a concludere che devono separatamente annullarsi i coefficienti delle singole variazioni δq nella equazione risultante. Si ottiene così il sistema di r equazioni:

$$\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_1'}\right) - \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = Q_1 + \lambda_a A_1 + \lambda_b B_1 + \ldots + \lambda_h H_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_2'}\right) - \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = Q_2 + \lambda_a A_2 + \lambda_b B_2 + \ldots + \lambda_h H_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial W}{\partial q_r'}\right) - \dfrac{\partial W}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_a A_r + \lambda_b B_r + \ldots + \lambda_h H_r \end{array}$$

Se vi si aggiungono le h equazioni dei vincoli non olonomi, si hanno in tutto $r + h$ equazioni tra gli r parametri q, gli h moltiplicatori λ, ed il tempo: il problema sarà in generale ancora ben lontano dall'essere risolto: comunque noi potremo sempre considerare quelle $r + h$ equazioni come le equazioni del moto.