V.

LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Dalle osservazioni di Tycho-Brahe e dalle sue proprie, KEPLERO (1571-1630) aveva dedotte tre leggi empiriche del movimento dei pianeti attorno al sole:

1) i pianeti si muovono descrivendo delle ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi;

2) il raggio vettore che dal sole va a ciascun pianeta descrive aree eguali in tempi eguali;

3) i cubi degli assi maggiori delle orbite stanno tra loro come i quadrati dei tempi impiegati a percorrerle.

Orbene noi abbiamo già avuto occasione di rilevare, discutendo le scoperte di Galileo e di Huygens, che il movimento curvilineo di un corpo non si può spiegare se non ammettendo la presenza di un'accelerazione deviatrice continuamente rivolta dalla parte della concavità della traiettoria. Noi siamo così indotti a cercar di spiegare l'orbita ellittica dei pianeti ammettendo che su di essi si eserciti costantemente una forza rivolta dalla stessa parte dalla quale sta il sole.

Ma la legge delle aree si spiega subito (*) se si suppone che questa forza sia un'attrazione emanante proprio dal sole, epperò *diretta sempre secondo il raggio vettore che dal pianeta va al sole.*

Sia infatti AB (fig. 19) un elemento dell'orbita, descritto dal pianeta durante un intervallo piccolissimo di tempo θ; e sia S la posizione occupata dal sole e quindi SAB l'area contemporaneamente generata dal predetto raggio vettore. Se sul pianeta non agisse nessuna forza, in un successivo intervallo

(*) Cfr. E. MACH, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 180 e seg.

di tempo θ, egli descriverebbe un segmento di retta BC eguale ad AB ed allineato con esso; la nuova area generata dal raggio vettore sarebbe $SBC = SAB$. Ma supponiamo invece che il pianeta sia sollecitato da una forza diretta verso il sole S; questa forza, agendo da sola, durante il secondo degli intervalli di tempo considerati, farebbe percorrere al pianeta un certo segmento del raggio vettore; sia esso BD; per trovare la posizione dove si porterà effettivamente il pianeta alla fine del secondo intervallo di tempo basterà costruire il parallelogrammo che ha per lati BC e BD; ora l'area SBE che viene in queste condizioni ad essere generata dal solito raggio vettore è evidentemente eguale ad SBC e quindi anche ad SAB.

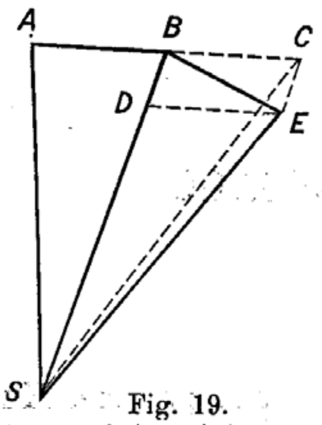

Fig. 19.

Viceversa basta osservare la figura per rendersi conto che perchè la nuova area sia eguale alla prima, come richiede la seconda legge di Keplero, è necessario che la forza deviatrice sia diretta proprio secondo il raggio che dal pianeta va al sole.

Il caso del moto circolare uniforme, che noi abbiamo studiato al principio del capo III, rientra evidentemente nell'attuale di cui è un caso particolare. Detta m la massa in movimento, v la sua velocità, r il raggio della circonferenza che essa descrive, e finalmente $T = 2\pi \frac{r}{v}$ la durata di una intiera rivoluzione, si ha per la forza centripeta il valore:

$$F = m \,.\, a = m \,.\, \frac{v^2}{r} = m \,.\, \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

che si può scrivere:

$$F = m \,.\, 4\pi^2 \frac{r^3}{T^2} \,.\, \frac{1}{r^2}$$

Ciò posto, la terza legge di Keplero richiede che il rapporto $\frac{r^3}{T^2}$ sia costante: ne risulta immediatamente che l'attrazione emanata dal sole deve essere inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Nel caso più generale delle orbite ellittiche, la terza legge di Keplero richiede che sia costante il rapporto del cubo del semiasse maggiore al quadrato del tempo; il calcolo è un po' più complicato, ma il risultato a cui si perviene è lo stesso:

l'attrazione che il sole esercita su di un pianeta è direttamente proporzionale alla massa di questo ed inversamente al quadrato della distanza.

***

Ad ISACCO NEWTON (1642-1726) spetta la gloria di aver per primo data questa elegante spiegazione delle leggi empiriche di Keplero; nonchè quella, ancor più grande, di aver fatto di questa legge della gravitazione universale la base di un sistema nel quale i fenomeni celesti e quelli terrestri sono direttamente ed intimamente connessi.

Per verità il tentativo di generalizzare le leggi della gravità riconnettendo ad esse quelle del moto degli astri, non era nuovo.

Plutarco, con una intuizione geniale, aveva indovinato che l'azione della gravità doveva estendersi fino alla luna, la quale è impedita di cadere solo dalla rapidità del suo movimento di rotazione.

Copernico aveva compreso che il peso non è che una particolare esplicazione di una proprietà più generale della materia, proprietà grazie alla quale gli stessi corpi celesti debbono in qualche modo agire gli uni sugli altri.

Ma Newton, con una felice quanto ardita applicazione del principio di continuità, giunge a dimostrare che l'accelerazione che è condizione necessaria del movimento curvilineo dei pianeti attorno al sole, come dei satelliti attorno ai pianeti, non differisce da quella accelerazione di gravità che le ricerche di Galileo e di Huygens avevano ormai resa familiare.

Fin dalle prime pagine dei suoi *Philosophiae naturalis principia mathematica* pubblicati a Londra nel 1686, si leggono le seguenti osservazioni nelle quali non si saprebbe se ammirare maggiormente la semplicità o la profondità:

" Se la gravità cessasse di agire sopra un proietto la sua traiettoria non si incurverebbe più verso la terra: egli se ne andrebbe diritto attraverso il cielo con un movimento uniforme (astrazion fatta, si intende, dalla resistenza dell'aria). La gravità lo devia da questa corsa rettilinea trascinandolo costantemente verso terra, più o meno rapidamente a seconda del suo peso e della sua velocità: più precisamente la deviazione è tanto meno sentita, e quindi il proietto cade tanto più lontano, quanto più la sua velocità è grande ed il suo peso è piccolo.

" Una palla di piombo, lanciata da un cannone dall'alto di una montagna con una data velocità orizzontale, percorre, per esempio, due miglia prima di toccare il suolo. Ebbene, essa cadrebbe due volte, dieci volte più lontano se la sua velocità iniziale fosse due volte, dieci volte più grande (astrazion fatta, sempre, dalla resistenza dell'aria).

" Anzi continuando ad aumentare la sua velocità iniziale si potrebbe rendere la traiettoria sempre meno curva, e quindi il punto della caduta sempre più lontano: si potrebbe giungere fino a farle fare il giro completo della terra o anche fino a lanciare la palla negli spazii celesti in modo che il suo movimento si conservi indefinitamente.

" Nello stesso modo con cui un simile proietto verrebbe mantenuto sulla sua traiettoria curvilinea dal peso, si può pensare che accada della luna: che cioè essa sia forzata a percorrere la sua orbita per l'azione della gravità stessa o di un'altra forza consimile: che se una tal forza non esistesse non v'è dubbio che la luna dovrebbe allontanarsi da noi indefinitamente in linea retta ".

Newton dimostrava così quanto sia verosimile supporre che la gravità terrestre si faccia sentire fin sulla luna; d'altra parte la discussione testè esposta delle leggi di Keplero gli aveva appreso che le azioni sui corpi celesti debbono obbedire alla legge della proporzionalità inversa ai quadrati delle distanze: era dunque ben naturale che si accingesse a verificare la sua ipotesi col calcolo (*).

Si può con buona approssimazione ammettere che la luna descriva attorno alla terra una circonferenza con moto uniforme, impiegando per una intiera rivoluzione 27 giorni, 7 ore e 43 minuti, il che è quanto dire 39343×60 secondi.

La sua distanza dalla terra è di circa 60 raggi terrestri; la

---

(*) H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pag. 154 e seg. — Cfr. anche L. Lecornu, *La mécanique, les idées et les faits*, Paris 1918, pag. 109.

lunghezza della sua orbita sarà dunque 60 volte la lunghezza di un meridiano terrestre; data la definizione del metro, diremo addirittura che la lunghezza della sua orbita è di $60 \times 40.000.000$ di metri.

La sua velocità si otterrà dividendo questa lunghezza per il tempo impiegato a percorrerla

$$v = \frac{60 \times 40.000.000}{39343 \times 60} = 1017 \text{ m/sec.}$$

Dividendo il quadrato di questa velocità per il raggio si avrà finalmente il valore dell'accelerazione centripeta:

$$a = 0{,}272 \text{ cm/sec.sec.}$$

Alla superficie della terra, vale a dire ad una distanza dal centro della terra esattamente eguale ad un raggio, l'accelerazione dovuta alla gravità è, come sappiamo,

$$g = 981 \text{ cm/sec. sec.}$$

Sulla luna, cioè ad una distanza 60 volte maggiore, ammessa la legge della proporzionalità inversa ai quadrati delle distanze, quell'accelerazione dovrà diventare 60^2 vale a dire 3600 volte più piccola.

Ora dividendo 981 per 3600 si trova precisamente 0,272: la verifica non potrebbe riuscire più perfetta.

Veramente Newton non ebbe a tutta prima la consolazione di poter annunciare una così eloquente conferma delle sue previsioni; nel 1666, quando egli per la prima volta intraprendeva questo suo calcolo, si credeva ancora che il raggio terrestre fosse di circa un sesto maggiore del vero: da ciò una discordanza che doveva far supporre a Newton l'esistenza di altre forze sconosciute, e che lo gettò per lunghi anni nello scoraggiamento. Fu soltanto nel 1680 che Newton venne a conoscenza delle nuove e assai precise misure del meridiano terrestre che Picard aveva eseguite nel 1669: egli riprese allora i suoi calcoli ed ebbe finalmente la gioia di constatare che ogni divergenza era scomparsa.

La luna, dice con ragione Augusto Compte, aveva reso all'umanità l'immenso servizio di collegare direttamente ed intimamente la meccanica del cielo a quella della terra.

***

Di un altro principio fondamentale noi siamo debitori a Newton: è il principio dell'azione e della reazione, secondo il quale: *se un corpo agisce su di un altro con una certa forza, questo reagisce sul primo con una forza eguale e contraria.*

Racconta Newton di averne fatto l'esperienza diretta sul ferro e sulla calamita (*): egli racchiudeva l'uno e l'altra in due tubetti di vetro ermeticamente sigillati che poneva poi a galleggiare sull'acqua stagnante: i due galleggianti attirandosi fra loro si accostavano, si urtavano, poi ben presto trovavano la loro posizione di equilibrio nella quale si fermavano: in questa posizione le azioni mutue esercitantisi in corrispondenza dei punti a contatto erano dunque equilibrate dalla mutua attrazione del ferro e della calamita. Ciò è quanto dire che non è soltanto la calamita che attira il ferro, ma che il ferro alla sua volta attira la calamita, e che le due attrazioni sono esattamente eguali ed opposte.

È da pochi esempi cosiffatti che Newton, con un ardimento senza pari, trasse la legge sopra enunciata a cui attribuì esplicitamente un carattere ed una portata assolutamente universali.

S'intende che gli esempi per sè stessi non dimostravano nulla, o quanto meno non autorizzavano l'ardita deduzione che Newton ne ha fatta: la legge dell'azione e della reazione va pertanto accolta come un vero e proprio postulato, niente affatto necessario *a priori*, la cui giustificazione è stata fornita a posteriori dall'accordo tra le conseguenze che se ne son tratte ed i fenomeni naturali ai quali esse si riferivano.

***

Ecco intanto una prima importante applicazione: due punti materiali agiscano l'uno sull'altro costituendo un sistema isolato (cioè praticamente sottratto a qualsiasi azione esteriore): in virtù del principio testè enunciato le due forze ad essi applicate do-

(*) Cfr. L. Lecornu, *La mécanique, les idées et les faits*, Paris 1918, pag. 96.

vranno essere eguali e contrarie. Ne segue subito che le loro accelerazioni, dovendo essere misurate dai quozienti delle forze per le rispettive masse, risulteranno inversamente proporzionali alle masse stesse.

Di qui un modo di determinare il rapporto di due masse: anzi, secondo il Mach, addirittura un modo di risalire alla definizione stessa di massa e di sottrarla a quei certi riferimenti al concetto di quantità di materia di cui noi abbiamo già avuto occasione di segnalare gli inconvenienti (pag. 39).

Osserva infatti il Mach nella sua celebre " critica del principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione e del concetto di massa " (*) che, se si considerano due corpi sotto ogni rapporto identici, il solo principio di simmetria è per sè stesso sufficiente a farci prevedere che le due accelerazioni che essi possono comunicarsi, agendo l'uno sull'altro, saranno dirette secondo una medesima retta, eguali in grandezza e rivolte in sensi contrarii.

Ma non appena i due corpi presentano qualche differenza di forma o di costituzione chimica, il principio di simmetria non può più essere applicato, a meno che noi non sappiamo *a priori*, o non ammettiamo come un'ipotesi, che la differenza di forma e di costituzione chimica sono in questa questione prive d'influenza.

Però, una volta acquisita, per via sperimentale, la nozione dell'esistenza (in tutti i corpi di forma e struttura chimica differenti) di una caratteristica misurabile in ogni caso in base ad una medesima unità di misura, nulla ci vieta di adottare, come una definizione, la seguente proposizione:

" Si dice che due corpi hanno la medesima massa quando, agendo l'uno sull'altro, si comunicano delle accelerazioni eguali e contrarie ".

Scelto in conseguenza un determinato corpo come campione, si dirà che un corpo qualunque ha la massa m quando questo corpo agendo sul corpo campione gli comunica un'accelerazione eguale ad m volte quella che esso stesso riceve per reazione.

In questa definizione del concetto di massa non è più necessario alcun riferimento all'idea di quantità di materia: la definizione non è infatti altro che un modo di dare un nome ad un fatto sperimentale.

(*) E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 210 e seg.

Nè le si può disconoscere un altro vantaggio che è quello di rendere inutile la formulazione particolare del principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione che nel concetto stesso di massa viene ad essere implicitamente incluso.

Se si adotta questo punto di vista il concetto di forza può essere introdotto come un concetto derivato. Il Mach chiama infatti forza agente in un dato istante sopra un corpo dato il prodotto dell'accelerazione di questo per il valore della sua massa.

***

Ma ritorniamo alla possibilità di determinare sperimentalmente il rapporto di due masse qualunque: ritorniamoci per far vedere come tale possibilità trovi la sua più elegante applicazione nella risoluzione di uno dei più importanti problemi della meccanica celeste.

Prima delle scoperte di Newton si sarebbe certamente tacciato di follìa l'astronomo il quale si fosse proposto di pesare il sole ed i pianeti, o anche soltanto di paragonare le loro masse con quella della terra: grazie alle considerazioni testè riportate, la cosa è divenuta facilissima, specialmente per ciò che riguarda il sole (*).

Si tratti infatti di trovare il rapporto tra la massa m_1 del sole e quella m_2 della terra: basterà evidentemente paragonare l'accelerazione a_2 determinata sulla terra dall'attrazione solare coll'accelerazione a_1 determinata sul sole, o su di un corpo qualunque situato al suo posto, dall'attrazione terrestre.

Ora l'accelerazione a_2 della terra verso il sole si deduce nel modo che già conosciamo dal suo movimento attorno ad esso: si fa cioè il rapporto tra il quadrato della velocità con cui la terra percorre la sua orbita ed il raggio medio di questa (raggio medio che si può ritenere uguale a 23000 volte il raggio terrestre): si trova così per a_2 il valore 0,588 cm/sec. sec.

Quanto all'accelerazione a_1 che l'attrazione della terra può determinare su di un corpo distante da essa come il sole, noi

(*) Cfr. H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pag. 159. — Cfr. anche L. Lecornu, *La mécanique, les idées et les faits*, Paris 1918, pag. 112.

già abbiamo imparato a calcolarla dividendo 981 cm/sec. sec. per il quadrato di 23000.

D'altra parte per il principio dell'azione eguale e contraria alla reazione si deve avere:

$$m_1 \, . \, a_1 = m_2 \, . \, a_2$$

epperò:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{0{,}588 \times 23000^2}{981} = 323000$$

La massa del sole è dunque approssimativamente eguale a 323 mila volte quella della terra.

* * *

Applicando il principio dell'azione e della reazione allo studio dei fenomeni di gravità, Newton si convinse facilmente che questi fenomeni non hanno affatto la loro sede nel centro della terra, donde l'attrazione apparentemente emana, ma che vi partecipano egualmente tutte le masse che della terra fanno parte.

Poichè infatti anche i più piccoli corpi sono pesanti, vale a dire sono attirati dalla intiera massa terrestre, ne viene che questa massa dovrà alla sua volta essere attirata da essi con pari intensità.

Qui sorse naturalmente una obbiezione (*); si disse: se ogni porzione di materia è sede di questo fenomeno, due corpi qualunque, di quelli che noi abbiamo continuamente sotto mano, dovrebbero sempre attrarsi: se lasciati liberi, dovrebbero tendere ad avvicinarsi. E non si era mai osservato fino allora niente di simile.

Eppure la cosa è perfettamente esatta: se nulla di simile era mai stato osservato ciò dipendeva solo dal fatto che l'attrazione in discorso è troppo piccola per poter produrre, nelle condizioni ordinarie, un effetto misurabile. Ma l'effetto diviene sensibile non appena si provvede ad aumentare di molto la massa di uno almeno dei corpi, ovvero a diminuire enormemente le resistenze al movimento.

(*) Cfr. H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pag. 162.

Già Newton aveva avvertito che una montagna di 3 miglia inglesi di altezza e di 6 miglia di larghezza doveva produrre un'attrazione tale sui corpi situati nelle sue vicinanze da deviare la direzione della verticale locale (direzione di caduta libera dei gravi) di più di un primo.

Un simile angolo è relativamente facile a misurarsi.

L'esperienza fu tentata nel 1773 da Maskelyne sul Schehallien, una massiccia montagna della Scozia, la cui forma è relativamente regolare, la cui costituzione geologica è nota, ed il cui peso era quindi calcolabile con sufficiente approssimazione.

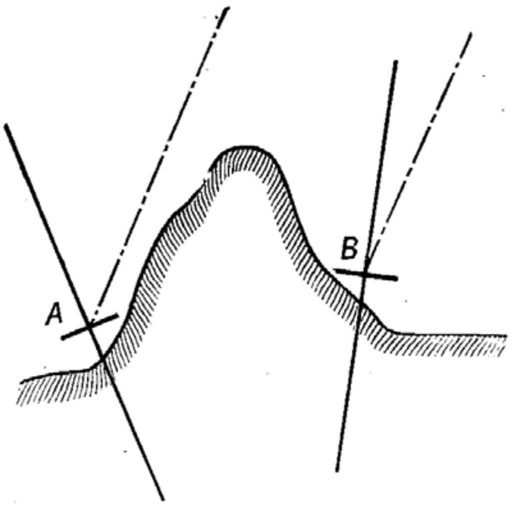

Fig. 20.

Maskelyne, scelto un conveniente punto A ai piedi della montagna (fig. 20) vi collocò un teodolite e ne diresse il cannocchiale normalmente alla superficie libera di un pozzetto di mercurio per modo da collimare per riflessione ai fili stessi del reticolo: l'asse ottico del cannocchiale era allora orientato secondo la verticale del luogo. Egli misurò poi l'angolo di cui il cannocchiale doveva ruotare per assumere una data direzione fissa dello spazio, per esempio per collimare alla stella polare.

Indi ripetè la misura in un altro punto B situato dall'altra parte della montagna. Il paragone delle due misure fu decisivo e confermò luminosamente le previsioni di Newton.

Il secondo metodo di verifica, consistente nell'operare su masse non eccessivamente grandi eliminando però tutte le possibili resistenze al loro movimento, fu tentato, presso a poco alla medesima epoca, da Cavendish (*).

Il procedimento da lui usato è estremamente semplice: una asticciuola leggerissima di legno AB portava alle sue due estremità due sfere metalliche e due piccole scale di avorio a divisioni verticali (fig. 21): essa era sospesa pel suo punto di

(*) Cfr. H. Bouasse, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pag. 163.

mezzo O ad un lungo filo metallico molto fino, tanto fino da rendere estremamente piccola la sua resistenza alla torsione.

Due grosse sfere di piombo M ed N pesanti ciascuna 158 chilogrammi erano portate da un albero che poteva ruotare a volontà attorno alla stessa verticale di sospensione: queste sfere venivano disposte in un primo tempo nella posizione MN, in un secondo tempo nella posizione $M'\,N'$. In queste condizioni se tra esse e le sfere del sistema sospeso si esercita un'attrazione apprezzabile, si dovrà poter constatare nel primo caso una rotazione dell'equipaggio mobile nel senso della freccia, nel secondo caso una rotazione in senso opposto.

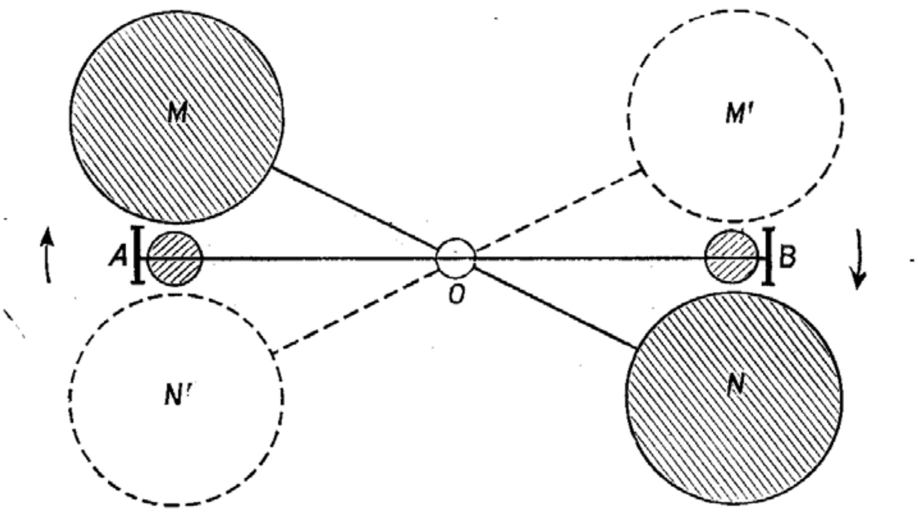

Fig. 21.

Cavendish riuscì non soltanto ad avvertire l'esistenza di queste rotazioni ma anche a misurarle coll'aiuto di due cannocchiali puntati sulle due piccole scale di avorio.

Potè così procedere alla misura diretta dell'attrazione che si esercita fra due masse qualunque. L'esperienza, ripresa più tardi, e sotto varii punti di vista perfezionata da Cornu e Baille e poi da altri ancora, confermò in tutto e per tutto le previsioni di Newton.

La legge dell'attrazione universale si può pertanto esprimere nel modo più generale dicendo che: *due punti materiali di masse* m_1 *ed* m_2 *situati alla distanza* r *si attraggono in ragione composta delle masse ed inversa del quadrato della distanza:* ciascuna di esse esercita cioè sull'altra una forza attrattiva di intensità:

$$F = f\,\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{15}$$

dove il fattore di proporzionalità f è una costante universale: sempre la stessa per qualunque coppia di masse, sia che appartengano a corpi terrestri, che a corpi celesti. Questa costante si chiama appunto costante di attrazione universale o *costante di Gauss.*

Essa può manifestamente interpretarsi come la forza con cui si attraggono due masse unitarie situate all'unità di distanza: non è però affatto una forza: basta esaminare la formola per convincersene.

Quanto alla sua grandezza, le più recenti esperienze dànno:

$$f = 66.576 \times 10^{-9} \, \mathrm{cm}^3 \, \mathrm{gr}^{-1} \, \mathrm{sec}^{-2}$$

***

Una volta stabilito che i fenomeni gravitazionali non hanno la loro sede al centro della terra, ma che essi sono il risultato delle attrazioni esercitate dalle singole masse che della terra fanno parte, doveva sorgere naturale l'idea che sulla loro intensità avessero influenza la forma e le dimensioni del nostro globo terracqueo.

In particolare poteva sorgere qualche dubbio sulla legittimità dei ragionamenti sopra esposti nei quali l'intensità dell'attrazione terrestre sul sole o sulla luna è stata dedotta moltiplicando semplicemente quella sperimentalmente rilevata alla superficie terrestre per il rapporto inverso dei quadrati delle distanze dal centro della terra.

Orbene un calcolo relativamente semplice permise a Newton di dimostrare che, *supposta la terra perfettamente sferica ed omogenea*, l'attrazione che essa esercita in un qualsiasi punto dello spazio esterno è identicamente eguale a quella che ivi si avrebbe se tutta la massa terrestre fosse concentrata nel suo centro.

Ben diversamente vanno le cose pei punti interni della sfera.

Ed era d'altronde facilmente prevedibile. Se infatti la legge dell'attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro dovesse valere fino al centro stesso, un corpo qualunque ivi collocato dovrebbe esser soggetto ad un'attrazione di grandezza infinita, ciò che è assurdo poichè in natura l'infinito non esiste.

Il calcolo dimostra che nei punti interni alla sfera l'attrazione risultante vària proporzionalmente alla distanza dal centro. Ben lungi dal divenire infinito il peso dei corpi, al centro della terra, si annullerebbe.

Se su di una rétta uscente dal centro O della sfera, assunta come asse delle ascisse (fig. 22), si conviene di rappresentare a guisa di ordinate le intensità dell'attrazione newtoniana, si ottiene un diagramma costituito da una retta per la regióne interna alla superficie, da una iperbole cubica per la regione esterna:

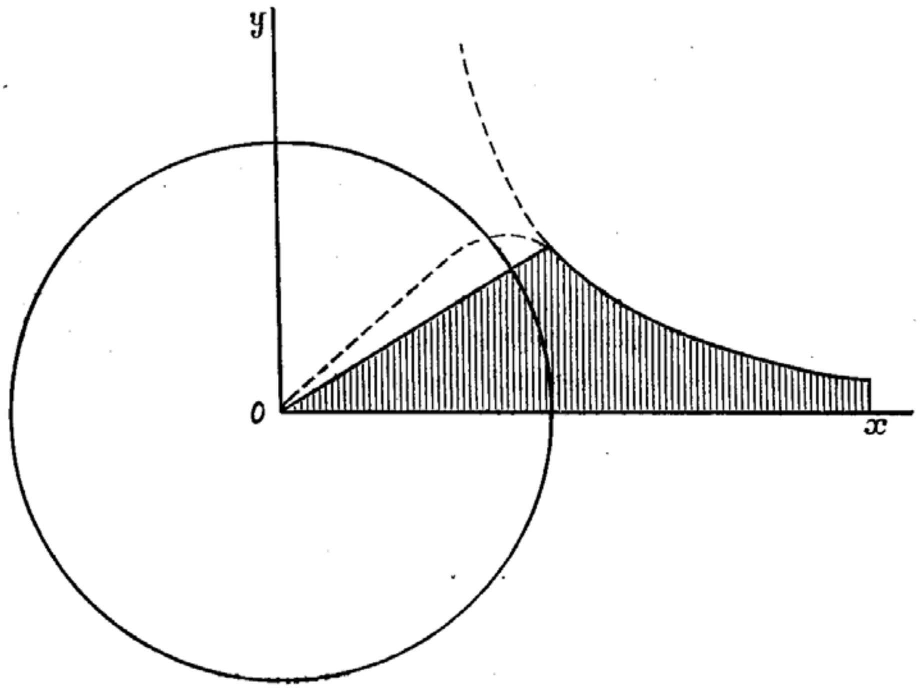

Fig 22.

le due linee si tagliano (senza raccordarsi) in corrispondenza della superficie: attraverso a questa la funzione è dunque continua, ma la sua derivata è discontinua.

In realtà le cose vanno un po' diversamente: la massa terrestre è tutt'altro che omogenea: la sua densità media globale raggiunge il valore di 5,53, mentre la densità media dello strato superficiale di cui noi abbiamo conoscenza diretta non supera 2,5: conviene dunque ritenere che la densità cresca sensibilmente dalla superficie verso il centro. Partendo da ipotesi di questo genere si arriva alla conclusione che l'intensità dell'attrazione newtoniana nell'interno della massa terrestre può ancora crescere alquanto a partire dalla superficie, salvo a diminuire poi più rapidamente secondo una legge del tipo di quella rappresentata in figura con linea punteggiata. E le esperienze che Airy ha eseguite sulle variazioni della gravità in un pozzo di miniera profondo ben 385 metri sembrano confermare questa conclusione.

***

La terra però non è sferica: essa ha presso a poco la forma di un *ellissoide di rotazione schiacciato ai poli.* Questa forma può essere in qualche modo giustificata se si pensa che sia stata assunta dalla massa terrestre ancora allo stato fluido sotto l'azione combinata delle attrazioni newtoniane e della forza centrifuga dovuta al moto di rotazione.

Newton ha anzi cercato di calcolare per questa via il valore dello schiacciamento, ma anche qui l'ipotesi della omogeneità, che egli ammetteva in mancanza di meglio, lo condusse a risultati non conformi al vero. Tuttavia i suoi studii sull'argomento non furono privi di utilità per il progresso della scienza: essi lo condussero infatti a segnalare la possibilità che la particolare forma della terra complicasse in qualche modo le leggi del suò movimento. Egli si rese conto che non era più lecito ridurre l'attrazione solare ad un'unica forza applicata al centro della terra, ed avvertì che da ciò potevano derivare certe oscillazioni dell'asse terrestre: era la prima spiegazione della *precessione degli equinozii.*

Più tardi d'Alembert avvertirà che anche la attrazione lunare dà luogo ad analoghi effetti e dimostrerà come, tenendo conto delle due azioni combinate, si trovi precisamente il valore della precessione che risulta dalle osservazioni astronomiche.

***

È ancora a Newton che noi dobbiamo la prima spiegazione scientifica del fenomeno delle *maree* (*). È questo un fatto così maestoso, e fa tale impressione su chi vi assiste là dove si presenta in tutta la sua grandiosità, che gli studiosi di tutti i tempi se ne occuparono appassionatamente. La relazione tra questo fenomeno ed il movimento della luna, quale l'attestano la con-

(*) Cfr. E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 203 e seg.

cordanza dei periodi delle maree colle fasi lunari ed il comune ritardo giornaliero di ~ 50 minuti, era pertanto notissimo: ma all'epoca di Newton si pensava ancora ad una ipotetica ondata di pressione atmosferica per il tramite della quale il movimento della luna si comunicasse alle acque dei mari.

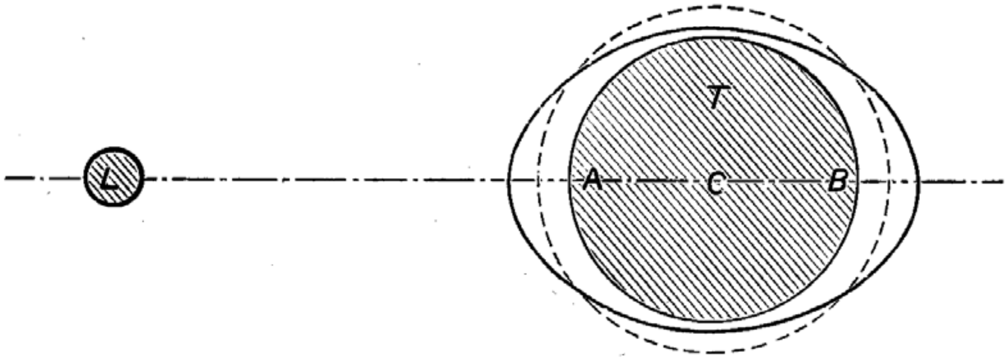

Fig. 23.

Orbene si consideri per semplicità la terra T come sferica, e tutta ricoperta di uno strato liquido (fig. 23), e su di essa due punti A e B diametralmente opposti, l'uno situato dalla parte della luna L, l'altro dalla parte opposta. Entrambi questi punti, in quanto appartenenti all'unica massa che costituisce il nostro pianeta, debbono presentare un'unica accelerazione verso la luna, accelerazione che potremo calcolare, in via di approssimazione, riferendoci al centro C della terra, e che indicheremo con a.

Ma le molecole liquide che si trovano in corrispondenza di quei medesimi punti avranno invece accelerazioni differenti in ragione della differente loro distanza dalla massa lunare: sempre in via di prima approssimazione, quelle accelerazioni si potranno rappresentare rispettivamente con $a + \Delta a$ e con $a - \Delta a$.

Le stesse molecole liquide saranno inoltre soggette all'accelerazione dovuta alla gravità terrestre, la quale si presenterà nei due punti considerati con eguale intensità ma diretta da parti opposte: se vogliamo mantenere l'ipotesi, già implicitamente fatta, di considerare come positive le accelerazioni dirette verso sinistra, questa accelerazione dovuta alla gravità terrestre dovrà rappresentarsi con g in corrispondenza del punto B, con $-g$ in corrispondenza di A. Concludendo, le accelerazioni effettive delle molecole liquide situate in A ed in B saranno rispettivameute misurate da:

$$a + \Delta a - g \qquad \text{e da} \qquad a - \Delta a + g$$

e le loro accelerazioni relative alla terra — quelle cioè che potranno essere effettivamente sottoposte a misura da un osservatore terrestre il quale trovandosi in A od in B partecipi dell'accelerazione a comune a questi punti come a tutta la massa del nostro pianeta — saranno rispettivamente:

$$-(g - \Delta a) \qquad \text{e} \qquad +(g - \Delta a)$$

Ciò equivale a dire che per l'osservatore terrestre il fenomeno si svolgerà come se l'acqua presentasse una diminuzione di peso sia in A che in B: la massa liquida si solleverà quindi tanto dalla parte rivolta verso la luna, quanto dalla parte diametralmente opposta, deprimendosi per contro nelle regioni intermedie.

Questa teoria va completata combinando la descritta azione della luna con un'analoga azione del sole e tenendo conto dell'influenza che sulle leggi del fenomeno ha il suo periodico ripetersi: il completo sviluppo e perfezionamento di essa sono dovuti a Laplace: ma il cenno che qui ne abbiamo fatto basta a dimostrare come, anche su questo argomento, Newton avesse fatto fare alla scienza un passo decisivo.

***

Del resto anche nel campo della meccanica celeste Newton aveva aperta una strada che solo i suoi successori avrebbero più tardi percorsa.

Le leggi di Keplero non costituivano che una prima approssimazione: esse non sono esatte se non in quanto si suppongano trascurabili le masse dei pianeti a fronte di quella del sole. In realtà l'attrazione esercitata dai pianeti sul sole fa sì che anche questo si muove: inoltre i pianeti si influenzano l'un l'altro: ed il problema del loro moto reale, considerato nelle sue condizioni più generali, diviene estremamente complicato.

Tuttavia per opera di Eulero, di D'Alembert, di Lagrange, di Laplace, di Le Verrier ecc., la meccanica celeste raggiunse ben presto un grado di perfezione di cui la celebre scoperta di Nettuno fatta per via di previsione teorica da Le Verrier nel 1846 rappresenta una mirabile prova.

Dinanzi a così meravigliosi risultati gli studiosi di meccanica celeste hanno dovuto chiedersi: la legge di Newton è essa propria del mondo solare ovvero si applica anche a tutti quegli altri mondi sconosciuti ciascuno dei quali ha per sole una delle stelle fisse?

L'osservazione delle stelle doppie ci permette di rispondere a questa domanda con una certa sicurezza. Sembra infatti che le leggi di Keplero si applichino ai movimenti relativi di quelle coppie di astri. D'altra parte G. Bertrand ha dimostrato che le sole leggi di attrazione che determinano traiettorie dei punti attratti sempre chiuse, sono la legge di Newton e quella dell'attrazione direttamente proporzionale alla distanza. E poichè vi sono delle buone ragioni per ritenere inverosimile l'applicazione di quest'ultima legge, così il solo fatto della periodicità dei movimenti delle stelle doppie costituisce una valida presunzione in favore della universalità assoluta della legge newtoniana.

***

Non possiamo tuttavia tacere che qualche dubbio è stato sollevato sulla sua esattezza (*).

Mercurio, il pianeta più vicino al sole, descrive, come tutti gli altri, una traiettoria sensibilmente ellittica: ma, mentre le perturbazioni di ciascuno degli altri pianeti hanno trovato la loro spiegazione nelle azioni su di essi esercitate dai pianeti vicini, nessuno è mai riuscito a darsi per questa via ragione dello spostamento progressivo del perielio di Mercurio, spostamento che raggiunge 38 secondi (arco) per secolo.

Furono immaginate le teorie le più disparate: da quelle che fanno capo alla supposta esistenza di un pianeta sconosciuto, che nessuno riuscì però mai a vedere, a quelle che suppongono modificata la legge della gravitazione universale nel senso di ammettere l'esistenza in essa di termini piccolissimi dipendenti dalla velocità e eventualmente anche dall'accelerazione delle masse che si attraggono. Quest'ultima ipotesi equivale a supporre che l'attrazione si propaghi nello spazio con una velocità finita anche se grandissima. Ma nessuna di queste ipotesi è fondata su argomenti tali da giustificare una conclusione decisiva.

Esse hanno piuttosto servito a rimettere in discussione il modo con cui le azioni newtoniane possono propagarsi a distanza.

(*) Cfr. L. Lecornu, *La mécanique, les idées et les faits,* Paris 1918, pag. 115.

Già Newton si era certamente fatta questa domanda, e per quanto dichiarasse esplicitamente che intendeva studiare i fatti quali erano, non avventurarsi a cercarne la spiegazione attraverso ipotesi più o meno plausibili, non potè sempre nascondere le sue inquietudini su questo argomento. In una delle sue lettere a Bentley egli scriveva sembrargli assurdo che l'attrazione fosse una proprietà essenziale e congenita della materia, e sopratutto che essa si propagasse da un corpo all'altro attraverso gli spazii vuoti, senza bisogno di alcun intermediario.

Ma la grandiosità dei successi che le teorie di Newton ottennero nel campo della meccanica celeste, assumendo come punto di partenza proprio l'ipotesi delle azioni a distanza, fece sì che ci si abituò a questo concetto, pur così misterioso, e non si sentì più così vivo il bisogno di spiegarne il segreto meccanismo. Fu così che presso Laplace ed i suoi contemporanei le azioni a distanza venivano ammesse come affatto naturali: fu così che si trovò logico fondare sul medesimo concetto una quantità di altre teorie riguardanti i più diversi rami della fisica.

E solo quando fu sperimentalmente dimostrato che le azioni elettriche impiegavano un certo tempo, piccolissimo ma finito, nel propagarsi, si tornò a studiare la questione chiedendosi se anche per le azioni gravitazionali non sussistesse un'analoga proprietà.

***

A questo proposito convien qui aggiungere che, in questo primo scorcio del secolo ventesimo un nuovo punto di vista di indiscutibile genialità attirò su di sè l'attenzione degli studiosi, ad alcuni dei quali parve atto a determinare un vero e proprio orientamento nuovo della scienza.

Alberto Einstein ha infatti prospettata una nuovissima concezione dell'universo per la quale è essenziale l'ipotesi che lo spazio nel quale noi viviamo sia curvo, sia cioè governato da una *geometria non euclidea.*

Convien premettere che questa ipotesi non contrasta, come qualcuno a prima vista potrebbe credere, colla nostra intuizione geometrica eminentemente euclidea.

Come un essere a due dimensioni il quale vivesse su di una superficie sferica, ma non potesse muoversi e sperimentare se non in una regione molto limitata di essa, sarebbe naturalmente indotto ad assumere per geometria della sua superficie quella (più semplice e da essa infinitamente poco differente) del suo piano tangente, così noi non possiamo escludere che la geometria euclidea traduca le proprietà del nostro spazio a tre dimensioni solo in via di prima approssimazione: che cioè essa sia la geometria di ciò che si potrebbe chiamare per analogia lo spazio tangente a quello in cui viviamo.

Ciò premesso basterà sapere che Einstein è riuscito a sostituire alla legge della gravitazione universale, ed alle relative azioni a distanza, l'ipotesi che la curvatura dello spazio in ciascun suo punto dipenda dalla presenza di masse materiali e dalla loro distribuzione. Con questa ipotesi egli spiega non soltanto tutti i fenomeni noti, così della meccanica terrestre che di quella celeste, ma giustifica insieme lo spostamento del perielio di Mercurio.

L'ipotesi implica però anche ben altre conseguenze: così per esempio i raggi luminosi, percorrendo delle geodetiche naturalmente variabili colla curvatura dello spazio, dovranno apparire essi pure deviati dalla presenza di masse materiali. Si tratta bensì di deviazioni piccolissime, generalmente non accessibili ai nostri mezzi di osservazione, sicchè non ne restano alterate le leggi dell'ottica ordinaria. Tuttavia il calcolo dimostra che la deviazione deve divenire sensibile ai nostri mezzi di osservazione per un raggio luminoso che, provenendo per esempio da una stella, passi nelle immediate vicinanze di una massa tanto grande com'è quella del sole.

Questa la previsione di Einstein, che costituirà, secondo ogni verosimiglianza, l'*experimentum crucis* della sua teoria.

Data la luminosità propria del sole il fenomeno non è naturalmente osservabile che in condizioni di eclisse totale: ora in occasione delle ultime eclissi di sole — e precisamente di quella verificatasi il 29 maggio 1919, e successive — molte osservazioni vennero fatte tra le quali alcune soltanto sembrano dar ragione alla previsione di Einstein: tuttavia, allo stato attuale delle cose, sarebbe assolutamente prematura ogni conclusione in merito.

VI.

IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT

Nei già citati suoi *Philosophiae naturalis principia mathematica* Newton scriveva:

" Le forze che agiscono sopra una macchina si equilibrano reciprocamente allorquando le loro grandezze misurate nella direzione dei rispettivi spostamenti (componenti utili) stanno tra loro nella ragione inversa delle velocità di questi spostamenti. Questa legge si verifica indistintamente in tutte le macchine, il cui scopo consiste tutto nel diminuire la velocità per aumentare la forza: ed è così che si risolve il problema di muovere un peso dato, o di vincere una data resistenza con una forza data.

" Imperocchè l'equilibrio sussisterà bensì se le componenti utili della potenza e della resistenza sono inversamente proporzionali alle velocità dei loro punti di applicazione: ma non appena l'azione della potenza, misurata dal prodotto della sua componente utile per la rispettiva velocità, oltrepassi l'analoga azione della resistenza, allora la prima vincerà la seconda. E se l'ineguaglianza è tale da compensare, anzi da vincere anche le resistenze che nascono dall'attrito fra i varii organi in movimento, l'azione sovrabbondante della potenza determina delle accelerazioni nelle varie parti della macchina e nei corpi che comunque ostacolano il suo movimento.

" In conclusione: se l'azione della potenza è misurata dal prodotto della sua componente utile per la velocità del suo punto di applicazione, e se similmente si calcola la reazione della resistenza tenendo conto insieme di tutte le forze resistenti che derivano dal sollevamento eventuale di pesi, dalla coesione