

**L'EQUAZIONE DELLE FORZE VIVE
ED IL PRINCIPIO DELLA CONSERVAZIONE
DELL'ENERGIA**

Incominciamo col ricordare che cosa ciò voglia dire: ne troveremo poi le conseguenze.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n, t) &= 0 \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n, t) &= 0 \end{aligned}$$

Abbiamo poi detto che, in conseguenza, le $3n$ componenti

$$\begin{matrix} dx_1, & dy_1, & dz_1 \\ dx_2, & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} dy_1 &+ \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f_1}{\partial t} dt = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} dy_1 &+ \dots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f_2}{\partial t} dt = 0 \\ . &. \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} dy_1 &+ \dots + \frac{\partial f_k}{\partial z_n} dz_n + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0 \end{aligned}$$

Detta:

$$W = \sum \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]$$

la forza viva del sistema, si può scrivere più brevemente:

$$dW = \sum (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (26)$$

Questa equazione esprime il teorema:

L'incremento elementare della forza viva è in ogni istante eguale al lavoro elementare delle forze applicate.

Come caso particolare:

Se il lavoro delle forze applicate è identicamente nullo, la forza viva si mantiene costante.

È essenziale avvertire subito che questa volta debbano essere tenute in conto, come forze applicate, non solo le forze esterne, ma anche quelle interne: queste infatti in generale non si eliminano: perchè i lavori elementari dell'azione esercitata da un punto A su di un punto B e della reazione di B su A siano eguali e di segno contrario, non basta inverò che tali siano azione e reazione, ma occorre che gli spostamenti di quei due punti abbiano la medesima proiezione sulla direzione AB , cioè che la distanza AB non muti.

**

L'espressione

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

sotto sommatoria nel secondo membro della (26) rappresenta notoriamente il lavoro fatto da una qualunque delle forze applicate, di cui X, Y, Z sono le componenti, durante lo spostamento elementare dx, dy, dz del suo punto di applicazione.

Orbene si supponga che questo punto di applicazione subisca uno spostamento finito, e passi da una data posizione A di coordinate x_0, y_0, z_0 ad una posizione B di coordinate x_1, y_1, z_1 . In generale il lavoro fatto dalla forza

$$\int_A^B (Xdx + Ydy + Zdz)$$

dipende dal cammino che il punto ha seguito.

Tuttavia avviene a volte — anzi, avviene molte volte, nei problemi che ci offre la natura — che le X, Y, Z siano le derivate parziali di una stessa funzione delle coordinate $U(x, y, z)$:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Allora:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU$$

e per conseguenza:

$$\int_A^B (Xdx + Ydy + Zdz) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0)$$

Il lavoro eseguito dalla forza allorquando il suo punto di applicazione passa dalla posizione A alla posizione B è eguale alla differenza dei valori assunti dalla funzione U in B ed in A .

La funzione U prende il nome di *funzione di forza*. Se essa è uniforme, se cioè essa non ammette che un solo valore in ciascun punto dello spazio, la conoscenza delle posizioni estreme A e B basta per determinare senza ambiguità il lavoro.

Ciò posto ammettiamo che tutte le forze applicate al sistema che noi stavamo studiando derivino da una funzione di forza: più precisamente ammettiamo che esista una funzione, dipendente unicamente dalla posizione del sistema, la quale coi suoi accrescimenti di valore misuri il lavoro compiuto da tutte le forze applicate per spostamenti qualunque del sistema stesso.

Sia ancora $U(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n)$ questa funzione, tale che

$$\Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) = dU$$

La (26) diviene immediatamente:

$$dW = dU$$

epperò sussisterà l'integrale delle forze vive:

$$W - U = \text{costante} \quad (28)$$

ed il teorema che lo esprime:

la differenza tra la forza viva e la funzione delle forze si manterrà costante durante tutto il moto.

* * *

Ed ecco che noi siamo finalmente in grado di riprendere l'argomento dell'equilibrio e della sua stabilità che nella Statica (*) avevamo in certo qual modo lasciato in sospenso.

Consideriamo infatti un sistema cui siano applicate *forze indipendenti dal tempo e che ammettono la funzione di forza*.

Per qualsivoglia spostamento virtuale (piccolissimo e compatibile coi vincoli, essi pure indipendenti dal tempo) il lavoro di tutte le forze è allora eguale all'accrescimento infinitesimo δU della funzione U , e però l'equazione dei lavori virtuali, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio, diviene

$$\delta U = 0.$$

Questa equazione deve essere soddisfatta per tutti gli spostamenti virtuali del sistema: e si può esprimere dicendo che: *le posizioni di equilibrio sono quelle nelle quali la funzione delle forze è massima oppure minima, o più generalmente massima-minima*.

Ciò posto, noi abbiamo detto a suo luogo [Cfr. *I fondamenti della Statica*, loco citato] che l'equilibrio si dice stabile allorquando il sistema eventualmente scostato di poco dalla posizione che si considera, tende a ritornarvi, non ad allontanarsene maggiormente. Ed abbiamo anche precisato che cosa si dovesse intendere per questa "tendenza" facendo vedere come l'equilibrio sia da ritenersi stabile quando, e solo quando, per qualunque spostamento sufficientemente piccolo e compatibile coi vincoli, il lavoro fatto da tutte le forze applicate risulti sempre negativo.

Ma, se, come abbiamo supposto, esiste la funzione delle forze, questo lavoro non è altro che la differenza tra il valore di questa funzione nella posizione spostata, ed il suo valore nella posizione di equilibrio.

(*) G. COLONNETTI, *I fondamenti della Statica*, Torino, UTET, 1927, pag. 77.

Dire pertanto che questa differenza è sempre negativa equivale a dire che: *le posizioni di equilibrio stabile sono quelle nelle quali la funzione delle forze è massima.*

Sia ora U_m il valore della funzione U in una data posizione di equilibrio stabile del sistema.

Immaginiamo che questo sia stato, per l'intervento di una conveniente causa esterna, lievemente scostato da quella posizione di equilibrio: e sia U_0 il valore di U nella posizione spostata: naturalmente in essa il sistema non può restare in equilibrio: bisogna dunque necessariamente supporre che il sistema vi possegga una certa forza viva W_0 che possiamo però sempre supporre infinitesima.

In queste condizioni sussiste il teorema:

se l'equilibrio è stabile in una data posizione, da essa scostato infinitamente poco il sistema, ed impressagli una forza viva infinitesima, il moto che così nasce rimane sempre infinitesimo.

Sia infatti W la forza viva del sistema allorquando, in un istante successivo qualunque, esso viene ad occupare una posizione cui corrisponde il valore U della funzione delle forze.

L'integrale delle forze vive dà:

$$W - U = W_0 - U_0$$

ossia:

$$W + U_m - U = W_0 + U_m - U_0$$

Ma il secondo membro è certamente un infinitesimo positivo perchè tali sono tanto W_0 come $U_m - U_0$.

D'altra parte la forza viva W è una quantità per sua natura sempre positiva: l'equazione scritta ci mostra pertanto che $U_m - U$ non può mai assumere valori finiti positivi, come di necessità dovrebbe avvenire se, nel corso del moto, il sistema si allontanasse dalla posizione di equilibrio per scostamenti finiti. Lo scostamento del sistema dalla posizione di equilibrio si conserva dunque sempre infinitesimo.

Inoltre, essendo $U_m - U$ sempre positivo ed infinitesimo, la stessa equazione ci mostra che anche W si deve conservare infinitesima: che cioè tali devono mantenersi le velocità di tutti i punti del sistema.

La proprietà espressa dal teorema ora dimostrato è caratteristica dell'equilibrio stabile, sicchè ordinariamente la si assume

come definizione di esso: ma così facendo riesce difficilissimo il provare che, se per una data posizione di equilibrio la funzione delle forze non è massima, scostando da quella infinitamente poco il sistema, ed imprimendogli una forza viva infinitesima, il moto in generale non si conserva infinitesimo (*).

*
**
*

Ed ora ritorniamo al problema dinamico di un sistema le cui forze applicate derivino tutte da una funzione di forza U : e supponiamo che questa abbia un massimo finito U_m , ovvero che, se presenta parecchi massimi, il più grande di essi U_m sia finito.

Immaginiamo il sistema in una posizione qualunque, ove la funzione di forza abbia il valore generico U : è chiaro che, posto

$$H = U_m - U \quad (29)$$

la nuova funzione H dà il massimo lavoro di cui le forze applicate sono capaci: questo massimo lavoro si denomina *energia potenziale*, o anche semplicemente *potenziale* del sistema.

Siccome U_m è una costante, l'integrale delle forze vive viene, con queste convenzioni, a potersi scrivere sotto la forma

$$W + H = \text{costante} \quad (30)$$

secondo la quale la forza viva non può aumentare se non in quanto diminuisca contemporaneamente ed in egual misura l'energia potenziale: la forza viva viene così ad apparire quasi come una trasformazione dell'energia potenziale: la quale ricompare d'altronde ogni qualvolta la forza viva torni a diminuire.

Si dà non di rado alla forza viva il nome di *energia cinetica* o di *energia attuale*: alla somma di essa coll'energia potenziale si dà il nome di *energia totale* del sistema.

Si può pertanto affermare che: *nel movimento di un sistema soggetto a forze le quali ammettano tutte una funzione di forza, l'energia totale non muta.*

In questa proposizione consiste il principio della conservazione dell'energia, principio il quale, come si vede, altro non è

(*) Cfr. G. MORERA, *Lezioni di Meccanica razionale* (litogr.), Torino 1904, pag. 367.

se non un modo sintetico di esprimere l'integrale delle forze vive, e non va quindi confuso con l'omonimo principio della *Fisica generale* che ha una portata molto più ampia.

* *

APPLICAZIONE AL CASO DI UN SISTEMA RIGIDO. — Incominciamo coll'occuparci del calcolo della forza viva di un sistema rigido: ed a tal fine cominciamo col distinguere i varii casi possibili di movimento.

1) *Il sistema è animato da un semplice moto di traslazione.* In questo caso tutti i punti posseggono la medesima velocità v : è quindi evidente che si avrà:

$$W = \sum \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m = \frac{1}{2} M \cdot v^2$$

$M = \sum m$ essendo la massa totale del sistema.

Quindi: *la forza viva di un sistema rigido animato da un moto di semplice traslazione è eguale al semiprodotto della massa totale, per il quadrato della velocità.*

2) *Il sistema è animato da un moto di rotazione attorno ad un asse.* Un punto qualunque descrive notoriamente una circonferenza posta in un piano normale a quest'asse, il cui raggio è uguale alla distanza del punto dall'asse. Se r è questa distanza, ed ω la velocità angolare, la velocità del punto è $v = r \cdot \omega$. Perciò:

$$W = \sum \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \sum \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m \cdot r^2 = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

$J = \sum m \cdot r^2$ essendo il momento d'inerzia del sistema rispetto al solito asse.

La forza viva di un sistema rigido ruotante attorno ad un asse è eguale al semiprodotto del quadrato della velocità angolare per il momento d'inerzia rispetto a quell'asse.

Anche qui, come già nel calcolo del momento della quantità di moto, si passa dal caso del moto di traslazione a quello del moto di rotazione sostituendo alla velocità lineare la velocità angolare, ed alla massa il momento d'inerzia.

3) *Il sistema si muove di moto qualunque.* Pel baricentro G di esso immaginiamo condotti tre assi i quali partecipino del movimento di questo baricentro ma si mantengono sempre paralleli agli assi fissi. Siano x_0, y_0, z_0 le coordinate di G rispetto agli assi fissi e v_0 la sua velocità, sicchè

$$v_0^2 = \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} \right)^2$$

Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque del sistema rispetto agli stessi assi fissi, e v la sua velocità, sicchè:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

Siano finalmente x', y', z' le coordinate di questo medesimo punto rispetto agli assi mobili, e v' la sua velocità relativa a questi assi, sicchè:

$$v'^2 = \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2$$

Poichè le due terne di assi si mantengono parallele, si avrà:

$$x = x_0 + x'$$

$$y = y_0 + y'$$

$$z = z_0 + z'$$

e derivando:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx'}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt} + \frac{dy'}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt} + \frac{dz'}{dt}$$

Sostituendo questi valori nell'espressione generale della forza viva si trova:

$$\begin{aligned} W &= \sum \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \\ &= \sum \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} \right)^2 \right] + \sum \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 \right] + \\ &\quad + \sum m \left[\frac{dx_0}{dt} \frac{dx'}{dt} + \frac{dy_0}{dt} \frac{dy'}{dt} + \frac{dz_0}{dt} \frac{dz'}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Ma le x_0, y_0, z_0 e le loro derivate sono delle costanti rispetto alle sommatorie. D'altra parte, pel fatto che gli assi mobili passano pel baricentro, deve aversi:

$$\sum mx' = \sum my' = \sum mz' = 0$$

e derivando:

$$\sum m \frac{dx'}{dt} = \sum m \frac{dy'}{dt} = \sum m \frac{dz'}{dt} = 0$$

In conclusione si trova:

$$W = \frac{1}{2} M v_0^2 + \sum \frac{1}{2} m v'^2$$

La forza viva di un sistema rigido è dunque sempre eguale a quella che esso avrebbe se tutta la sua massa fosse concentrata nel baricentro, aumentata della forza viva dovuta al moto intorno al baricentro (Teorema di König).

**

Sistemi rigidi pesanti. — Abbiamo già detto che le forze naturali ammettono quasi sempre la funzione di forza: così è delle attrazioni newtoniane: così è in particolare delle forze di gravità.

Detta infatti, come al solito, m la massa di un punto pesante, il cui moto riferiremo ad una terna di assi coordinati ortogonali orientati in modo che l'asse delle z riesca verticale e rivolto verso il basso, le componenti della forza applicata (peso)

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = m \cdot g$$

sono le derivate parziali della funzione

$$U = m \cdot g \cdot z$$

che assumeremo pertanto come funzione di forza.

L'esistenza di questa funzione e le sue proprietà che abbiamo sopra enumerate — in particolare: l'esistenza del potenziale e le sue relazioni colla forza viva, quali risultano dal principio

della conservazione dell'energia — meritano di essere messe a raffronto colle leggi della caduta dei gravi, quali furono scoperte da Galileo.

Ecco brevemente come vi si perviene.

Tanto la funzione di forza, come il potenziale di gravità, sono costanti su ciascun piano orizzontale ($z = \text{costante}$): anche la forza viva — e quindi anche il valor assoluto della velocità della massa m supposta in movimento sotto l'azione della sola forza di gravità, dovrà in corrispondenza di quel piano essere sempre la stessa qualunque sia il punto in cui essa lo attraversa, qualunque sia il cammino che ha percorso per arrivarvi.

Tanto la funzione di forza, come il potenziale di gravità, subiscono nel passare dall'uno all'altro piano orizzontale una variazione eguale in valor assoluto ad $m \cdot g \cdot h$ (essendo h il dislivello tra i due piani): vuol dire che tale dovrà essere in valor assoluto anche la variazione della forza viva: se la massa m parte con velocità nulla dal più alto di quei piani, comunque giunga sul più basso, vi perverrà sempre colla forza viva:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$$

il che vuol dire che la sua velocità, sempre in valor assoluto, dovrà essere in ogni caso misurata da

$$v = \sqrt{2gh}$$

Viceversa, se la stessa massa m possiede in un dato istante la velocità v e quindi la forza viva $\frac{1}{2} m \cdot v^2$ questa non potrà annullarsi — e quindi la massa non potrà fermarsi — se non allorquando essa sia giunta su di un piano orizzontale cui corrisponda un maggior valore del potenziale precisamente eguale alla forza viva che deve scomparire: questo piano si troverà quindi ad un'altezza sul punto di partenza pari ad

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Come si vede, la dinamica del punto pesante si ritrova tutta senza difficoltà quasi come una implicita ed ovvia conseguenza

degli enunciati generali di cui ormai disponiamo. Fin qui però quei teoremi non ci rivelano nulla di nuovo: direi anzi che queste deduzioni servono più a chiarirne il significato che a dimostrarne l'utilità.

L'utilità degli enunciati generali diviene manifesta non appena dalla considerazione del semplice punto materiale si passa alla considerazione di sistemi materiali più complessi.

Consideriamo, per esempio, il caso di una sfera (o di un cilindro) che discenda rotolando lungo un piano inclinato (fig. 31).

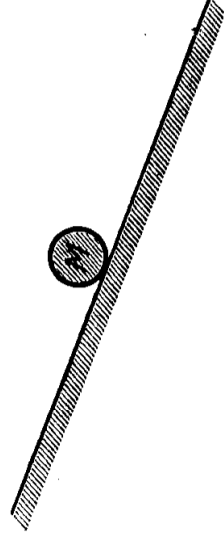


Fig. 31.

Se r è il suo raggio e v la velocità con cui il suo baricentro, supposto coincidente col centro di figura, si sposta parallelamente alle rette di maggior pendenza del piano di appoggio, possono evidentemente darsi vari casi: può avvenire che, il piano di appoggio essendo perfettamente liscio, il corpo scivoli su di esso assumendo un moto di semplice traslazione: può avvenire invece che, opponendosi l'attrito agli scorrimenti dei punti a contatto, il corpo prenda a rotolare sul piano: in questo secondo caso supponiamo addirittura che non vi siano scorrimenti, che cioè il corpo assuma una velocità angolare $\omega = \frac{v}{r}$ attorno all'asse orizzontale condotto per il baricentro parallelamente al piano di appoggio.

Detta M la massa del corpo e J il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione testè indicato, la forza viva in un istante qualunque del moto sarà, nel primo caso:

$$W = \frac{1}{2} M \cdot v^2$$

e nel secondo:

$$W = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J}{r^2} \right) v^2$$

Eguagliando questa forza viva al lavoro fatto dalla gravità, che è in entrambi i casi eguale al prodotto del peso $M \cdot g$ per l'altezza di caduta h , si ottengono, per la velocità del baricentro rispettivamente i valori:

$$v = \sqrt{2gh}$$

e

$$v = \sqrt{2gh \frac{M}{M + \frac{J}{r^2}}}$$

Quest'ultima è evidentemente sempre minore della prima: quando il corpo rotola invece di scivolare si deve dunque osservare un rallentamento del moto. Il fatto si rende particolarmente evidente se si ha l'avvertenza di accrescere artificialmente il momento d'inerzia allontanando opportunamente le masse dall'asse di rotazione.

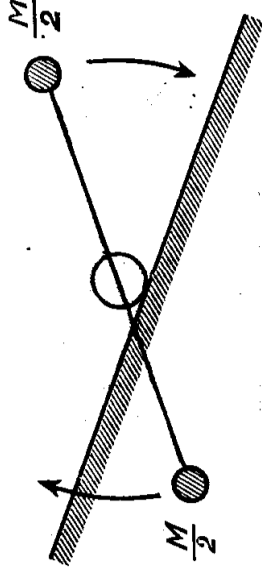


Fig. 32.

Supponiamo, tanto per fissare le idee, che tutta la massa del sistema possa concentrarsi in due punti simmetrici rispetto a quell'asse e situati a distanza R da esso, come è indicato nella fig. 32.

Si ha allora:

$$J = 2 \frac{M}{2} R^2$$

epperò:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{R^2}{r^2}}}$$

La velocità con cui il sistema discende rotolando lungo il piano inclinato si può rendere piccola quanto si vuole accrescendo opportunamente R a fronte di r .

Ma anche senza giungere a siffatti casi estremi, l'influenza della forza viva dovuta al moto rispetto al baricentro può non essere trascurabile e meritare di essere tenuta in conto almeno a titolo di termine correttivo.

Le misure stesse su cui Galileo aveva fondate le sue conclusioni sul moto dei gravi — e che si riferivano, come il lettore certamente ricorderà, al moto di una sferetta di marmo che discendeva rotolando entro la scanalatura di quel certo piano inclinato di cui abbiamo discorso a suo tempo — avrebbero dovuto sotto questo punto di vista subire una correzione apprezzabile (*).

(*) Cfr. E. MACH, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 330, nonchè: H. BOVASSE, *Gyroscopes et projectiles*, Paris, Delagrave, 1923, pag. 238.