

---

---

IV.

## FORZA VIVA E QUANTITÀ DI MOTO

Consideriamo un punto materiale animato da un movimento rettilineo uniformemente accelerato, ed indichiamo al solito con  $s$  lo spazio percorso dal punto durante un tempo  $t$ , e con  $v$  la velocità che esso avrà acquistata alla fine dello stesso tempo.

Ricordiamo che Galileo ed Huygens sono riusciti, nel modo che abbiamo visto, e per il caso particolare della caduta libera dei gravi, a stabilire fra quelle grandezze le tre equazioni seguenti:

$$v = g \cdot t \quad (1)$$

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

$$g \cdot s = \frac{v^2}{2} \quad (3)$$

Orbene, moltiplichiamo i due membri di ciascuna equazione per la massa  $m$  del punto materiale considerato e mettiamo in evidenza, ove ne è il caso, la forza motrice:

$$F = m \cdot g$$

Le tre equazioni divengono rispettivamente:

$$m \cdot v = F \cdot t \quad (12)$$

$$m \cdot s = \frac{1}{2} F \cdot t^2 \quad (13)$$

$$F \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2} \quad (14)$$

Per quanto esse si riferiscano, come abbiamo espressamente dichiarato, al solo movimento rettilineo prodotto su di un punto materiale da una forza costante, queste equazioni possono riguardarsi come le *equazioni fondamentali della dinamica*.

Tutte e tre contengono infatti la massa del punto e la forza ad esso applicata: queste grandezze esse mettono in relazione rispettivamente:

con  $v$  e con  $t$

con  $s$  e con  $t$

con  $s$  e con  $v$ .

Nell'ambito ristretto della meccanica del punto la loro utilità è evidente: esse possono venire utilizzate per rispondere alle questioni le più diverse: ma forse ancor più importante è l'utilità di quelle equazioni quando ci si serve di esse per avere un criterio semplice e generale di orientamento nel maneggio dei concetti meccanici.

Ecco, tanto per intenderci, un esempio banale ma istruttivo: qualcuno ci chiede qual è la forza capace di comunicare una data velocità ad un corpo di massa data: guardando quelle tre equazioni noi possiamo subito rispondere che la domanda non ha senso, in quanto tra  $m$ ,  $F$ , e  $v$  soli, non esiste alcuna relazione definita: fino a che non si precisa il tempo  $t$  durante il quale  $F$  agisce, ovvero lo spazio  $s$  lungo cui agisce, la questione resta indeterminata.

Indeterminazioni di questo genere debbono essere messe subito in evidenza ed evitate con ogni cura: poichè son quelle che più frequentemente danno luogo ad equivoci, ed a discussioni inconcludenti: basti ricordare pel suo valore storico la celebre contesa che durante ben 57 anni armò gli uni contro gli altri i seguaci della scuola di Leibnitz e quelli della scuola di Descartes (\*).

---

(\*) Cfr. H. BOUASSE, *Introduction à l'étude des théories de la Mécanique*, Paris 1895, pag. 253. — E. JOUGUET, *Lectures de Mécanique*, Première Partie, Paris 1908, pagg. 85 e 189.

\* \* \*

Essi non avevano un'idea chiara del concetto di massa (abbiam già detto che questo fu precisato solo più tardi da Newton): tuttavia DESCARTES (1596-1650), come già Galileo prima di lui, si era reso conto che un corpo in movimento è capace, agendo su altri corpi con cui venga eventualmente in contatto, di sviluppare delle forze, e più generalmente di produrre degli effetti dinamici, che dipendono non soltanto dalla sua velocità, ma altresì da quella che noi oggi chiamiamo la sua massa.

Galileo chiamò questa capacità d'azione dei corpi in movimento ora col nome di "momento", ora con quello di "impulso", altrove con quello di "energia": Descartes le dà il nome di "quantità di moto", e precisa che essa deve essere proporzionale al prodotto della materia in movimento per la velocità da cui è animata.

Egli pensa che la quantità di moto complessiva dell'universo deve essere costante, sicchè un corpo non può perdere quella che esso possiede se non a condizione che essa venga contemporaneamente a trasferirsi in un altro corpo (*Principia philosophiae*, 1644).

Descartes non dice chiaramente donde abbia tratta tale convinzione: certo lo guidava il desiderio di vedere le cose dal punto di vista il più generale possibile, caratteristica questa che costituì il più incontestabile merito della sua scuola; ma come al solito egli seguì in questa occasione una via essenzialmente induttiva, fondandosi su ipotesi che egli considerava volentieri come evidenti per se stesse, senza preoccuparsi di verificarne sperimentalmente l'esattezza.

Le sue idee furono combattute da LEIBNITZ (1646-1716) in un volumetto comparso negli *Acta eruditorum* del 1686 sotto il titolo: *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii etc.*

Per Leibnitz la vera misura della "forza di un corpo in movimento", deve essere determinata in funzione del cammino percorso, così come Galileo ed Huygens avevano tacitamente fatto nelle loro più importanti ricerche, stabilendo che la velocità che un corpo acquista cadendo da una certa altezza gli

conferisce la capacità (o, se così si vuol dire, la forza) di risalire alla medesima altezza.

Ciò premesso, Leibnitz osserva giustamente che, una volta ammesso non esservi differenza tra il sollevare un peso  $p$  all'altezza  $4h$  ed il sollevare un peso  $4p$  all'altezza  $h$ , si deve necessariamente assumere come misura della forza di un corpo in movimento il prodotto del "corpo", per il quadrato della velocità, poichè nel primo caso la velocità iniziale occorrente perchè l'ascesa avvenga da sè è soltanto doppia di quella occorrente nel secondo caso.

In un suo scritto posteriore (*Specimen dynamicum*, 1695) Leibnitz ritorna sull'argomento per fare una netta distinzione fra il concetto ordinario di forza, quale deriva dalla nozione intuitiva di pressione, e la forza di un corpo in movimento, cui dà il nome di *forza viva* quasi a differenziarla dalla prima che egli chiama forza morta.

Egli si compiace di far vedere, in quella occasione, che, ammettendo la conservazione delle quantità di moto nel senso postulato da Descartes, si arriva fatalmente alla possibilità che un grave si sollevi per il solo effetto del suo peso: è la solita dimostrazione per assurdo di cui abbiamo già incontrato qualche esempio. Leibnitz riprende anzi i ragionamenti di Galileo e di Huygens per dedurne che, se mai, è la forza viva che deve conservarsi, se non si vuole cadere nell'assurdo del moto perpetuo.

Con tutto ciò la disputa si protrasse, come abbiamo detto, per una lunga serie di anni tra i seguaci delle due scuole filosofiche: si può dire che essa non si chiuse che colla pubblicazione del *Traité de dynamique* di D'Alembert, avvenuta nel 1743.

In realtà (\*) in quella disputa si confondevano due questioni che non avevano nulla a che fare fra loro: il problema della misura della "forza di un corpo in movimento", e quello della pretesa invariabilità di  $m \cdot v$  ovvero di  $m \cdot v^2$ .

Vedremo a suo tempo, e dopo di aver meglio definite le grandezze di cui si tratta, che realmente la quantità di moto si mantiene costante in ogni sistema materiale isolato, cioè *non soggetto ad alcuna azione esterna*: vedremo anche che si mantiene

---

(\*) Cfr. E. MACH, *La Mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 274.

costante la forza viva tutte le volte che in un sistema *non si effettua alcun lavoro*.

Per ciò che riguarda invece la misura della forza, o meglio della capacità di azione dei corpi in movimento, siamo fin d'ora in grado di esaurire la questione dimostrando in due parole l'equivoco sul quale essa si fondava: si vedrà così che entrambe le tesi in contrasto, che pur sembrano fra loro antitetiche, erano egualmente corrette, sia pure sotto diversi punti di vista.

Scriviamo infatti la (12) sotto la forma:

$$t = \frac{m \cdot v}{F}$$

Essa ci dice quanto tempo occorre ad una forza  $F$  per imprimere alla massa  $m$  la velocità  $v$ . Ciò posto, se noi supponiamo che  $F$  improvvisamente si inverta, il moto da accelerato diverrà ritardato, ed occorrerà altrettanto tempo perchè la massa si arresti. La stessa formola ci dice dunque anche per quanto tempo una massa  $m$  animata da una velocità  $v$  può vincere una resistenza  $F$ .

Consideriamo invece la (14) e scriviamola sotto la forma:

$$s = \frac{m \cdot v^2}{2F}$$

Le stesse considerazioni fatte dianzi ci permettono di dire che  $s$  misura qui, tanto il cammino lungo il quale deve agire la forza  $F$  per imprimere alla massa  $m$  la velocità  $v$ , quanto il cammino lungo il quale la solita massa, animata dalla stessa velocità, è capace di vincere la forza  $F$  agente come una resistenza.

V'era dunque tra i dissenzienti di quel tempo nulla più di un equivoco dipendente da mancanza di precisione nella definizione di ciò che essi consideravano come la capacità di azione di un corpo in moto: pensavano gli uni che questa capacità di azione fosse da riguardarsi caratterizzata dal *tempo* durante il quale il corpo poteva vincere una data resistenza: ed avevano ragione di dire che essa era misurata dal prodotto della massa per la velocità: gli altri pensavano invece che quella capacità di azione dovesse giudicarsi a seconda dello spazio lungo il

quale il corpo poteva vincere la stessa resistenza e sotto questo punto di vista era ben giustificato che essi la ritenessero misurata dal prodotto della massa per il quadrato della velocità.

\* \* \*

Il nome di *forza viva* che Leibnitz attribuì al prodotto della massa per il quadrato della velocità, venne più tardi, per iniziativa di Coriolis, più opportunamente riferito alla metà di quel prodotto, cioè all'espressione:

$$\frac{m \cdot v^2}{2}$$

e, con questo significato, si usa tuttora malgrado si sia dovuto riconoscere che è assai improprio, poichè la grandezza che esso indica non ha affatto le dimensioni di una forza, bensì quelle di un lavoro.

Ciò appare chiaramente dalla (14):

$$F \cdot s = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

nella quale anzi la forza viva può in certo qual modo riguardarsi come l'effetto del lavoro eseguito dalla forza durante lo spostamento del suo punto di applicazione.

A questo proposito vale la pena di osservare che se Huygens fosse stato in possesso del concetto di massa quale fu soltanto più tardi introdotto, egli avrebbe molto probabilmente scritta la sua equazione risolvete del problema del pendolo composto sotto la forma:

$$\sum p \cdot h r = \sum \frac{m(vr)^2}{2}$$

nella quale il primo membro rappresenta il lavoro fatto dalla gravità durante la discesa del pendolo, ed il secondo misura la forza viva da questo posseduta alla fine della discesa stessa, cioè al suo passaggio per la posizione di equilibrio stabile.

Se ne può concludere che il principio fondamentale da cui Huygens era partito, e che quella equazione traduce, equivaleva semplicemente a riconoscere il lavoro come determinante della forza viva.

Vedremo più innanzi, come, sotto una forma ben poco differente, lo stesso concetto abbia potuto diventare uno dei più fecondi e generali teoremi della dinamica.

\* \* \*

Quanto al prodotto  $m \cdot v$  esso ha mantenuto immutato il nome di *quantità di moto* che Descartes gli aveva dato: soltanto la sua significazione si è col tempo generalizzata e precisata nel senso che, considerandosi dei movimenti curvilinei nei quali la velocità muta non soltanto di grandezza ma anche di direzione, anche alla quantità di moto si è dovuto attribuire una direzione ed un senso: in una parola (a differenza della forza viva che è una grandezza scalare), la quantità di moto sarà per noi una grandezza vettoriale.

Ma limitiamoci pure, ancora per un momento, al caso semplice del moto rettilineo.

La relazione (12):

$$m \cdot v = F \cdot t$$

ci dice che la quantità di moto impressa ad una massa invariabile da una forza costante è eguale al prodotto della intensità della forza per il tempo durante il quale essa agisce.

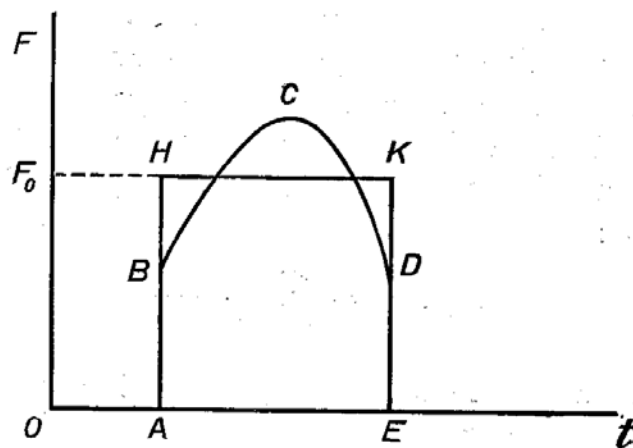


Fig. 18.

Ciò posto immaginiamo che, ferma restando la direzione della forza, e quindi del moto, essa vari di intensità secondo una legge affatto arbitraria come quella rappresentata nella fig. 18 dalla curva  $BCD$ .

Detto  $dv$  l'incremento della velocità nell'intervallo elementare di tempo  $dt$ , si ha, conforme alla (12):

$$m \cdot dv = F \cdot dt$$

Integrando questa relazione nella ipotesi che nell'istante in cui la forza comincia ad agire la massa sia in quiete, sicchè la quantità di moto iniziale sia nulla, si ottiene per la quantità di moto finale l'espressione:

$$m \cdot v = \int_t F \cdot dt$$

Detta quantità di moto potrà dunque considerarsi misurata dall'area racchiusa fra la predetta curva e l'asse dei tempi (\*). Si può dunque imprimere ad una data massa la stessa quantità di moto operando in modi diversi: basterà che l'area suddetta abbia il valore voluto: il che non ci impedirà di supporre che la curva  $BCD$  abbia l'andamento che più ci piace: cioè che la forza varii di intensità secondo una legge a nostra scelta.

In particolare si potrà sempre sostituire alla curva  $BCD$  una retta  $HK$  parallela all'asse dei tempi, senza che l'area varii: ciò equivale a supporre sostituita alla forza variabile una forza costante  $F_0$  tale che:

$$F_0 \cdot t = \int_t F \cdot dt = m \cdot v$$

tale cioè che, agendo durante il medesimo intervallo di tempo, produca in definitiva la medesima quantità di moto.

L'intensità di questa forza costante prende il nome di intensità media della forza data.

In pratica accade a volte di dover studiare dei casi nei quali l'intervallo di tempo è così breve da rendere impossibile un'analisi diretta della legge di variazione della forza: in questi casi può riuscire interessante l'arrivare ad identificarne almeno il valor medio: la forza reale sarà necessariamente in certi istanti minore, in altri maggiore del suo valor medio: questo si può quindi in ogni caso riguardare come un limite inferiore del valore massimo.

---

(\*) H. BOUASSE, *Introduction à l'étude des théories de la mécanique*, Paris 1895, pagg. 195 e 196.



Così per esempio, per effetto di quello che abitualmente si chiama un urto, una massa  $m$  assume una certa velocità  $v$ : conviene ritenere che, sia pure durante un tempo brevissimo, una forza ha agito su di essa. Orbene è difficilissimo in pratica eseguire una misura esatta della durata dell'urto poichè si tratta quasi sempre di una frazione molto piccola di secondo: ancor più difficile è analizzare il fenomeno nei suoi particolari, ed identificare la legge secondo cui varia, durante quella frazione di secondo, l'intensità della forza. Ciò che si può sempre considerare come noto, quando è nota la quantità di moto risultante, si è il valore di:

$$\int_t F . dt$$

a cui si dà abitualmente il nome di *impulso*.

E tutto quello che si può dire, per rapporto alla grandezza della forza d'urto, si è che, a parità di impulso, il valor medio, e quindi anche il valor massimo della forza deve essere tanto più considerevole quanto minore è l'intervallo di tempo durante il quale essa ha agito.

Un esempio, che togliamo dall'opera poc'anzi citata del Bouasse, varrà a chiarire la portata pratica di queste considerazioni: è facile riscontrare che la forza di gravità impiegherebbe poco più di 60 secondi per imprimere ad un grave liberamente cadente nel vuoto una velocità di 600 metri al secondo: orbene in un ordinario cannone il proietto raggiunge una simile velocità in meno di un centesimo di secondo, cioè in un tempo seimila volte più breve: se ne può subito concludere che, almeno durante una frazione di quel centesimo di secondo, la pressione totale esercitata dai gas (che si producono nello scoppio delle polveri) sul fondo del proietto, dovrà superare seimila volte il peso di questo.

