

III.

MOTO DI UN SOLIDO COMPLETAMENTE LIBERO NELLO SPAZIO (*)

Definire il movimento di un solido libero nello spazio, vuol dire definire il movimento di un suo punto qualunque, per esempio del suo centro di gravità, ed inoltre il movimento del solido attorno a questo punto, considerato come fisso.

Sia O un'origine fissa e ξ, η, ζ tre assi ortogonali pure fissi (fig. 60) uscenti da essa. Le stesse tre lettere assumeremo ad indicare le coordinate generiche, rispetto a tale terna

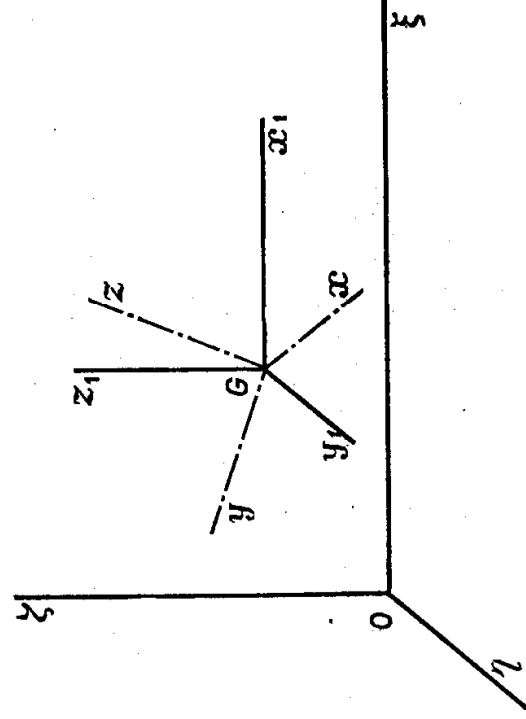


Fig. 60.

di assi, del baricentro G del solido che si muove.

Detta M la massa totale del solido, noi sappiamo che il movimento del baricentro è definito dalle tre equazioni:

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mathcal{X}$$

$$M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mathcal{Y}$$

$$M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \mathcal{Z}$$

(*) Cfr. L. LECORNU, *Cours de mécanique* tome II, Paris 1915, pag. 243.

i cui secondi membri sono le somme delle proiezioni delle forze applicate sulle tre direzioni degli assi.

Per G immaginiamo condotti tre assi di direzioni fisse x_1, y_1, z_1 , per esempio paralleli agli assi fissi; e inoltre tre assi invariabilmente connessi al solido x, y, z , per esempio coincidenti coi suoi tre assi centrali d'inerzia.

La posizione del solido attorno a G sarà in ogni istante definita dai soliti angoli di Eulero: ferme pertanto restando le ipotesi e le notazioni del precedente capitolo, il movimento del solido per rapporto al suo baricentro si potrà studiare coll'aiuto delle equazioni di Eulero

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr = \mathcal{L}$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C) rp = \mathcal{M}$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq = \mathcal{N}$$

e delle relazioni ausiliarie:

$$p = \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$

$$q = \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos \theta$$

Sostituendo questi valori di p, q, r nella terna precedente, si hanno in definitiva sei equazioni differenziali, integrando le quali, quando è possibile, si potranno determinare i sei parametri incogniti

$$\xi, \eta, \zeta, \theta, \psi, \varphi$$

in funzione del tempo.

S'intende che il problema è in generale estremamente complesso, perchè i secondi membri di quelle sei equazioni differenziali sono generalmente alla loro volta delle funzioni di quei medesimi sei parametri, e (se le forze dipendono dalle velocità) anche delle loro derivate prime per rapporto al tempo.

Comunque, si tratta di un problema di analisi nella cui discussione noi ci guarderemo bene dall'addentrarci.

Preferiamo soffermarci brevemente a far vedere, discutendo un caso particolare, come e quando quelle due terne di equazioni possano, almeno in via di approssimazione, trattarsi separatamente, con che al problema generale del moto di un solido libero divengono immediatamente applicabili i singoli risultati da noi conseguiti nello studio del moto di un punto ed in quello del moto di un solido attorno ad un punto fisso.

Il caso particolare su cui, con questo intento, fisseremo la nostra attenzione, sarà quello di un proietto lanciato nello spazio con velocità iniziale arbitraria e soggetto unicamente all'azione del suo peso ed alla resistenza dell'aria.

Il problema fondamentale della balistica esterna (*). — Incominciamo collo studiare il fenomeno come se avvenisse nel vuoto: prescindiamo cioè da ogni resistenza del mezzo: le sole forze applicate saranno quelle dovute alla gravità.

Ammesso che la traiettoria del mobile si sviluppi tutta in una regione sufficientemente limitata dello spazio, noi potremo ritenere quelle forze come indipendenti dalle coordinate (nonchè dalle loro derivate): di più la loro risultante passa per G , è verticale, diretta verso il basso, ed eguale al prodotto della massa M per la costante g .

Se pertanto si assume l'asse delle ζ verticalé e rivolto verso l'alto, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = 0, \quad \mathcal{Y} = 0, \quad \mathcal{Z} = -Mg, \\ \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = 0 \end{aligned}$$

Le due terne di equazioni risultano indipendenti l'una dall'altra.

La discussione delle equazioni di Eulero ci condurrebbe a ripetere tal quale tutto ciò che abbiamo detto nell'ipotesi del solido mobile attorno ad un punto fisso sotto l'azione di forze la cui risultante passa per questo punto.

(*) Cfr. F. SIACCI, *Lezioni di Meccanica razionale* (litogr.), Torino 1892, p. 208 e seg., nonchè L. LECORNU, *Cours de mécanique*, tome I, Paris 1914, pag. 279 e seg.

Il moto del nostro proietto rispetto al suo baricentro sarà dunque senz'altro un moto alla Poinsot.

* * *

Quanto al moto del baricentro noi già sappiamo che deve essere parabolico: le equazioni generali

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -g$$

possono d'altronde essere integrate senza difficoltà, e danno:

$$\begin{aligned} \xi &= A + Bt \\ \eta &= C + Dt \\ \zeta &= E + Ft - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Se si assume come origine O la posizione iniziale del punto G , e se di più si suppone che la velocità iniziale v_0 sia contenuta nel piano verticale $\zeta\xi$ e faccia un angolo α coll'asse orizzontale ξ , le sei costanti di integrazione divengono:

$$\begin{aligned} A &= C = E = 0 \\ B &= v_0 \cos \alpha \quad D = 0 \quad F = v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

la traiettoria di G sarà dunque tutta contenuta nel detto piano verticale, e rappresentata su di esso dalle due equazioni:

$$\begin{aligned} \xi &= (v_0 \cos \alpha) t \\ \zeta &= (v_0 \sin \alpha) t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Detta

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

l'altezza OA (fig. 61) a cui il mobile si eleverebbe se fosse stato lanciato verticalmente, dal basso all'alto, colla data velocità iniziale v_0 , si ha, per eliminazione del tempo fra le precedenti equazioni:

$$\zeta = \xi \tan \alpha - \frac{\xi^2}{4h \cos^2 \alpha}$$

e questa è precisamente l'equazione di una parabola il cui parametro è:

$$p = 2h \cos 2\alpha$$

ed il cui vertice ha per coordinate:

$$\xi = 2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\zeta = h \operatorname{sen}^2 \alpha$$

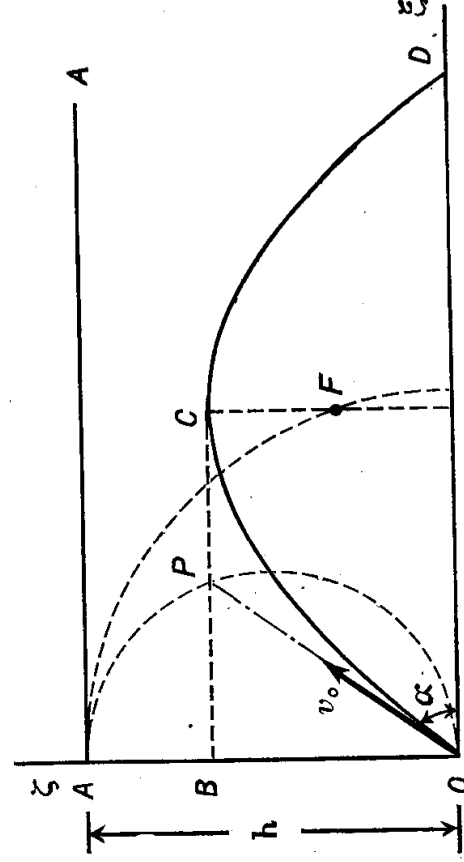


Fig. 61.

Costruiamo una circonferenza su OA come diametro: le coordinate del punto P in cui essa taglia il raggio condotto da O nella direzione di v_0 , sono

$$\xi = h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\zeta = h \operatorname{sen}^2 \alpha$$

il vertice della parabola descritta da G deve dunque trovarsi sull'orizzontale per P all'ascissa $BC = 2 \cdot BP$.

La portata OD è evidentemente doppia di BC epperò quadrupla di BP .

Se, fermo restando il valore assoluto della velocità iniziale v_0 , se ne fa variare l'inclinazione α sulla orizzontale, la portata naturalmente varia, e raggiunge un massimo in corrispondenza del massimo di BP cioè per $\alpha = \frac{\pi}{4}$: la portata massima è eguale a $2h$.

Osserviamo ancora che la distanza del vertice C dall'orizzontale AA' è $h \cos^2 \alpha$ cioè $\frac{p}{2}$; l'orizzontale AA' funziona dunque da direttrice qualunque sia l'angolo α .

Quanto al fuoco F esso deve avere per ascissa quella stessa del vertice

$$\xi = 2h \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

e per ordinata:

$$\zeta = h - p = h(1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

Ora è facile riscontrare che queste due espressioni soddisfano alla condizione:

$$\xi^2 + \zeta^2 = h^2$$

il luogo di F è dunque un circolo di centro O e raggio h .

Di qui si deduce un metodo molto semplice per determinare l'angolo α di tiro da adottarsi per raggiungere un determinato punto Q , naturalmente con una data velocità iniziale: basta osservare infatti che anche per rapporto a Q devono sussistere

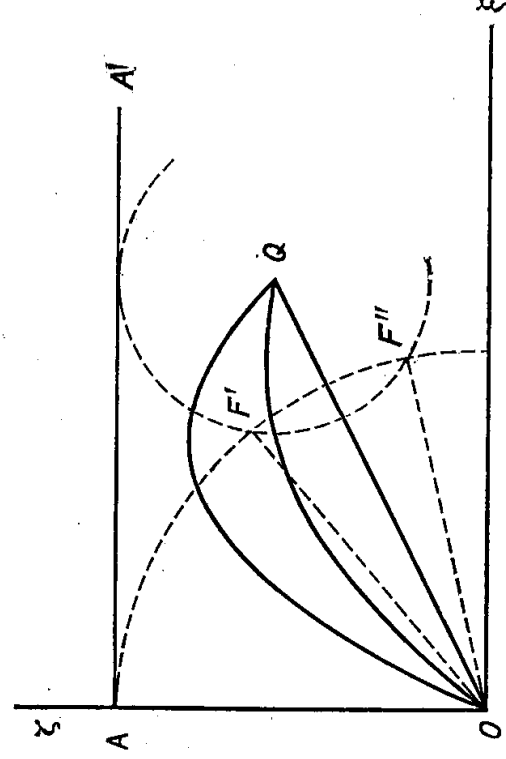


Fig. 62.

proprietà analoghe a quelle trovate per rapporto ad O : in particolare il fuoco della parabola risolvente deve trovarsi sopra una circonferenza di centro Q e tangente alla orizzontale AA' : esso dovrà pertanto coincidere con una delle intersezioni di essa colla circonferenza di centro O dianzi indicata (fig. 62).

In generale le intersezioni sono due, simmetriche rispetto alla congiungente AQ : le bisettrici dei due angoli AOF' ed AOF'' individuano le due direzioni risolventi di v_0 : la seconda soluzione corrisponde a quello che gli artiglieri chiamano *tiro diretto*, la prima a quello che essi chiamano *tiro indiretto*.

Le due soluzioni vengono a coincidere quando Q si trova su una certa parabola ad asse verticale avente in A il vertice ed O per fuoco: la fig. 63 mostra che questa parabola è l'inviluppo delle parabole di tiro; vien detta da alcuni *parabola di*

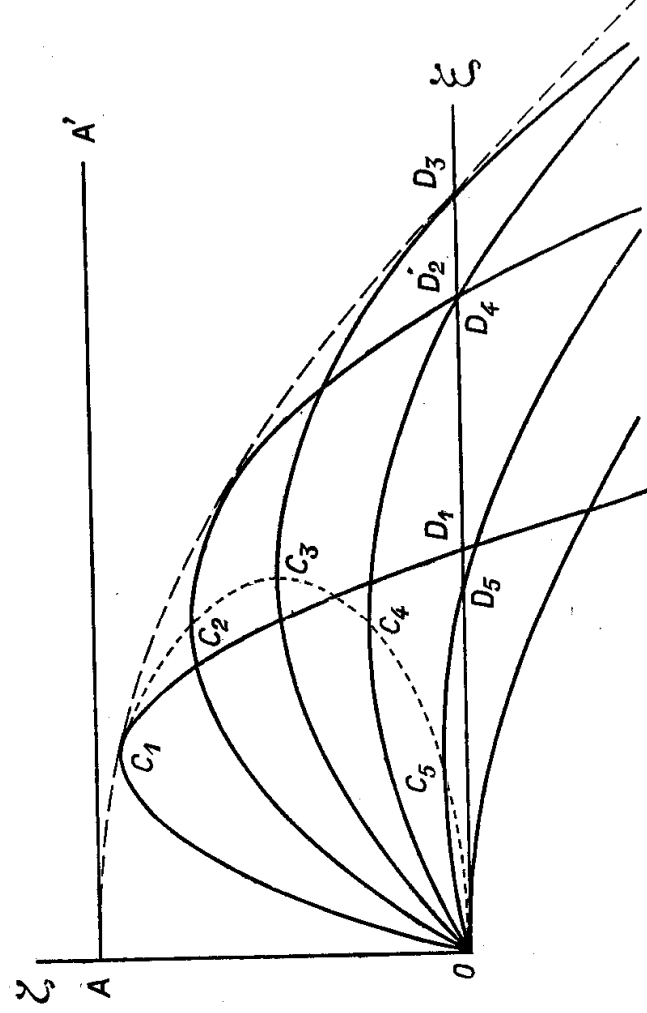


Fig. 63.

sicurezza perchè separa la regione dei punti Q accessibili da un proietto lanciato da O colla data velocità iniziale v_0 , da quella dei punti che con quella velocità iniziale restano inaccessibili.

La stessa figura mette anche in evidenza il luogo dei vertici delle parabole di tiro che è un'ellisse che ha OA per asse minore, e l'asse maggiore (orizzontale) di lunghezza doppia.

* * *

Dalle equazioni con cui abbiamo espresse ξ e ζ in funzione di t si ricava facilmente, derivando rispetto a t ,

$$\frac{d\xi}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt$$

Quadrando e sommando si ottiene la grandezza della velocità:

$$v^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} \right)^2 = v_0^2 - 2g\zeta$$

la velocità varia dunque nei vari punti delle varie traiettorie in un modo molto semplice, dipendentemente dalla sola quota ζ : se si rammenta il valore di h si può anche più semplicemente scrivere:

$$v^2 = 2g(h - \zeta)$$

il mobile giunge dunque in ogni punto dello spazio con velocità eguale in valor assoluto a quella che esso possiederebbe se in quello stesso punto giungesse cadendo verticalmente dall'orizzontale AA' : risultato questo che doveva del resto essere facilmente previsto da chiunque abbia a suo tempo lette con qualche attenzione le pagine in cui abbiamo succintamente esposte le scoperte di Galileo sulla caduta dei gravi.

** *

Quando però la velocità non è molto piccola, la resistenza del mezzo non è trascurabile: s'impone dunque a noi lo studio delle leggi del moto nella ipotesi che a questo si opponga da parte dell'aria una certa resistenza: ed è quello che ora passiamo a fare.

Ma per non complicare fin da principio eccessivamente le cose, ci limiteremo in un primo tempo al caso di un *proietto sferico* (omogeneo, o quanto meno costituito da strati sferici omogenei, sicchè il suo baricentro coincide col centro di figura ed ogni asse passante per esso sia asse centrale d'inerzia).

L'esperienza prova esaurientemente che l'attrito tra il corpo in movimento e l'aria, resta in ogni caso trascurabile: che cioè la resistenza che il mobile incontra è dovuta alla differenza delle pressioni che l'aria esercita sulle varie regioni della sua superficie, pressioni che sono molto variabili in intensità, ma che si possono sempre ritenere normali alla superficie stessa.

Nel caso della sfera le pressioni elementari saranno dunque tutte radiali: esse ammetteranno quindi certamente una risultante passante per il baricentro G : si avrà cioè ancora

$$\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = 0$$

Continuano così a valere le considerazioni fatte dianzi relativamente alla indipendenza del moto attorno al baricentro dal moto proprio di questo punto: e poichè ora ogni asse baricentrico è un asse centrale d'inerzia, il moto della sfera rispetto al suo centro (considerato come fisso) si ridurrà ad una rotazione uniforme attorno ad un asse di direzione fissa nello spazio.

* *

Per studiare poi il moto del centro della sfera rispetto agli assi fissi, conviene premettere che la risultante delle pressioni dell'aria deve, per ragioni di simmetria, essere direttamente opposta alla velocità.

Quanto alla grandezza di questa resistenza, l'esperienza dimostra che, per velocità che non superino i 150 o 200 metri al secondo, essa può con buona approssimazione ritenersi proporzionale al quadrato della velocità. Si è anzi creduto un tempo che questa legge si potesse ammettere per valori qualunque della velocità: ma non è affatto così. Il rapporto della

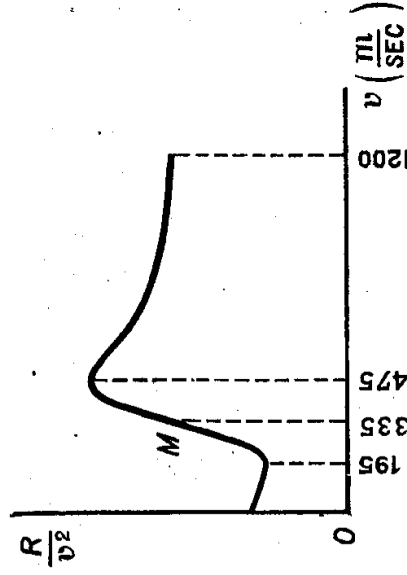


Fig. 64.

resistenza R al quadrato della velocità v , presso a crescere di v , presso a poco come è indicato nel diagramma riprodotto nella fig. 64. Si ha un minimo per $v = 195$ metri al secondo: si ha poi un massimo per $v = 475$ metri al secondo. La curva è sensibilmente simmetrica per rapporto ad un punto M che corrisponde presso a poco alla velocità del suono nell'aria. Nel tratto compreso tra il minimo ed il massimo, R può riguardarsi come proporzionale a v^4 : per velocità inferiori a 195 o superiori a 475 metri al secondo, la resistenza cresce poco meno rapidamente del quadrato della velocità.

In simili condizioni sembra prudente limitarsi ad affermare:

- 1) che la resistenza è una funzione della velocità,
- 2) che essa si annulla per $v = 0$,
- 3) che essa cresce con v indefinitamente.

Vedremo fra poco come queste nozioni, per quanto vaghe, bastino perchè se ne possano trarre alcune conseguenze della maggiore importanza.

Poniamo dunque:

$$R = -M \cdot f(v)$$

intendendo che $f(v)$ sia una funzione essenzialmente positiva e θ soddisfi alle tre condizioni sopra enunciate: indichiamo con θ

l'angolo che in un punto generico della traiettoria, la direzione della velocità v fa colla direzione positiva dell'asse ξ (fig. 65): le equazioni generali del moto divengono:

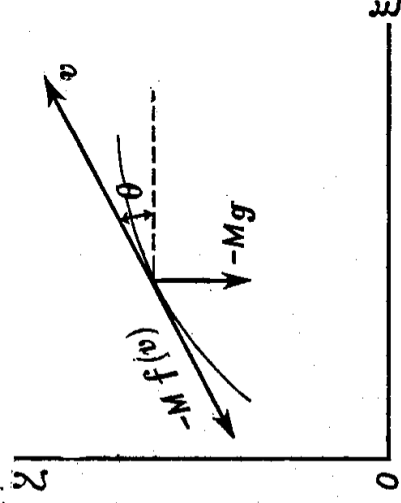


Fig. 65.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} &= -f(v) \cos \theta \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= -g - f(v) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Resta intanto confermato che, assunta come origine O la posizione iniziale, e supposto che la velocità iniziale sia contenuta nel piano verticale $\zeta \xi$, la traiettoria risulterà tutta contenuta in questo stesso piano.

Le due equazioni che la caratterizzano possono utilmente trasformarsi se si prendono in considerazione le due componenti della velocità:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= v \cos \theta \\ \frac{d\zeta}{dt} &= v \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Derivando infatti rispetto al tempo si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{dv}{dt} \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\end{aligned}$$

Se ora ai primi membri di queste due equazioni si sostituiscono i loro valori, e si eliminano poi tra esse i termini che contengono la velocità, ovvero quelli che contengono la sua derivata per rapporto al tempo, si trova:

$$\left. \begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -g \operatorname{sen} \theta - f(v) \\ v \frac{d\theta}{dt} &= -g \cos \theta\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Queste equazioni sono note sotto il nome di *equazioni intrinseche* del moto, ed avrebbero potuto ottenersi direttamente proiettando le forze applicate sulla tangente e sulla normale alla traiettoria, ed eguagliando le somme delle componenti secondo dette direzioni alle rispettive componenti della forza d'inerzia, che come ben sappiamo sono misurate da

$$M \frac{dv}{dt} \quad \text{e da} \quad \frac{v^2}{r}$$

essendo r il raggio di curvatura, il cui valore è

$$-\frac{ds}{d\theta} = -\frac{v dt}{d\theta}$$

Comunque vi si arrivi, quelle due equazioni differenziali determinano completamente la legge del moto: se è data la funzione $f(v)$ (insieme, naturalmente, colle condizioni iniziali): reciprocamente si può dimostrare che, se fosse nota la traiettoria, si potrebbe sempre da quelle equazioni ricavare la funzione $f(v)$ epperò la legge cui obbedisce la resistenza dell'aria.

L'integrazione di quelle equazioni differenziali non si sa però fare se non in qualche caso particolare.

Legendre e D'Alembert l'hanno eseguita supponendo

$$f(v) = a + bv^n$$

ovvero

$$f(v) = a + b \log v$$

(con a, b, n costanti) ma i calcoli relativi sono laboriosi, e per di più privi di interesse pratico, visto che nè l'una nè l'altra di queste funzioni rappresentano con sufficiente approssimazione, entro limiti abbastanza estesi, la resistenza dell'aria.

* * *

Si possono invece, anche senza rinunciare alla generalità della trattazione, stabilire le seguenti particolarità caratteristiche della traiettoria, che la distinguono da quella nel vuoto (*).

1) *La velocità orizzontale va sempre decrescendo* (mentre nel vuoto era costante).

La prima delle equazioni generali del moto si può infatti evidentemente scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\xi}{dt} \right) = -f(v) \cos \theta$$

e sotto questa forma essa mostra che la derivata della componente orizzontale della velocità è essenzialmente negativa (poichè $f(v)$ è per ipotesi positiva e θ si mantiene compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$); quella componente è dunque una funzione decrescente del tempo.

2) *A parità di altezza la inclinazione della traiettoria sulla orizzontale è minore nel ramo ascendente che nel discendente* (mentre nel vuoto i due rami erano simmetrici).

Dividendo infatti membro a membro la seconda delle (43) per la seconda delle (44) si trova la relazione:

$$\tan \theta \cdot d\theta = -\frac{g}{v^2} = d\zeta$$

(*) Cfr. F. SIACCI, *Lezioni di Meccanica razion.* (litogr.) Torino 1892, pag. 220 e sg

la quale si può anche scrivere sotto la forma

$$\operatorname{tang} \theta \cdot d(\operatorname{tang} \theta) = - \frac{g}{(v \cos \theta)^2} d\zeta$$

Sia ora ζ_a la quota comune a due punti generici A' e A'' della traiettoria, scelti il primo sul ramo ascendente ed il secondo sul discendente (fig. 66) e sia ζ_c la quota del vertice C (caratterizzato, com'è naturale, dalla condizione $\theta = 0$).

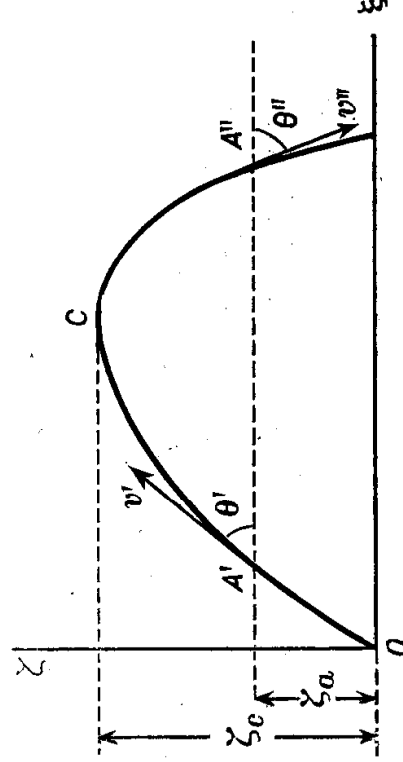


Fig. 66.

Integrando tra A' e C , ovvero tra A'' e C , si ha:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \theta' = \int_{\zeta_a}^{\zeta_c} \frac{g}{(v \cos \theta)^2} d\zeta$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 \theta'' = \int_{\zeta_a}^{\zeta_c} \frac{g}{(v \cos \theta)^2} d\zeta$$

Ora i limiti ai due integrali sono gli stessi, ma i singoli elementi che compongono il primo integrale sono più piccoli dei corrispondenti elementi del secondo integrale, perchè $v \cos \theta = \frac{d\zeta}{dt}$ è, come già abbiamo dimostrato, sempre più grande nel ramo ascendente che nel discendente. Ne segue immediatamente che in valor assoluto:

$$\theta' < \theta''$$

3) *A parità di altezza, la velocità è maggiore nel ramo ascendente che nel discendente* (mentre nel vuoto queste due velocità sono sempre eguali).

Moltiplicando infatti la prima delle (44) per $v \cdot dt = ds$, e tenendo presente che $ds \cdot \sin \theta = d\zeta$, si trova:

$$v \cdot dv = -gd\zeta - f(v) ds$$

ed integrando tra A' ed A'' :

$$\frac{1}{2} (v'^2 - v''^2) = - \int f(v) ds$$

Ma gli elementi di questo integrale sono tutti certamente positivi: il secondo membro perciò sarà negativo: quindi:

$$v'' < v'$$

4) *La velocità è decrescente lungo tutto il ramo ascendente, e anche lungo un primo tratto del ramo discendente, sul quale perciò si trova il punto di velocità minima. Poi la velocità prende a crescere tendendo verso un limite finito.* (Nel vuoto la velocità è minima al vertice, poi cresce indefinitamente).

Riscriviamo infatti la prima delle (44):

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \theta - f(v)$$

ed osserviamo che in essa θ va continuamente decrescendo, prima dal valor iniziale (supposto positivo) a zero, poi con valori negativi sempre maggiori (in valore assoluto).

Nel ramo ascendente pertanto i due termini del binomio al secondo membro hanno indubbiamente entrambi il segno indicato: la derivata della velocità rispetto al tempo è indubbiamente negativa: la velocità diminuisce.

Al vertice cioè per $\theta = 0$ la velocità continua a diminuire poichè ivi si deve avere:

$$\frac{dv}{dt} = -f(v)$$

E continuerà a diminuire la velocità fino a che non si abbia:

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

il che avviene per un certo punto C_1 (fig. 67) nel quale la inclinazione θ_1 soddisfi alla condizione:

$$g \operatorname{sen} \theta_1 + f(v_1) = 0$$

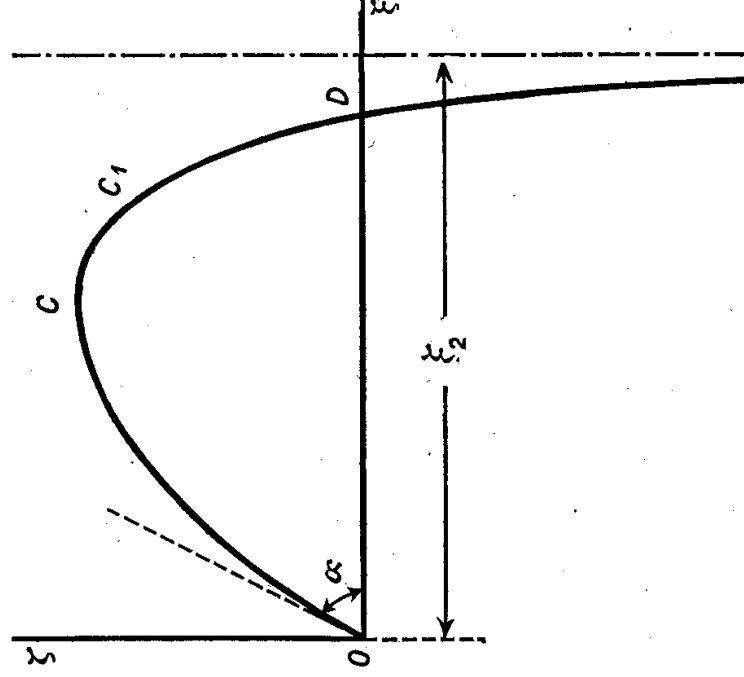


Fig. 67.

Ivi la velocità sarà minima: infatti derivando:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -g \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \frac{df(v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$

e ponendo per $\frac{dv}{dt}$ il valore zero, e per $\frac{d\theta}{dt}$ il valore $-\frac{g \cos \theta}{v}$ che si ricava dalla seconda delle (44), si trova un'espressione:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{(g \cos \theta_1)^2}{v_1}$$

essenzialmente positiva.

Al di là di C_1 la velocità andrà dunque crescendo e perciò sarà:

$$\frac{dv}{dt} = -g \operatorname{sen} \theta - f(v) > 0$$

cioè sarà $f(v)$ in valor assoluto minore di $-g \operatorname{sen} \theta$.

Ma al crescere di v la funzione $f(v)$ cresce per ipotesi indefinitamente, mentre $-g \operatorname{sen} \theta$ può tutto al più crescere fino al valore limite g : dovrà dunque giungere un momento in cui di nuovo

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Indichiamo con v_2 la grandezza certamente finita allora assunta dalla velocità, e con θ_2 la rispettiva inclinazione sull'asse delle ξ .

È evidente che v_2 non può essere un minimo perchè v tende a questo valore mantenendosi sempre crescente: ma v_2 non può neppure essere un massimo perchè:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{(g \cos \theta_2)^2}{v_2}$$

non può in nessun modo divenir negativa. Convien dunque ammettere che sia:

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{(g \cos \theta_2)^2}{v_2} = 0$$

il che, per v_2 finita, non può essere se non quando si abbia:

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$$

Allora la condizione:

$$\frac{dv}{dt} = g - f(v_2) = 0$$

determina un valore v_2 della velocità che si usa chiamare *velocità finale di caduta*: essa rappresenta un limite oltre il quale v non può andare: questo limite, come si vede dalla formola testè scritta, non dipende che dalla natura della funzione $f(v)$: non compare in quella formola nessuna delle condizioni iniziali che hanno determinato il movimento.

Esso vale quindi in particolare anche per il caso della semplice caduta verticale.

D'altronde qualunque siano le condizioni iniziali:

5) *Il ramo discendente ammette sempre un asintoto verticale* (ciò che non si verificava affatto nel vuoto).

Basterà dimostrare che la tangente estrema del ramo discendente, che come abbiamo visto testè deve essere verticale, corrisponde ad una ascissa finita. A tal fine basta osservare che, dividendo membro a membro la prima delle (43) per la seconda delle (44) si ottiene:

$$d\xi = -\frac{v^2}{g} d\theta$$

ed integrando, dall'origine ove $\theta = \alpha$ fino al punto in cui

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ si ha:}$$

$$\xi_2 = \frac{K}{g} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

K essendo un valor medio tra quelli che v^2 assume nell'intervallo considerato, valor medio che non ci preme affatto di precisare: basta rilevare che esso sarà certamente finito perchè tale si mantiene sempre la velocità.

**

In conclusione si può ben dire che la resistenza del mezzo, anche se di lieve intensità finisce col modificare radicalmente l'andamento qualitativo del fenomeno.

Ma per le velocità elevate, quali son quelle dei proietti delle moderne armi da fuoco, l'influenza della resistenza del mezzo diviene, anche quantitativamente, notevolissima.

Valga a dimostrarlo il seguente paragone (*) tra i risultati che si ricavano dalla teoria del movimento parabolico nel vuoto e quelli che in realtà si osservano nel caso di una palla da fucile animata da una velocità iniziale di 625 metri al secondo.

	Nel vuoto	Nell'aria
Angolo di tiro corrispondente alla		
portata massima	45°	32°
Portata massima	40 Km.	4 Km.
Altezza del vertice della traiettoria		
di portata massima	10 Km.	0,5 Km.
Ascissa di questo vertice	20 Km.	2,2 Km.

(*) Cfr. L. LECORNU, *Cours de Mécanique*, tome I, Paris 1914, pag. 294.

Di fronte a siffatti risultati diviene naturale che gli artiglieri si siano per tempo preoccupati di diminuire nei limiti del possibile l'entità della resistenza dell'aria al moto dei proietti, sostituendo alla forma sferica delle forme allungate di miglior penetrazione, cioè munite di una prora (e qualche volta anche di una poppa) ogivale.

* * *

Questa innovazione ha però complicato enormemente il problema che ci occupa.

Infatti se il cannone lancia un proietto non sferico senza imprimergli nel tempo stesso un moto di rotazione su se stesso, il centro di gravità di questo inizierebbe bensì la solita traiettoria: ma il suo asse presenterebbe, sotto l'azione della resistenza dell'aria, dei mutamenti di orientazione tutt'affatto irregolari. Nel tempo stesso, variando coll'obliquità dell'asse sulla traiettoria anche la direzione della suddetta resistenza, la stessa traiettoria verrebbe ad esserne influenzata in un modo che sfugge a qualsiasi tentativo di analisi, e però si sottrae ad ogni previsione.

Per regolarizzare il movimento bisogna dunque imprimere al proietto una rapida rotazione iniziale attorno al suo asse di figura, per mezzo di certe rigature elicoidali a passo gradualmente decrescente, all'uopo praticate nell'anima del cannone, e nelle quali si impegna una cintura di rame di cui il proietto è munito.

Si riesce così a conferire al proietto una specie di stabilità dinamica rispetto alle deviazioni del suo asse, del genere di quella che è propria dei giroscopii.

Si noti però subito che questa stabilità è ben lontana dal mantenere all'asse la direzione primitiva, o anche soltanto una direzione prossima alla primitiva.

Ciò si verificherebbe certamente se il movimento avvenisse nel vuoto, visto che l'asse di figura attorno a cui la rotazione avviene è asse centrale d'inerzia e quindi asse naturale di rotazione del sistema.

E si verificherebbe anche nell'aria se la stabilità in discorso fosse infinita, come accadrebbe se fosse infinitamente grande la velocità propria di rotazione.

**

Ma ciò non sarebbe neppure utile: in tal caso infatti l'asse del proietto, conservandosi sempre parallelo a sè stesso verrebbe a formare un angolo sempre crescente colla tangente alla traiettoria cioè colla direzione del movimento (fig. 68) e si intuisce subito che si verrebbero così a perdere in gran parte del percorso, quei vantaggi di miglior penetrazione rispetto al mezzo, per raggiungere i quali era stata ideata la forma ogivale.

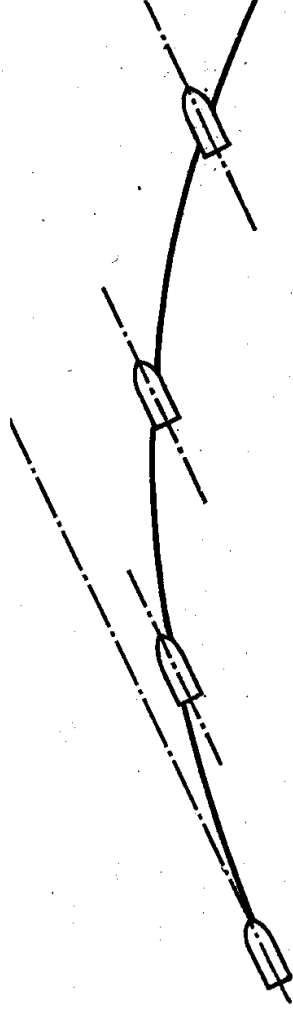


Fig. 68.

In realtà le cose procedono ben diversamente: l'esperienza dimostra che il proietto cade colla punta in avanti, cioè che il suo asse di figura fa sempre un angolo assai piccolo colla tangente alla traiettoria descritta dal baricentro. E dimostra anche che, per quanto l'aria sia calma e siano escluse altre perturbazioni impreviste, detta traiettoria esce sempre dal piano verticale determinato dalla velocità iniziale (piano del tiro) e ne esce sempre da una parte ben determinata.

Noi vogliamo pertanto cercare di renderci ragione di questi due fatti caratteristici e, apparentemente, abbastanza singolari: ma siccome la teoria completa è estremamente complicata, e d'altronde non raggiunge lo scopo di dare dei risultati numerici che possano venir utilizzati senza l'intervento di coefficienti empirici di correzione, così noi ci limiteremo ad una discussione semplicemente qualitativa del fenomeno (*).

(*) Cfr. E. W. BOGART, *L'effet gyrostatique et ses applications*, Paris 1912, pag. 108 e seg.

* * *

Abbiamo già avuto occasione di dire che l'attrito fra la superficie del proietto e l'aria è trascurabile, sicchè la resistenza del mezzo può venire valutata prescindendo dal moto di rotazione propria. La pressione che si esercita su ciascun elemento di superficie è dunque normale all'elemento epperò incidente all'asse di figura.

La resistenza, che è la risultante di tutte queste pressioni, dovrà per conseguenza essere essa pure incidente all'asse di figura: per ragioni di simmetria, essa dovrà anzi stare nel piano di quest'asse e della tangente alla traiettoria descritta dal baricentro.

Nei casi pratici, cioè per le forme di proietti adottate nelle moderne artiglierie, la resistenza R incontra l'asse di figura del proietto in un punto C situato un po' davanti al baricentro G (cioè tra G e la punta P).

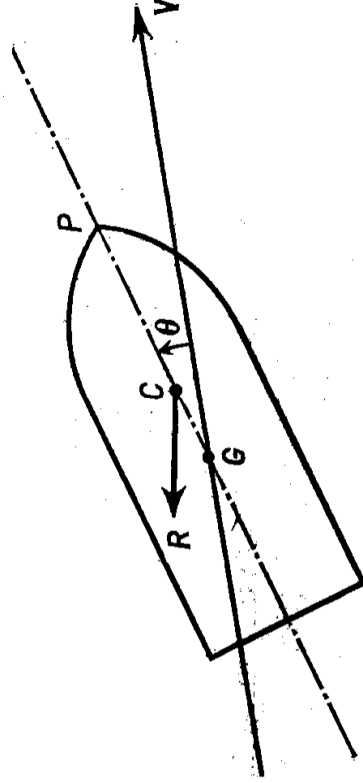


Fig. 69.

Ne segue che questa resistenza tenderebbe (se non esistesse la rotazione propria) a far crescere l'angolo θ che l'asse GP del proietto fa eventualmente colla direzione GV del moto del suo baricentro (fig. 69).

Ma esiste la rotazione propria, e, grazie a questa, le cose procederanno nel modo che abbiamo descritto trattando della trottoia: l'asse di figura GP assumerà cioè una certa velocità di precessione e tenderà a descrivere un cono di rivoluzione avente per asse GV : quanto al senso sarà quello stesso della rotazione propria (fig. 70).

D'ordinario il senso della rigatura elicoidale dei cannoni è tale che il proietto vi assume una rotazione destrorsa per l'osservatore che stando presso il cannone vede il proietto allontanarsi.

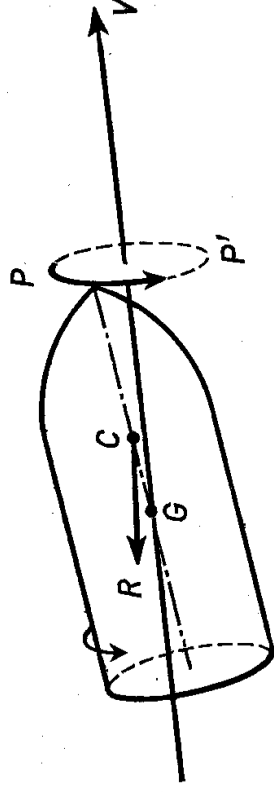


Fig. 70.

E siccome per effetto della curvatura della traiettoria la punta del proietto viene ben presto a trovarsi rivolta verso l'alto, così la precessione dovrà verificarsi per modo che la punta esca dal piano del tiro precisamente verso la destra dello stesso osservatore.

Se la direzione GV del moto non mutasse, la punta del proietto dovrebbe ritornare a cadere nel piano del tiro in un punto P' simmetrico di P rispetto a GV : poi dovrebbe passare dall'altra parte del piano risalendo fino a ritornare in P .

Ma le cose vanno in realtà ben diversamente perchè la direzione GV del moto muta continuamente volgendosi sempre più verso il basso.

Da un punto fisso O dello spazio (fig. 71) immaginiamo condotte le parallele OV ed OP alle direzioni GV e GP : indichiamo più precisamente con V e con P le tracce di quelle due parallele sopra una sfera arbitraria di centro O .

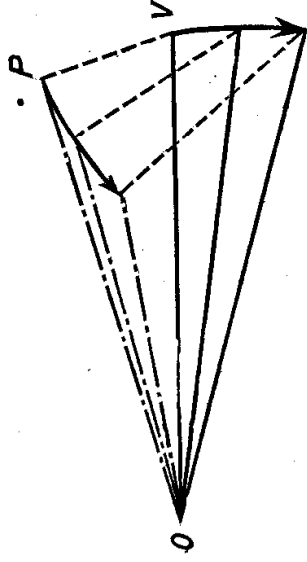


Fig. 71.

A titolo di prima valutazione sufficientemente approssimata del fenomeno, supponiamo che la direzione del moto GV compia la sua evoluzione verso il basso mantenendosi sempre nel piano del tiro; il punto V descriverà sulla superficie della sfera un certo arco di circolo massimo in un piano verticale.

Quanto a P noi sappiamo che esso dovrà in ogni istante spostarsi normalmente al piano in cui agisce la R , vale a dire

normalmente al piano $VO P$: la curva che P descriverà sulla superficie sferica sarà dunque della specie delle cicloidi e potrà assumere diversi andamenti (analoghi a quelli caratteristici di queste curve) dipendentemente dai diversi valori del rapporto fra la velocità di rotazione $\frac{d\theta}{dt}$ del raggio $O V$ e quella di precessione del raggio $O P$.

Fin che questo rapporto si mantiene abbastanza grande la curva descritta da P sulla superficie sferica ha un andamento come quello della fig. 72 (analogo a quello delle cicloidi allungate): al decrescere del suddetto rapporto si passa poi al caso della fig. 73, quindi a quello della fig. 74 (analoghi a quelli della cicloide ordinaria e della cicloide accorciata).

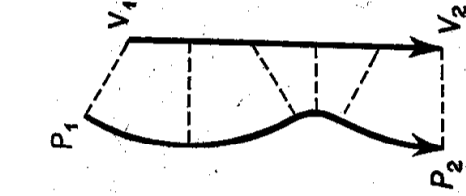


Fig. 72.

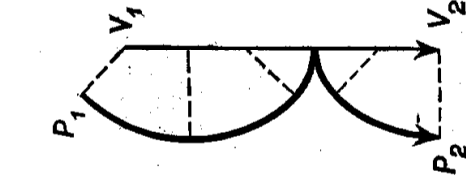


Fig. 73.

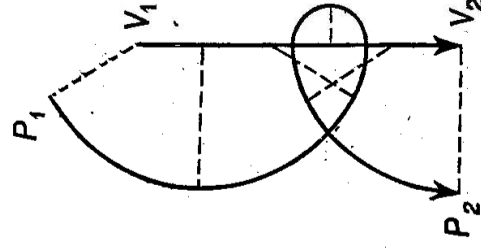


Fig. 74.

Tutti questi casi possono del resto verificarsi anche lungo la traiettoria di un unico proietto, specie nel caso del tiro indiretto.

Nel tratto ascendente della traiettoria, $\frac{d\theta}{dt}$ è infatti crescente, raggiunge il massimo valore in corrispondenza del vertice, poi prende a decrescere e tende verso zero.

La velocità di precessione subisce invece variazioni di senso contrario: come infatti si è dimostrato nella teoria generale dell'effetto giroscopico, questa velocità, a parità di altre circostanze è proporzionale alla forza deviatrice: ora la R che qui compie la funzione di forza deviatrice è una funzione crescente della velocità del proietto: diminuisce quindi lungo il tratto ascendente della traiettoria, passa per un minimo un po' dopo

il vertice di questa, poi prende ad aumentare per tendere ad un valore finale fisso.

Convien dunque ritenere che il rapporto di cui si tratta sarà relativamente grande nel primo tratto della traiettoria e soprattutto nel tratto prossimo al vertice di essa e decrescerà poi sempre più rapidamente man mano che la traiettoria volgerà verso il basso.

In condizioni normali la curva che P traccia sulla solita superficie sferica presenta un andamento del genere di quello raffigurato nella fig. 75.

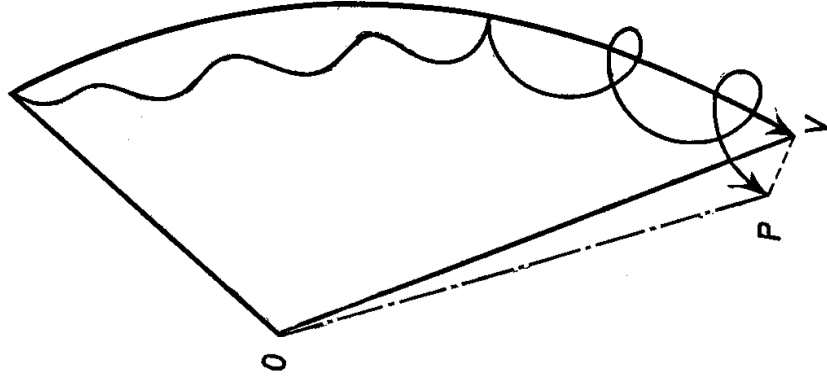


Fig. 75.

Abbiamo detto che la resistenza R dell'aria sta nel piano della tangente alla traiettoria descritta dal baricentro e dell'asse di figura.

Immaginiamo tale resistenza trasportata parallelamente a sè stessa fino a passare pel baricentro G : la coppia che

nasce nel trasporto è quella che determina il fenomeno di precessione che siamo venuti descrivendo: quanto alla forza la si potrà sempre pensar decomposta in due componenti, l'una R_1 diretta secondo la tangente alla traiettoria, l'altra R_2 normale ad essa (fig. 76).

Naturalmente R_1 riesce sempre rivolta in senso opposto alla velocità V : essa influisce pertanto sulla velocità determinando certe variazioni di essa le quali in linea generale possono ancora sintetizzarsi nelle medesime regole da noi trovate pel caso del proietto sferico.

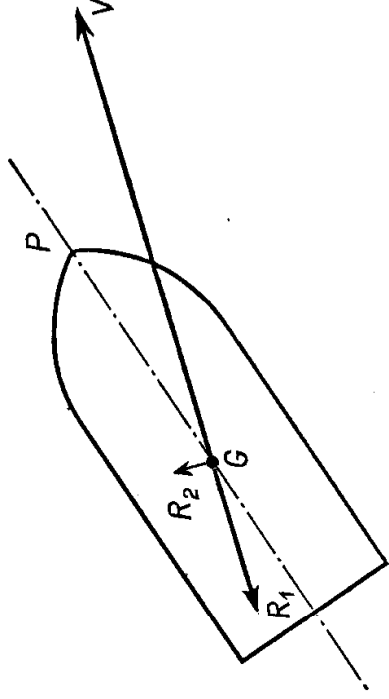


Fig. 76.

Quanto ad R , è sempre rivolta da quella parte dalla quale trovansi la punta P del proietto: e produce naturalmente una deviazione (verso quella medesima parte) della traiettoria ulteriore del baricentro.

Ecco dunque che il moto del baricentro viene a dipendere, e in modo tutt'altro che semplice, dai movimenti che il proietto compie ruotando attorno ad esso. Ecco che, in particolare, basta che l'asse di figura esca, nel modo e per le ragioni sopra illustrate, dal piano del tiro perchè anche la traiettoria del baricentro esca da quel piano.

Ciò posto è evidente che se quella certa curva rappresentativa dei movimenti di P è del tipo delle cicloidi allungate (fig. 72) od ordinarie (fig. 73), sicchè P si mantiene sempre da una stessa parte del piano verticale per GV , anche la deviazione della traiettoria si verificherà sempre dalla medesima parte.

Pei tipi di rigatura che abbiamo definiti come abituali, la deviazione avverrà verso la destra del solito osservatore che, stando presso il cannone, guarda il proietto che si allontana. Egli dovrà cioè constatare che il proietto va a cadere alla destra del piano di tiro.

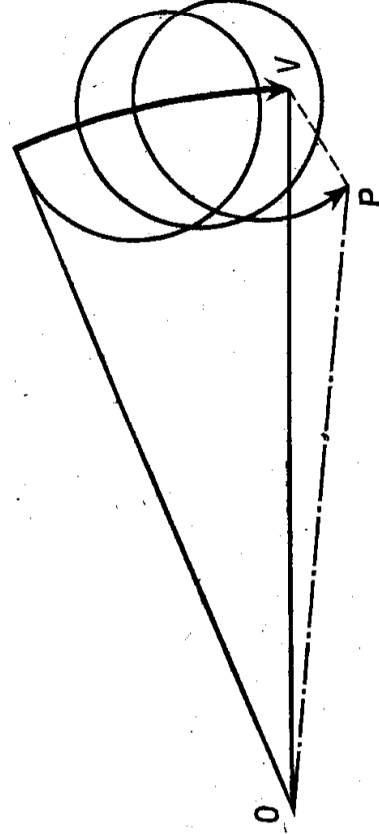


Fig. 77.

Quando invece la curva rappresentativa dei movimenti di P è del tipo delle cicloidi accorciate (fig. 74), sicchè durante una parte più o meno grande del percorso, P passa alla sinistra del piano verticale per GV , le deviazioni verso sinistra che allora avranno luogo verranno a compensare *parzialmente* quelle verso destra che si verificano durante tutto il resto del percorso.

Lo spostamento finale avverrà bensì ancora verso destra, ma sarà, in queste ultime ipotesi, assai meno sentito: tanto meno sentito quanto più accorciata sarà quella specie di cicloide (fig. 77): gli artigieri dicono allora che vi è una maggiore stabilità di tiro.

Le considerazioni che siamo venuti svolgendo ci permettono anche di fissare alcune norme di carattere generale relativamente alla possibilità di conseguire la massima stabilità di tiro.

Basta pensare che la cicloide risulterà tanto più accorciata quanto più piccola sarà la velocità $\frac{d\theta}{dt}$ e quanto più grande sarà la velocità di precessione. Ora $\frac{d\theta}{dt}$ non si potrà mai annullare; ma si può rendere piccola quanto si vuole assumendo grande la velocità iniziale.

Quanto alla velocità di precessione basta rammentare quel che ne abbiamo detto trattando dell'effetto giroscopico in generale: si vede subito che la si può accrescere in due modi: accrescendo il momento della forza deviatrice o riducendo il valore Cr della quantità di moto dovuta alla rotazione propria del proietto.

Ora nessuno penserà certamente di accrescere artificialmente l'intensità della forza deviatrice (che è poi la resistenza dell'aria) perchè ciò produrrebbe una riduzione di portata del tiro: ma si può accrescerne il momento, facendo in modo che cresca il suo braccio, col portare il baricentro del proietto quanto più è possibile indietro, cioè presso il fondello.

Si modererà poi, almeno entro certi limiti, il valore del prodotto Cr riducendo la velocità propria di rotazione del proietto su sè stesso, tanto più quanto più grande è C , cioè quanto maggiore è il calibro.

Si spiega così perchè gli artiglieri abbiano riscontrato che la stabilità del tiro si ottiene più facilmente coi piccoli calibri e nel caso di tiro diretto, cioè a traiettoria molto tesa: mentre coi grossi calibri, specie se usati pel tiro indiretto (obici, mortai, ecc.) una discreta stabilità può ottenersi soltanto a condizione che il proietto abbia il baricentro molto all'indietro e che la rigatura del pezzo sia a passo molto allungato sì da imprimere al proietto una velocità di rotazione su se stesso relativamente moderata.

