III.

LE EQUAZIONI DEI MOMENTI DELLE QUANTITÀ DI MOTO E IL TEOREMA DELLE AREE

Denotiamo con

$$S_x = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$$
$$S_y = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$$
$$S_z = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

le tre componenti secondo i tre assi coordinati del momento risultante delle quantità di moto del sistema, o, come li chiameremo più brevemente, i tre momenti della quantità di moto. Per uno qualunque di essi, per esempio per il primo, si ha:

$$\frac{dS_x}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Le (21) si possono dunque scrivere sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS_x}{dt} &= \Sigma(yZ - zY) \\ \frac{dS_y}{dt} &= \Sigma(zX - xZ) \\ \frac{dS_z}{dt} &= \Sigma(xY - yX) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

ed esprimere dicendo che: *se i vincoli permettono ad ogni istante una rotazione rigida qualunque attorno ad un asse fisso, la derivata* *del momento della quantità di moto rispetto a quell'asse è eguale all'analogo momento delle forze applicate.*

E ancora: *se i vincoli permettono ad ogni istante tre rotazioni rigide qualunque attorno a tre assi non complanari uscenti da un punto fisso, la derivata del momento della quantità di moto rispetto a tale punto è eguale all'analogo momento delle forze applicate.*

S'intende che nella valutazione di questi momenti delle forze applicate vale l'osservazione fatta precedentemente secondo la quale le forze *interne* si eliminano, sicchè il calcolo può senza altro limitarsi alle sole *forze esterne.*

Se pertanto il momento delle forze esterne è nullo rispetto ad un dato asse fisso (ovvero rispetto ad un dato punto fisso) come accade ogniqualvolta quelle forze ammettono una unica risultante incidente a quell'asse (ovvero passante per quel punto), allora anche la derivata del momento della quantità di moto rispetto all'asse (ovvero rispetto al punto) deve èssere nulla alla sua volta: epperò *il momento della quantità di moto si conserva costante.*

Tipico sotto questo punto di vista è il caso del *sistema solare* pel quale abbiamo già detto che le forze esterne (attrazioni stellari) sono trascurabili, ed inoltre distribuite tutto all'intorno per modo che sembra legittimo ritenere che si facciano equilibrio. Il loro momento sarà quindi da ritenersi nullo rispetto a qualunque punto dello spazio.

Il vettore *momento della quantità di moto* del sistema solare *sarà dunque costante in grandezza, direzione e senso.*

Se per un punto qualunque, per esempio pel baricentro del sistema, si immagina condotto un piano normale alla direzione di quel vettore, questo piano dovrà mantenersi sempre parallelo a sè stesso.

A questo piano, a cui gli astronomi hanno trovato comodo riferirsi nelle loro più delicate ricerche di meccanica celeste, è stato dato il nome di *piano invariabile.*

***

Ritorniamo ora al caso generale, e consideriamo un punto generico M di un sistema in movimento, al quale i vincoli permettano ad ogni istante le solite tre rotazioni attorno a tre assi non complanari uscenti da un punto fisso: ed indichiamo con ds lo spostamento piccolissimo MN (fig. 26) che quel punto subisce nell'intervallo pure piccolissimo di tempo dt.

Il raggio vettore OM che dal punto fisso O (origine degli assi) va al punto mobile considerato, descrive, nello stesso intervallo di tempo, un elemento di superficie OMN che, secondo le convenzioni in uso, riterremo rappresentato da un vettore dA diretto normalmente ad esso e di grandezza eguale alla sua area.

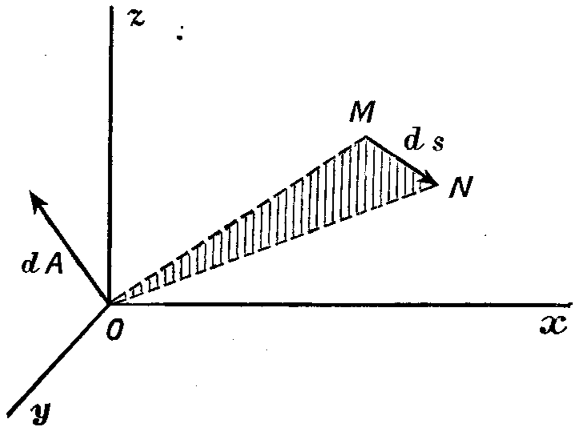

Fig. 26.

Ciò posto si rammenti che il momento rispetto ad O del vettore ds è per definizione eguale al doppio del vettore dA.

Dividendo tanto l'uno che l'altro per il tempo dt e passando al limite, potremo anche dire che: *il momento rispetto ad* O *della velocità del punto mobile* M *è eguale al doppio della derivata, presa rispetto al tempo dell'area descritta dal raggio vettore che da* O *va ad* M.

Denotando con A_x, A_y, A_z le proiezioni di quest'area rispettivamente sui piani coordinati yz, zx, xy scriveremo:

$$2\,\frac{dA_x}{dt} = y\,\frac{dz}{dt} - z\,\frac{dy}{dt}$$

$$2\,\frac{dA_y}{dt} = z\,\frac{dx}{dt} - x\,\frac{dz}{dt}$$

$$2\,\frac{dA_z}{dt} = x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}$$

Moltiplichiamo entrambi i membri di ciascuna di queste relazioni per la massa m del punto M cui si riferiscono: poi sommiamole con le loro analoghe relative a tutti gli altri punti del sistema; avremo

$$2\frac{d}{dt}\Sigma m A_x = \sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = S_x$$

$$2\frac{d}{dt}\Sigma m A_y = \sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = S_y$$

$$2\frac{d}{dt}\Sigma m A_z = \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = S_z$$

e derivando ancora rispetto al tempo:

$$2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_x = \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{dS_x}{dt}$$

$$2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_y = \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \frac{dS_y}{dt}$$

$$2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_z = \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{dS_z}{dt}$$

Di qui una nuova forma sotto cui possono essere scritte le (21):

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_x &= \Sigma(yZ - zY) \\ 2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_y &= \Sigma(zX - xZ) \\ 2\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_z &= \Sigma(xY - yX) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Se le forze esterne hanno momento nullo per rapporto ad un asse, per esempio all'asse delle x (come accade ogni qualvolta esse ammettono un'unica risultante la cui linea di azione giaccia in un piano con quell'asse) si ha subito:

$$\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m A_x = 0$$

epperò:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m A_x = \text{costante}$$

donde il teorema:

se le forze esterne presentano momento nullo rispetto ad una retta fissa, la somma dei prodotti delle singole masse per le proiezioni, sul piano normale alla retta, delle aree descritte dai raggi vettori che da un punto qualunque della retta vanno alle masse stesse, varia proporzionalmente al tempo.

Che se poi i momenti delle forze esterne sono nulli per rapporto a tutti tre gli assi coordinati (come accade ogniqualvolta esse forze ammettono una risultante la cui linea d'azione passa per l'origine) sussistono tre equazioni del tipo:

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m\, A_x = \text{costante}$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m\, A_y = \text{costante}$$

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m\, A_z = \text{costante}.$$

Esse prendono il nome di *integrali delle aree,* ed esprimono il seguente teorema:

se le forze esterne presentano momento nullo rispetto ad un punto fisso dello spazio, la somma dei prodotti delle singole masse per le aree descritte dai raggi vettori che da quel punto vanno alle masse stesse, varia proporzionalmente al tempo.

Le costanti al secondo membro prendono il nome di *costanti delle aree.*

Se, come caso particolare, un sistema è inizialmente in quiete, e si mette in un dato istante in moto sotto l'azione di sole forze interne, le costanti delle aree devono ovviamente essere tutte e tre nulle: si ha cioè, rispetto all'asse x:

$$\frac{d}{dt} \Sigma\, m\, A_x = 0$$

epperò:

$$\Sigma\, m\, A_x = \text{costante}.$$

Ma anche questa nuova costante può assumersi eguale a zero solo che si convenga di misurare le aree descritte dai raggi vettori (nonchè le loro proiezioni sui piani coordinati) a partire dalla posizione iniziale di quiete del sistema; di qui le equazioni:

$$\sum m A_x = 0$$
$$\sum m A_y = 0$$
$$\sum m A_z = 0$$

ed il teorema:

se un sistema inizialmente in quiete si mette in movimento sotto l'azione di sole forze interne, la somma dei prodotti delle singole masse per le aree descritte dai raggi vettori che da un punto fisso qualunque vanno alle masse stesse, è sempre nulla.

***

Applicazione al caso di un sistema ruotante attorno ad un asse. — Sia z quest'asse: ogni punto M del sistema si dovrà ritenere mobile su di una circonferenza giacente in un piano parallelo al piano xy ed avente il centro sull'.

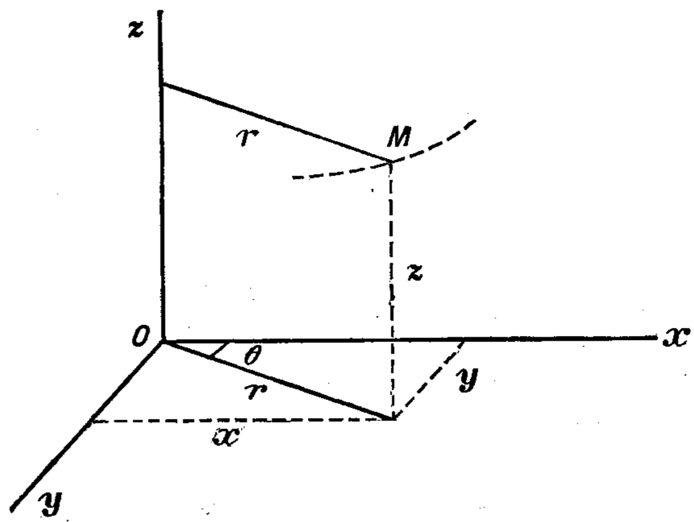

Fig. 27.

Indicheremo genericamente con x, y, z le coordinate di un tal punto (fig. 27) con r la sua distanza dall'asse z, con θ l'angolo che il piano passante per l'asse z e per il punto forma, in un dato istante, col piano fisso zx: si ha allora:

$$x = r \cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta .$$

In queste relazioni r è costante: solo l'angolo θ è funzione del tempo: derivando pertanto rispetto al tempo, e denotando con

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

la velocità angolare relativa al punto considerato, si trova:

$$\frac{dx}{dt} = -r\omega \operatorname{sen}\theta \qquad \frac{dy}{dt} = r\omega\cos\theta$$

Si ottiene così per il momento della quantità di moto rispetto all'asse z l'espressione:

$$S_z = \sum m\,(r^2\omega\cos^2\theta + r^2\omega \operatorname{sen}^2\theta) = \sum m r^2 \omega$$

Supponiamo, tanto per incominciare dal caso più semplice, che il sistema sia rigido: che cioè ω sia eguale per tutti i punti: in questo caso detto $J_z = \sum m r^2$ il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z, si ha:

$$S_z = J_z\,.\,\omega$$

Il momento della quantità di moto di un sistema rigido ruotante attorno ad un asse fisso, rispetto a questo stesso asse, è eguale al prodotto del relativo momento d'inerzia per la velocità angolare.

L'equazione del momento della quantità di moto rispetto a z diviene:

$$\frac{dS_z}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt} = \sum (xY - yX)$$

Ma $\frac{d\omega}{dt}$ non è altro che l'accelerazione angolare: questa è dunque proporzionale al momento motore così come nel moto rettilineo l'accelerazione (lineare) era proporzionale alla forza motrice: soltanto, il coefficiente di proporzionalità che, nel caso del moto rettilineo, era la massa del sistema, qui, nel caso del moto rotatorio, è il suo momento d'inerzia rispetto all'asse.

Se in particolare il momento delle forze applicate è nullo, si ha:

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = 0$$

epperò:

$$J_z \omega = \text{costante}$$

Poichè J_z è invariabile, ciò significa che anche la velocità angolare deve mantenersi costante.

***

Passiamo ora ad un caso lievemente più complicato: supponiamo che il sistema consti di due parti rigide, ma girevoli l'una rispetto all'altra attorno all'asse z.

Indichiamo con J_z' e con J_z'' i loro due momenti d'inerzia rispetto a quest'asse; con:

$$\omega' = \frac{d\theta'}{dt} \quad \text{e con} \quad \omega'' = \frac{d\theta''}{dt}$$

le loro velocità angolari; e quindi con

$$S_z = J_z' \omega' + J_z'' \omega''$$

il momento della quantità di moto rispetto a z.

L'equazione del moto diviene:

$$\frac{dS_z}{dt} = J_z' \frac{d\omega'}{dt} + J_z'' \frac{d\omega''}{dt} = \Sigma (xY - yX)$$

Se il momento delle forze applicate è nullo, essa si riduce a

$$J_z' \frac{d\omega'}{dt} + J_z'' \frac{d\omega''}{dt} = 0$$

e dà subito

$$J_z' \omega' + J_z'' \omega'' = \text{costante}$$

La (fig. 28) rappresenta un apparecchio che permette molto facilmente di realizzare la cosa sperimentalmente (*).

Un telaio rettangolare è sospeso ad un lungo filo molto fino in modo che esso possa comunque ruotare attorno ad una sua mediana (verticale) senza incontrare resistenza apprezzabile. In corrispondenza della stessa mediana è montato dentro il telaio

---

(*) Cfr. H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris, Delagrave, pag. 300.

un asse girevole su perni il quale a mezzo di una traversa orizzontale porta due masse mobili, manovrando le quali si può facilmente far variare a volontà il rapporto dei momenti d'inerzia.

L'asse girevole è collegato al telaio da una molla ad elica (di momento d'inerzia trascurabile) che può venir messa in tensione spostando l'una rispetto all'altra le due parti che compongono il sistema: fissiamo tali parti spostate a mezzo di un filo di refe: poi, quando il sistema abbandonato a sè stesso sia in quiete, bruciamo il filo.

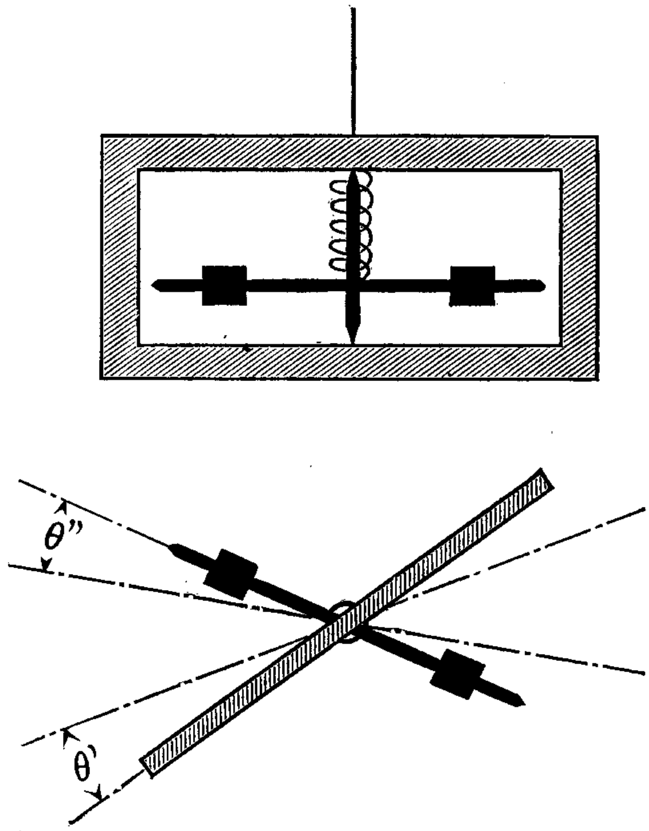

Fig. 28.

Il movimento che si produce dipendendo esclusivamente dalle azioni esercitate dalla molla (che sono forze eminentemente interne), deve essere applicabile l'ultima equazione da noi trovata. Chè anzi, siccome le velocità iniziali son nulle, deve essere nulla la costante che vi compare al secondo membro. Si dovrà avere pertanto:

$$J_z' \frac{d\theta'}{dt} + J_z'' \frac{d\theta''}{dt} = 0$$

ossia:

$$J_z' \theta' + J_z'' \theta'' = \text{costante.}$$

Se si assumono come origini degli azimut θ' e θ'' le posizioni in cui telaio e traversa si trovano in un medesimo istante, del resto affatto arbitrario, l'equazione scritta, dovendo riuscire verificata per $\theta' = \theta'' = 0$, dovrà ridursi a

$$J_z' \theta' + J_z'' \theta'' = 0$$

θ' e θ'' dovranno dunque esser sempre di segni contrari.

Ne segue che telaio e traversa dovranno trovarsi contemporaneamente agli estremi delle loro corse; che cioè essi *oscilleranno col medesimo periodo.*

Inoltre *i loro azimut staranno sempre nella ragione inversa dei loro momenti d'inerzia:* e lo stesso dovrà in particolare accadere delle ampiezze delle loro oscillazioni.

***

A questo genere di problemi se ne riconnette uno, assai curioso, ed è quello dei *moti rotatorii che gli esseri viventi possono imprimersi colle sole loro forze.*

Intanto è in primo luogo evidente che un essere vivente il quale sia animato da un moto di rotazione attorno ad un asse (che continueremo a chiamare asse delle z) può colle sole sue forze, cioè senza l'intervento di alcuna azione esterna, accelerare o ritardare a volontà il suo movimento.

In assenza di forze esterne — o sotto l'azione di forze esterne aventi un momento nullo rispetto all'asse di rotazione — abbiamo infatti trovato che deve essere verificata la relazione:

$$\frac{dS_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = 0$$

dalla quale si deduce necessariamente:

$$J_z \omega = \text{costante}.$$

Nell'ipotesi del sistema rigido (J_z costante) noi avevamo concluso che doveva ω mantenersi costante.

Ma se si suppone che, ad un dato istante, il momento d'inerzia del sistema si riduca improvvisamente a metà, ad un terzo ecc., ecco che, perchè l'equazione sia soddisfatta, occorre che la velocità angolare diventi rispettivamente doppia, tripla, ecc.

L'esperienza è assai facile a farsi.

Un uomo sale sopra una piattaforma girevole attorno ad un asse verticale, alla quale si imprime dall'esterno un certo moto di rotazione: cessata ogni azione esterna, se le resistenze al movimento sono trascurabili (come in pratica accade se la piattaforma è sospesa ovvero poggiata su movimenti a sfere sufficientemente scorrevoli) fin che l'uomo non cambia di posizione la piattaforma continuerà a girare sempre sensibilmente colla medesima velocità; ma basta che l'uomo allarghi le braccia perchè si osservi un istantaneo rallentamento del moto: e il fenomeno riesce ancora più marcato se l'uomo tiene nelle sue mani due pesanti manubrii sicchè la variazione del momento d'inerzia determinata dal suo gesto sia più sentita. La velocità riprende d'altronde il valore primitivo non appena l'uomo riprende la primitiva posizione.

Questo fenomeno è largamente sfruttato da tutti i ginnasti i quali, appena preso lo slancio per fare per esempio un salto mortale, si raggomitolano colle membra, riuscendo così ad accrescere notevolmente la velocità di rotazione iniziale (e quindi a compiere più rapidamente il loro giro su sè stessi), salvo a distenderle di nuovo quando, giunti verso il termine del giro, vogliono rallentare il movimento sì da poter più facilmente toccar terra in posizione conveniente.

***

Ma l'esperimento della piattaforma girevole permette di constatare che l'uomo che vi sta sopra può non soltanto modificarne la velocità se essa è in movimento, ma anche imprimerle una rotazione se è in quiete.

Supponiamo infatti che l'uomo muovendosi sulla piattaforma faccia descrivere ad una certa massa una traiettoria la cui proiezione sul piano orizzontale sia MN (fig. 29).

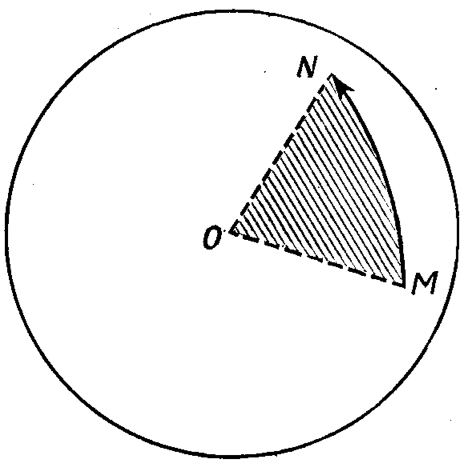

Fig. 29.

All'area tratteggiata in figura, proiezione di quella descritta dal raggio vettore che da un punto qualunque dell'asse di rotazione va alla massa in discorso, devono allora necessariamente corrisponderne altre, relative ad altre masse del sistema, tali che si abbia:

$$\sum mA_z = 0$$

conformemente a ciò che richiede il teorema delle aree.

Se si suppone, tanto per fissare le idee su di un caso semplice, che tutte le altre masse del sistema mantengano immutate le loro posizioni relative, cioè si muovano come un tutto rigido insieme colla piattaforma, questa dovrà necessariamente subire una rotazione più o meno grande (a seconda delle masse che porta e delle loro distanze dall'asse) in senso contrario a quello indicato dalla freccia.

Nè è da credersi che se l'uomo riporta la massa mobile nella sua posizione primitiva, anche tutte le altre debbano necessariamente ritornare alle primitive loro posizioni.

Ciò avverrà indubbiamente se a quella massa egli fa descrivere nel ritorno lo stesso cammino percorso nell'andata, o comunque un cammino il quale abbia la medesima proiezione orizzontale NM.

Ma se invece il cammino della massa mobile si proietta in una curva chiusa di area non nulla come è indicato nella fig. 30, allora la proiezione dell'area descritta dal relativo raggio vettore sarà essa pure diversa da zero: e continuano a sussistere le conclusioni tratte più sopra: quando la massa sarà ritornata nella posizione iniziale, per ivi fermarsi, anche la piattaforma si fermerà, ma in una posizione diversa dalla iniziale, avendo cioè ruotato di un certo angolo attorno all'asse verticale.

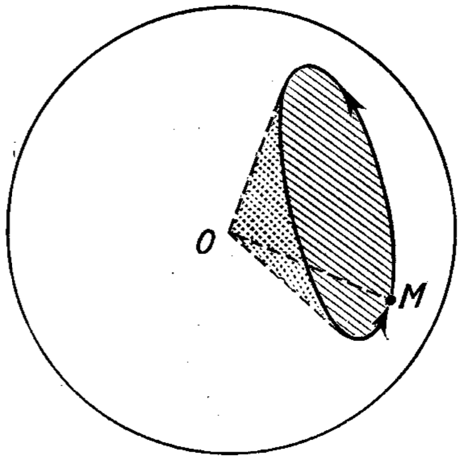

Fig. 30.

Che se invece l'uomo continuasse a muovere la solita massa facendole percorrere con moto continuo la sua traiettoria chiusa in un dato senso, anche la piattaforma dovrebbe per conseguenza muoversi ruotando, ad ogni giro della massa mobile, di quel certo angolo in senso contrario.

Vi sono sulla superficie della terra molte masse che, per volontà dell'uomo o più frequentemente ancora per l'azione di forze naturali, ma in ogni caso indipendentemente da ogni azione esterna alla terra, descrivono delle curve chiuse: citiamo fra le più cospicue quelle delle grandi correnti marine. Ai piccoli movimenti rotatorii che esse determinano nella massa terrestre

— piccoli in ragione della grande massa che interessano, ma non necessariamente trascurabili — sono da attribuirsi certi piccoli spostamenti che più o meno periodicamente presentano i poli della terra.

***

Un ultimo esempio: è stato osservato che comunque si lasci cadere da una certa altezza un gatto — anche se si ha l'avvertenza di abbandonarlo in posizione capovolta cioè colle zampe all'aria — egli riesce sempre, prima di toccar terra, a raddrizzarsi ed a cadere quindi sulle quattro zampe.

La cosa era sempre parsa assai singolare: d'altra parte la resistenza dell'aria non può in simili condizioni esercitare alcun effetto apprezzabile: vien dunque fatto di chiedersi con quale manovra il gatto possa compiere colle sue sole forze quel mezzo giro attorno al suo asse longitudinale.

Ecco come il fatto può venire spiegato:

Ammettiamo per semplicità che nel corpo del gatto si possano distinguere due parti, sufficientemente mobili l'una rispetto all'altra, che noi chiameremo rispettivamente anteriore e posteriore.

Tanto dell'una che dell'altra parte il gatto può variare a volontà il momento d'inerzia rispetto al suo asse longitudinale, distendendo ovvero ripiegando le relative zampe.

Ciò posto supponiamo che egli voglia iniziare un moto di rotazione in un dato senso che chiameremo positivo.

Egli ripiegherà le zampe davanti e distenderà quelle di dietro in modo da attribuire alla sua parte anteriore un momento d'inerzia minore di quello della sua parte posteriore: poi farà ruotare la parte anteriore nel predetto senso positivo: la parte posteriore ruoterà bensì nel frattempo nel senso negativo, ma di un angolo più piccolo.

Giunto a questo punto egli distenderà le zampe davanti e ripiegherà quelle di dietro, sicchè il momento d'inerzia della parte anteriore verrà ad essere maggiore di quello della parte posteriore: poi eseguirà la manovra opposta, cioè farà ruotare nel senso positivo la parte posteriore, mentre la parte anteriore ruoterà per conseguenza in senso negativo; ma ancora una volta la rotazione negativa sarà minore di quella positiva.

Ne segue che, quando le due parti del suo corpo avranno ripresa l'una rispetto all'altra la loro posizione normale, il tutto si troverà effettivamente girato di un certo angolo dalla parte voluta.

In realtà la grande flessibilità del corpo del gatto permette a questo di far partecipare, alla manovra destinata a far variare i momenti d'inerzia, quasi tutta la sua massa anzichè le sole zampe come noi abbiamo per semplicità supposto. Tuttavia certe riproduzioni cinematografiche del fenomeno mostrano chiaramente che, pur attraverso certe variazioni e complicazioni nei dettagli, la manovra che i gatti effettivamente compiono quando si trovano nelle condizioni indicate corrisponde abbastanza bene nelle sue linee generali a quella che noi abbiamo schematicamente descritta.