III.

IL PENDOLO

Allo studio del problema del pendolo Galileo era stato indotto dall'osservazione delle oscillazioni delle lampade appese nel Duomo di Pisa.

Egli aveva facilmente riconosciuto l'isocronismo di quelle oscillazioni: aveva cioè riconosciuto che il tempo occorrente per una oscillazione semplice era costante per ciascuna lampada, qualunque fosse (almeno entro certi limiti) l'ampiezza dell'oscillazione stessa.

Ecco come egli cercò di rendersi conto del fatto (*).

Un corpo appeso all'estremità di un lungo filo, oscillando sotto l'azione del suo peso, descrive un arco di circonferenza simmetrico rispetto alla verticale che passa per il punto di sospensione. Finchè l'ampiezza delle oscillazioni si mantiene molto piccola, si può, almeno in via di prima approssimazione, confondere quell'arco con una bilatera costituita dalle sue due corde che fanno capo al suo punto più basso: si viene così a sostituire al movimento reale del grave quello che esso assumerebbe discendendo (per effetto della gravità) lungo la prima corda, e risalendo poi (per effetto della velocità acquistata) lungo l'altra.

Ora Galileo sapeva — e noi lo abbiamo già segnalato — che il tempo che il grave impiega a discendere (o a risalire) lungo una di quelle corde è sempre lo stesso per una data circonferenza ed è eguale al tempo che gli occorrerebbe per percorrere, cadendo liberamente, l'intiero diametro verticale di questa.

(*) Cfr. E. Mach. *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 156.

Detta pertanto l la lunghezza del filo, epperò $2l$ quella del diametro della circonferenza, e tenuto conto che la caduta avviene secondo la nota legge:

$$s = 2l = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

si deduce subito che quel tempo è:

$$t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Se la sostituzione ideata da Galileo fosse legittima agli effetti del calcolo che stiamo facendo, la durata di una oscillazione semplice dovrebbe essere:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}$$

In realtà la sostituzione — che andrebbe benissimo se si trattasse per esempio di calcolare la velocità acquistata dal grave alla fine della discesa — non è legittima quando si tratta di calcolare il tempo impiegato: il grave percorre l'arco di cerchio in un tempo un po' più breve di quello che impiegherebbe per percorrere la corda, e ciò anche quando arco e corda differiscono di pochissimo fra loro.

Il valore trovato di T è errato nel coefficiente numerico che, come vedremo a suo tempo, non è 4 ma π.

Tuttavia la formola di Galileo, non soltanto dà ragione dell'isocronismo delle oscillazioni, ma presenta già la legge del pendolo nella sua forma reale, mettendo in evidenza il modo con cui il tempo T dipende dalla lunghezza l e dall'accelerazione g.

***

Alla teoria esatta del pendolo giunse, non molto dopo, Cristiano Huygens (1629-1695) che fu forse il più insigne tra i successori di Galileo.

Egli vi giunse attraverso tutta una serie di importanti ricerche sulle leggi dei moti rotatorii e di quelli oscillatorii, le quali meritano di essere, sia pur brevemente, accennate.

Quando si è accettata la condizione di Galileo e di Descartes, secondo la quale le forze determinano delle accelerazioni, cioè delle variazioni della velocità, si è necessariamente condotti ad attribuire ad una forza ogni qualsiasi modificazione della velocità: vale a dire non soltanto (come abbiamo tacitamente fatto fin'ora) le variazioni di grandezza, ma anche le variazioni di direzione (*).

Così il fenomeno di un corpo attaccato alla estremità di un filo ed animato da un moto di rotazione attorno all'altro estremo del filo non può più essere concepito dalla nostra mente se non attraverso l'ipotesi di una forza continua che lo fa continuamente deviare dal suo cammino, che altrimenti sarebbe rettilineo. Questa forza non può essere che la tensione del filo: essa attira il corpo verso il centro del cerchio: epperò viene da alcuni chiamata forza centripeta.

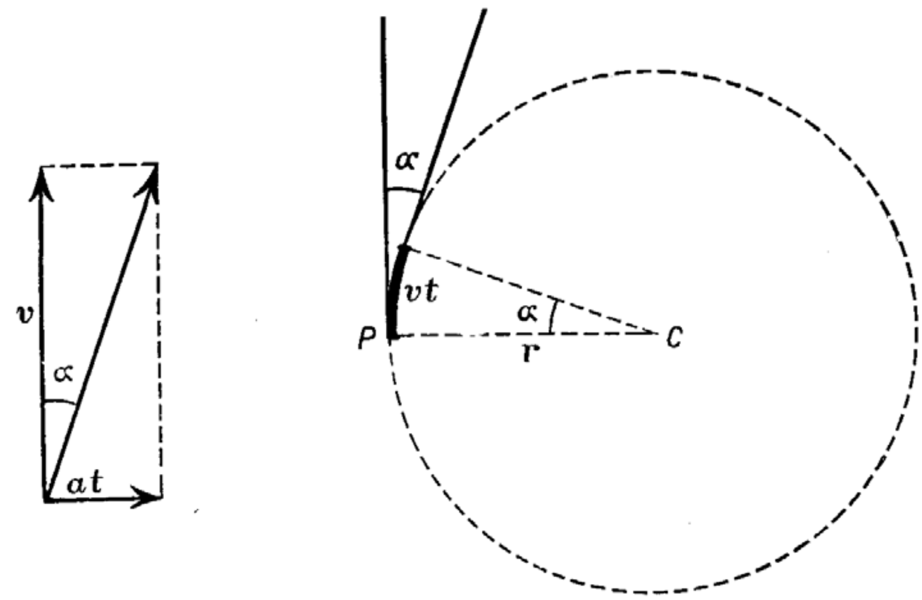

Fig. 9.

All'estremo fisso del filo la tensione agisce naturalmente in senso opposto: lo si constata facilmente in modo diretto tenendo colla mano tale estremo: la forza che la mano risente da parte del filo, e che tende a scostarla dalla sua posizione, costituisce quella che si chiama forza centrifuga.

Consideriamo dunque un punto materiale P (fig. 9) animato in un dato istante da una certa velocità v, data in grandezza,

(*) Cfr. E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pagg. 150 e 152.

direzione e senso; ed immaginiamo che su di esso agisca durante un elemento di tempo t una forza capace di imprimergli l'accelerazione a perpendicolarmente alla direzione di v: il punto alla fine del tempo t avrà acquistata la velocità $a \,.\, t$ diretta normalmente alla v: se l'elemento di tempo t considerato è piccolissimo, anche $a \,.\, t$ sarà piccolissima rispetto a v: componendo pertanto queste due velocità si otterrà la nuova velocità del mobile, la quale non differirà da v per la grandezza (a meno di infinitesimi di ordine superiore) ma soltanto per la direzione.

Ciò posto, dire che il moto è circolare equivale evidentemente a dire che questa nuova direzione del moto è, come la prima, normale al raggio che va ad un centro fisso C: o, ciò che fa lo stesso, che l'angolo di cui è ruotata la direzione della velocità è uguale all'angolo di cui è ruotato il raggio: sia α questo angolo, alla sua volta piccolissimo sì da poterlo confondere colla sua tangente trigonometrica: si ha dalla figura:

$$\frac{a \,.\, t}{v} = \text{tang} \,.\, \alpha = \frac{v \,.\, t}{r}$$

donde:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5}$$

L'accelerazione — e quindi anche la forza centripeta a cui quell'accelerazione va attribuita — in un moto circolare uniforme è dunque direttamente proporzionale al quadrato della velocità, ed inversamente proporzionale al raggio.

Come abbiamo già accennato, queste fondamentali idee sulla esistenza della forza centrifuga e sul suo modo di manifestarsi nel moto rotatorio (uniforme) furono per la prima volta acquisite alla scienza per opera di Huygens. Il quale ne trasse una interessante conseguenza (*) che merita di essere ricordata, tanto più che si riconnette colle cose dette nel precedente capitolo.

Un orologio a bilanciere era stato in quei tempi trasportato da Parigi a Cayenne, e si era constatato che ritardava sensibilmente: Huygens, pensando che la forza centrifuga dovuta alla rotazione terrestre crescendo dai poli verso l'equatore deve

(*) Cfr. E. Mach, *La mécanique,* ecc., Paris 1904, pag. 154.

far variare in senso contrario il peso dei corpi, diede immediatamente la spiegazione del fatto e stabilì per la prima volta una legge di variazione dell'accelerazione di gravità.

***

Dalle leggi del moto circolare uniforme si passa facilmente a quelle di certi moti oscillatorii.

Sia infatti P un punto il quale descriva con velocità costante v una circonferenza di raggio r (fig. 10): proiettiamolo ortogonalmente su di un diametro in M: le più elementari considerazioni di cinematica bastano a provare che l'accelerazione di M non è altro che l'analoga proiezione dell'accelerazione centripeta costante a che caratterizza il movimento di P: essa è sempre diretta verso il centro C della circonferenza ed è misurata da:

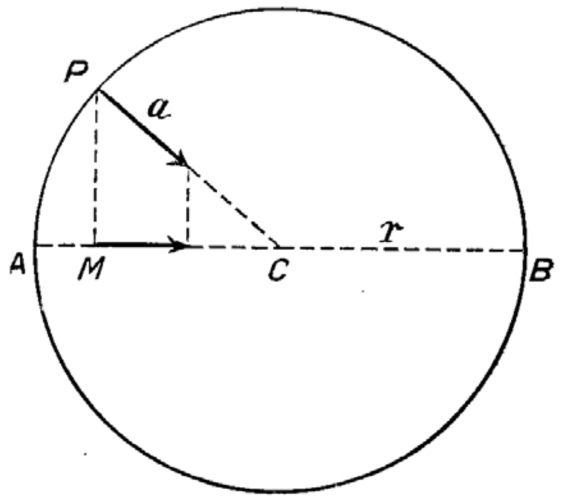

Fig. 10.

$$a \cdot \frac{CM}{CP} = \frac{a}{r} \cdot CM$$

Il coefficiente $\frac{a}{r}$ essendo costante, nel senso che non dipende dalla posizione di M, l'accelerazione in discorso si mantiene proporzionale allo scostamento CM.

Ciò è quanto dire che il movimento di M si può direttamente realizzare ogni qualvolta una massa ivi collocata sia attratta dal punto fisso C con intensità proporzionale alla distanza.

Data la legge di azione della forza, anche la costante $\frac{a}{r}$ è da considerarsi come nota: essa infatti non rappresenta in ultima analisi altro che il valore dell'accelerazione per $CM = 1$, cioè in un particolare punto della traiettoria, valore che può sempre calcolarsi direttamente date che siano la massa e la forza in quel punto.

È ora molto facile dimostrare che anche il tempo T che il punto M impiega a compiere una oscillazione semplice (cioè a passare da A in B o viceversa) è in queste condizioni perfettamente determinato.

Si ha infatti subito, riferendosi al moto circolare e tenendo presente la relazione a suo tempo stabilita fra l'accelerazione a e la velocità v di questo:

$$T = \frac{\pi r}{v} = \pi \sqrt{\frac{r}{a}} \tag{6}$$

In particolare T non dipende dalla ampiezza delle oscillazioni: perciò comunque, e per qualunque ragione, varii questa ampiezza le oscillazioni si manterranno isocrone.

Sono molti i problemi fisici in cui l'ipotesi della proporzionalità della forza allo scostamento si verifica, se non rigorosamente, almeno in via di prima approssimazione: tipico tra tutti è quello della corda vibrante ove l'isocronismo si traduce nella proprietà di emettere un suono di altezza costante: ed è grazie ad esso che i movimenti oscillatorii del tipo di quello testè studiato hanno preso il nome di movimenti armonici.

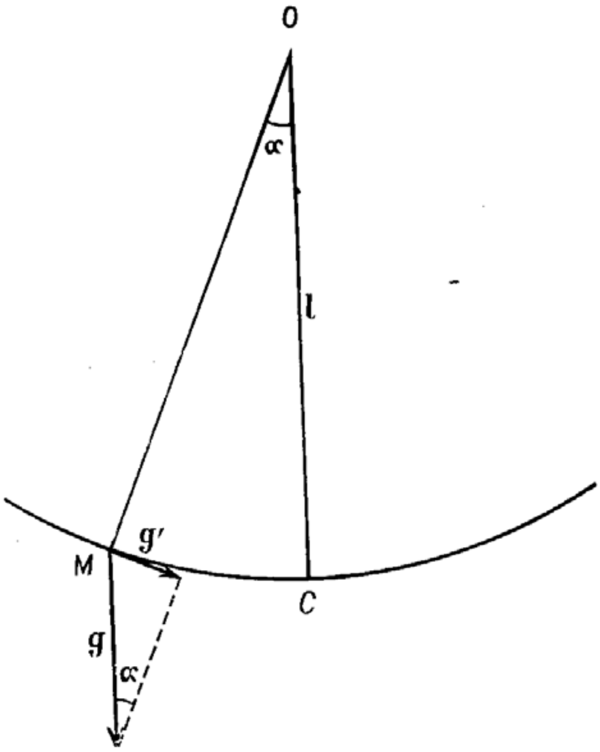

Fig. 11.

***

Ciò premesso, consideriamo un pendolo semplice, cioè un punto materiale M appeso con un filo (inestensibile ed immateriale) ad un punto fisso O ed oscillante attorno ad esso in un piano verticale sotto l'azione del suo peso (fig. 11).

Detto α l'angolo che il filo fa colla verticale in un istante generico del moto, e tenuto conto che questo angolo è quello stesso che l'elemento di traiettoria su cui sta il mobile fa colla orizzontale, l'accelerazione tangenziale si può subito calcolare applicando la nota regola di Galileo pel piano inclinato: essa varrà dunque:

$$g' = g \,.\, \operatorname{sen} \alpha$$

Ma se ci limitiamo a considerare delle oscillazioni di ampiezza così piccola che tanto il seno dell'angolo α come l'arco di circonferenza ad esso relativo si possano confondere colla rispettiva tangente, il punto M si potrà pensare come mobile su di un segmento di retta (fig. 12) con una accelerazione:

$$g' = g \,.\, \operatorname{tg} \alpha$$

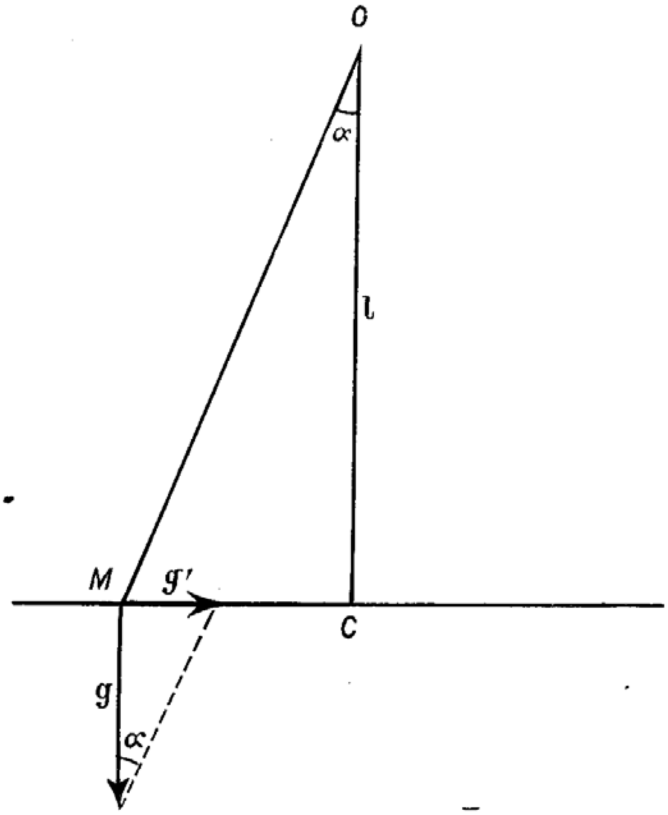

Fig. 12.

diretta sempre verso C e proporzionale allo scostamento:

$$MC = l \,.\, \operatorname{tg} \alpha$$

Le oscillazioni saranno dunque isocrone: il tempo che il pendolo impiegherà per compierle si otterrà sostituendo nella formola precedente alla costante $\frac{a}{r}$ il valore che le spetta nel caso attuale:

$$\frac{g'}{MC} = \frac{g \,.\, \operatorname{tg} \alpha}{l \,.\, \operatorname{tg} \alpha} = \frac{g}{l}$$

Si trova:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

Non è difficile controllare sperimentalmente la relazione tra la lunghezza l del pendolo semplice e la durata delle sue oscillazioni di piccola ampiezza.

Non bisogna infatti annettere un valore assoluto all'affermazione, comune nei trattati di meccanica, secondo la quale il pendolo semplice è irrealizzabile.

Osserva molto a proposito il Bouasse (*) che sarebbe assai più esatto avvertire che una sfera metallica omogenea di raggio r sospesa all'estremità di un filo molto fino di lunghezza $l - r$ realizza un pendolo semplice di lunghezza l con un'approssimazione grandissima alla sola condizione che l sia molto grande a fronte di r: basti dire che per l eguale a 100 volte r l'errore relativo che si compie nel calcolo di T non supera $\frac{1}{25000}$ ed è perciò assolutamente trascurabile, a meno che le misure non raggiungano una precisione estrema.

Se pertanto si montano, l'uno accanto all'altro, parecchi pendoli semplici a, b, c,... le cui lunghezze stiano rispettivamente come $1:4:9:\ldots$, si constata facilmente che a fa due oscillazioni nel tempo in cui b ne fa una sola: che ne fa tre mentre c ne fa una sola, e così via.

Meno agevole è la verifica sperimentale della relazione tra la durata delle oscillazioni e l'accelerazione di gravità: non è infatti in nostro potere far variare questa accelerazione, e le piccole variazioni che si osservano da posto a posto non si prestano ad essere utilizzate a questo fine. Vi si arriva però costruendo il pendolo in modo che utilizzi soltanto una componente dell'accelerazione g (**).

A tal fine la sfera metallica M viene appesa a due fili eguali MA ed MB (fig. 13) in modo che essa sia costretta ad oscillare nel piano normale ad AB condotto pel punto di mezzo O, sia che questo piano sia verticale (nel qual caso i due fili si comportano come se ci fosse un filo solo in OM) sia che esso sia obliquo, cioè faccia col piano verticale un angolo β come nella posizione indicata in figura con linee punteggiate. La componente dell'accelerazione g che agisce nel piano di oscillazione sarà allora $g \cdot \cos\beta$: se pertanto si dà al pendolo una piccola elongazione α nel suo piano di oscillazione

(*) H. Bouasse, *Cours de mécanique rationnelle et expérimentale*, Paris (Delagrave), pag. 401.

(**) Cfr. E. Mach, *La Mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 162.

l'accelerazione della massa pesante verso la sua posizione di equilibrio diviene:

$$(g \,.\, \cos \beta) \,.\, \operatorname{sen} \alpha$$

sicchè la durata dell'oscillazione sarà:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \beta}}$$

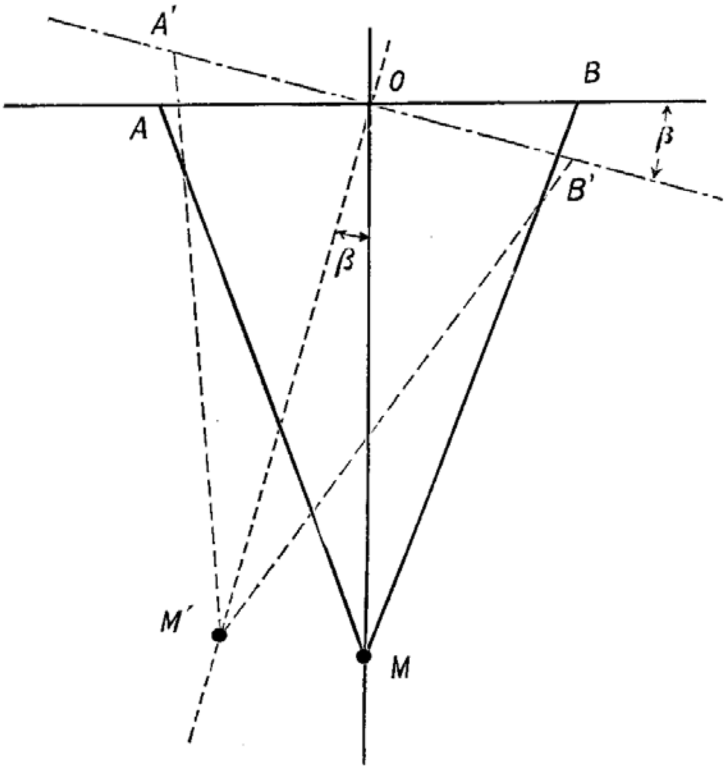

Fig. 13.

In realtà si osserva che, col crescere dell'angolo β, il tempo T aumenta in ragione inversa della radice quadrata del suo coseno.

Se i fili di sospensione sono costituiti da esili asticciuole rigide, l'esperienza può prolungarsi fino a far coincidere il piano di oscillazione col piano orizzontale: la durata delle oscillazioni aumenta allora fino a diventare infinita nel senso che il pendolo, una volta messo in moto in un dato senso, non ritorna verso alcuna posizione di equilibrio determinata, ma continua a girare, nel medesimo senso, fino a che ogni movimento non si esaurisca per effetto delle resistenze passive.

***

Ritornando al caso del pendolo liberamente oscillante in un piano verticale, non possiamo passare sotto silenzio la possibilità che esso offre di una facile e nel tempo stesso assai esatta determinazione del valore di g: si ha infatti:

$$g = \frac{\pi^2 l}{T^2} \tag{8}$$

Grazie all'isocronismo, il tempo T può venir misurato con grande precisione (anche se non si dispone di mezzi speciali per la misura dei piccoli intervalli): basta riferirsi ad una serie convenientemente lunga di oscillazioni successive e dividerne poi la durata totale per il numero: si può così nella determinazione del valore dell'accelerazione di gravità raggiungere con relativa facilità una esattezza estrema.

È per questa via, suggerita per la prima volta da Huygens, che furono eseguite verso la fine del secolo decimottavo le memorabili esperienze di Borda sulla misura di g: ed è sostanzialmente ancora per questa via che si effettuano anche oggi le più delicate ricerche sulle anomalie della gravità.

* * *

Ma il maggior titolo di gloria di Huygens è certamente la teoria del *pendolo composto*, che egli espose in un trattato intitolato *Horologium oscillatorium* pubblicato nel 1673.

Fin che si era trattato infatti di studiare le oscillazioni di *un punto* materiale, i principii di Galileo erano stati sufficienti: ma nel problema del pendolo composto — di un corpo cioè dotato di un asse fisso, e che attorno a quest'asse oscilla sotto l'azione del suo peso — le cose si complicano.

Ciascuno dei punti materiali che costituiscono il corpo, considerato da solo, avrebbe una sua propria durata di oscillazione attorno al detto asse: i punti più vicini all'asse oscillerebbero più rapidamente, quelli più lontani più lentamente. Ma per effetto dei vincoli che connettono i singoli punti tra loro formandone un unico corpo, questo dovrà presentare un periodo di oscillazione unico e ben determinato. Quello che si può agevolmente prevedere è che il movimento dei punti più lontani dall'asse sarà accelerato dall'azione dei vincoli che li collegano ai più vicini, mentre il movimento di questi sarà ritardato dall'azione dei primi: che perciò la durata di oscillazione del pendolo composto sarà qualche cosa di intermedio tra quelle che spetterebbero ai singoli pendoli semplici che vi si possono ravvisare.

In altre parole, si potrà sempre costruire un pendolo semplice il quale abbia il medesimo periodo di oscillazione del pendolo composto dato: e la sua lunghezza sarà certamente intermedia fra quella del più lungo e del più corto fra i pendoli semplici testè ricordati. Vi sarà dunque almeno un punto del corpo il quale, malgrado i vincoli che lo collegano agli altri punti, oscilla come se fosse solo: questo punto prende il nome di *centro di oscillazione*: la sua distanza dall'asse si chiama *lunghezza del pendolo composto*.

Studiare la legge del movimento di un pendolo composto vuol dunque dire in ultima analisi determinarne la lunghezza.

Orbene Huygens fu il primo che abbia data una soluzione generale di questo problema: e riuscì a ciò partendo da una idea nuova la quale è in sè stessa più importante che non il problema a cui egli l'applicava (*).

Egli ammise che in ogni caso, cioè qualunque siano le azioni che i singoli punti materiali costituenti il corpo esercitano gli uni sugli altri, le velocità da essi punti acquistate nel movimento di discesa del pendolo devono essere tali che il centro di gravità del sistema possa risalire esattamente alla medesima altezza da cui è disceso, e ciò sia che le singole masse continuino ad essere fra loro connesse, sia che i rispettivi vincoli si immaginino improvvisamente distrutti.

Il lettore non mancherà di riconoscere in questo principio di Huygens una generalizzazione di una delle concezioni di Galileo che noi abbiamo a suo tempo ampiamente illustrata: e si renderà quindi conto molto facilmente della portata e del contenuto vero di esso: contenuto il quale si può ancor qui ridurre alla solita affermazione del fatto che i corpi pesanti non possono da loro stessi muoversi verso l'alto.

Ma i contemporanei di Huygens non accettarono tanto facilmente il suo punto di vista: sicchè egli si vide costretto a tentare di darne in qualche modo la dimostrazione. E ragionava presso a poco così: supponiamo che il centro di gravità delle singole masse pesanti connesse tra loro durante la discesa in modo da costituire il pendolo, possa, per la supposta soppressione dei rispettivi vincoli, risalire ad un'altezza maggiore di quella da cui è partito: ne seguirà che dei corpi pesanti possono per la sola azione del loro peso, mediante opportune ripetizioni dell'operazione descritta, sollevarsi ad un'altezza qualunque. Che se invece, dopo le soppressioni dei vincoli, il centro di gravità non potesse più sollevarsi se non ad un'altezza inferiore alla primitiva, basterebbe invertire il senso delle mede-

(*) Cfr. E. Mach, *La mécanique*, ecc., Paris 1904, pag. 167.

sime operazioni per riuscire ancora al risultato di prima. Ci si finisce così per convincere che il postulato di Huygens rientra nel numero di quelle proposizioni di cui noi abbiamo la certezza istintiva.

***

Ciò posto ecco in qual modo esso può servire alla ricerca del centro di oscillazione e della lunghezza di un pendolo composto.

Consideriamo per semplicità un pendolo lineare OA (fig. 14) costituito da un certo numero di masse identiche allineate, liberamente girevole attorno ad O. Se lo si abbandona all'azione

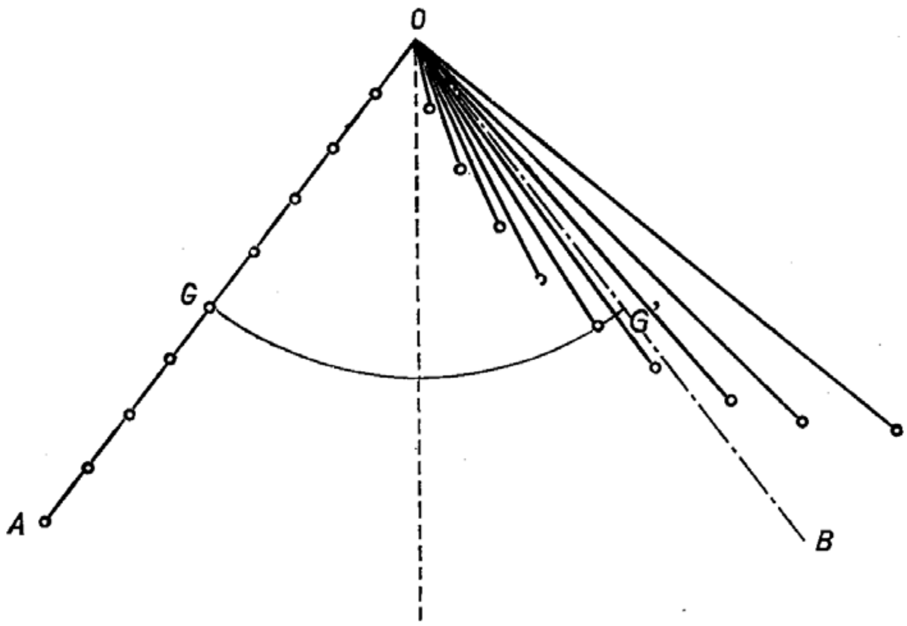

Fig. 14.

della gravità nella posizione OA esso oscillando rimonterà dall'altra parte della verticale fino alla posizione simmetrica OB: il suo centro di gravità, inizialmente in G, perverrà così alla posizione G' situata alla medesima altezza.

Supponiamo ora che, nel momento in cui attraversano la verticale per O, le singole masse vengano improvvisamente liberate dai vincoli che le connettono mutuamente, pur restando vincolate a ruotare attorno ad O: supponiamo cioè che esse vengano a costituire altrettanti pendoli semplici aventi tutti il medesimo centro di sospensione: in virtù delle velocità acquistate durante la discesa fatta in comune, quelle masse saliranno quale più quale meno, raggiungendo altezze variabili all'incirca nel modo che è indicato in figura; ma per il principio di Huygens il loro baricentro dovrà ancora pervenire in G'.

Per poter esprimere questa condizione Huygens ha dovuto naturalmente cercar di scrivere in forma esplicita la relazione fra la velocità acquistata da un grave, cadendo lungo non importa qual traiettoria, e l'altezza da cui esso è partito o a cui esso è capace di risalire. A questo fine egli combinando le due relazioni già trovate da Galileo (1) e (2):

$$v = g \, . \, t$$

$$s = \frac{1}{2} g \, . \, t^2$$

ottenne:

$$s = \frac{v^2}{2g} \tag{9}$$

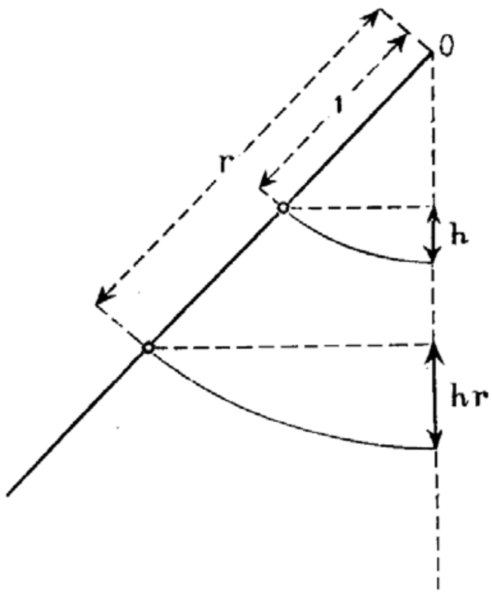

Fig. 15.

Detta pertanto h l'altezza di caduta di quel particolare punto del pendolo che è situato alla distanza 1 dal centro O di sospensione (fig. 15), sicchè l'altezza di caduta di una massa generica di peso p situata alla distanza generica r dallo stesso centro, si possa esprimere con $h \, . \, r$, e quella del baricentro con

$$\frac{\Sigma p \, h \, r}{\Sigma p} = h \, \frac{\Sigma p \, r}{\Sigma p}$$

e similmente detta v la velocità che quel particolare punto a distanza 1 da O possiede al suo passaggio attraverso la verticale per O, e quindi $v \, . \, r$ l'analoga velocità per il punto materiale generico a distanza r, l'altezza a cui questo punto risalirà dopo la supposta soppressione dei vincoli sarà:

$$\frac{(v \, r)^2}{2g}$$

Pel baricentro l'altezza di risalita sarà per conseguenza:

$$\frac{\sum p \frac{(v r)^2}{2g}}{\Sigma p} = \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{\Sigma p r^2}{\Sigma p}$$

Ed è ora ben evidente che scrivere il principio di Huygens vale a dire eguagliare le due altezze trovate:

$$h \,.\, \Sigma p\, r = \frac{v^2}{2g} \cdot \Sigma p\, r^2$$

equivale a scrivere la cercata relazione tra la velocità incognita v e l'altezza h o, se lo si preferisce, l'elongazione iniziale.

Il problema è virtualmente risolto: non resta che da fare un piccolo passo per trovare la lunghezza y del pendolo dato.

Tra la sua altezza di caduta $h \,.\, y$ e la sua velocità $v \,.\, y$ di passaggio attraverso la solita verticale deve infatti evidentemente sussistere la stessa relazione:

$$h\, y = \frac{(v\, y)^2}{2g}$$

ossia:

$$h = y \cdot \frac{v^2}{2g}$$

Dividendo membro a membro l'equazione di Huygens per questa si trova:

$$y = \frac{\Sigma p\, r^2}{\Sigma p\, r} \tag{10}$$

dopo di che si calcolerà il tempo occorrente per una oscillazione colla formola nota:

$$T = \pi \sqrt{\frac{y}{g}} = \pi \sqrt{\frac{\Sigma p\, r^2}{g \,.\, \Sigma p\, r}} \tag{11}$$

* * *

Studiando le proprietà delle sommatorie dei prodotti $p \,.\, r$ e $p \,.\, r^2$ che compaiono nelle formole del pendolo composto, Huygens scoperse i più importanti fra quei teoremi che costituiscono quella che oggi si usa chiamare la geometria delle masse.

Egli riuscì infatti a dimostrare che, detto P il peso complessivo del pendolo, d la distanza del suo baricentro G dal centro O di sospensione, e ϱ una lunghezza perfettamente determinata quando è data la distribuzione delle masse che lo compongono, si può sempre scrivere:

$$\Sigma p\, r = P\, d$$
$$\Sigma p\, r^2 = P\,(d^2 + \varrho^2)$$

La lunghezza del pendolo si può per conseguenza esprimere sotto la forma:

$$y = d + \frac{\varrho^2}{d}$$

facilmente traducibile nella costruzione grafica rappresentata in (fig. 16): basta tracciare a partire dal baricentro G e in direzione normale ad OG un segmento eguale a ϱ: poi dall'estremo di questo segmento condurre due raggi fra loro perpendicolari: se uno di essi passa per il centro di sospensione O l'altro segna sulla retta OG il centro di oscillazione O': la distanza OO' misura la lunghezza cercata y.

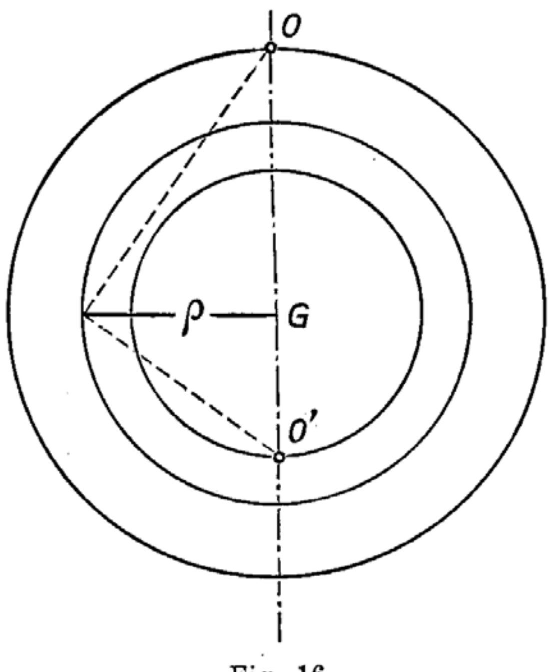

Fig. 16.

Si vede subito che le funzioni di O e di O' sono permutabili: che cioè se si assume il punto O' come centro di sospensione, il nuovo centro di oscillazione verrà a cadere precisamente in O: la durata di oscillazione non sarà mutata.

Ma v'è di più: tanto la lunghezza che la durata di oscillazione dipendono, per un dato pendolo, e quindi per un dato valore di ϱ, esclusivamente dal valore della distanza d del centro di sospensione dal baricentro: Huygens ne ha giustamente dedotto che non possono mutare comunque si sposti il centro di sospensione sulla circonferenza di centro G e di raggio d, ovvero su quella di centro G e di raggio $\frac{\varrho^2}{d}$.

***

Allo stesso risultato si arriva ragionando così: ricaviamo dall'ultima equazione scritta il valore di d in funzione di y e di ϱ:

$$d = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \varrho^2}$$

Per ogni valore di y, e quindi della durata T di oscillazione, si avranno dunque, in generale, due valori diversi di d: questi coincideranno soltanto quando si abbia:

$$\sqrt{\frac{y^2}{4} - \varrho^2} = 0$$

cioè:

$$y = 2\varrho$$

epperò:

$$d = \frac{y}{2} = \varrho$$

La circonferenza di raggio ϱ funziona dunque come circonferenza doppia: quando un punto di essa è stato scelto come centro di sospensione, il punto diametralmente opposto funziona da centro di oscillazione.

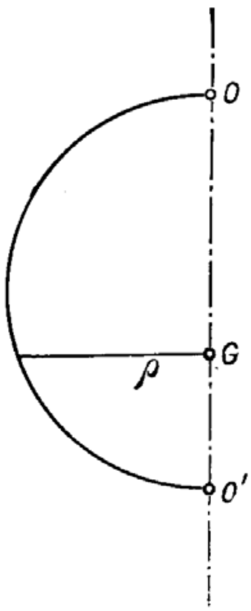

Fig. 17.

In ogni altro caso le due circonferenze corrispondentisi sono l'una interna e l'altra esterna alla precedente: al crescere indefinitamente del raggio della seconda, il raggio della prima diminuisce pure indefinitamente.

La conoscenza di due circonferenze corrispondenti è sufficiente a determinare completamente il comportamento del pendolo: supponiamo infatti che si siano sperimentalmente trovati due punti (a distanze differenti dal baricentro) rispetto ai quali il pendolo presenti la stessa durata di oscillazione: supponiamo per esempio che di un centro di sospensione arbitrariamente scelto O si sia sperimentalmente determinato il centro di oscillazione O' (fig. 17): si potrà allora immediatamente ricavare il valore di ϱ costruendo la circonferenza che ha OO' per diametro e considerando il segmento che essa intercetta sulla perpendicolare ad OO' innalzata da G.

Ecco, così brevemente riassunta, la ricca messe dei risultati a cui Huygens è pervenuto: essi si trovano tutti nei suoi scritti, sotto questa stessa forma o sotto una forma poco differente: alcuni esplicitamente enunciati, altri precisati a tal punto che l'enunciato può dedursi senza la minima difficoltà.

Non tutti questi risultati si trovano riportati nei trattati moderni: ordinariamente i trattatisti si limitano oggi a mettere in evidenza la sola reversibilità dei centri di sospensione e di oscillazione, reversibilità a cui ha conferito un notevole interesse il fatto che Kater ed altri se ne sono serviti per la determinazione precisa della lunghezza del pendolo che batte i secondi.

Sembra tuttavia non privo d'interesse il seguire, come qui si è fatto, più da vicino lo svolgersi dei ragionamenti di Huygens, e ciò non soltanto al fine di illustrare in modo più completo il problema del pendolo composto, ma anche perchè con quei ragionamenti Huygens gettava le basi della teoria dei momenti d'inerzia e metteva in evidenza per la prima volta i vantaggi che dalla loro considerazione si sarebbero poi tratti anche in tanti altri campi della meccanica.